Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
Klausur
4. Oktober 2017

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	9	7	10	8	9	9	52

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Optik [9P]**

Teil 1: Polarisation

a) Eine p-polarisierte elektromagnetische Welle trifft entsprechend der Abbildung 1 unter dem Winkel θ_1 zum Lot auf eine Grenzfläche und wird unter dem Winkel θ_2 gebrochen. Begründen Sie rechnerisch, ob die Brechung vom optisch dichteren ins optisch dünnere oder vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium stattfindet! [1P]

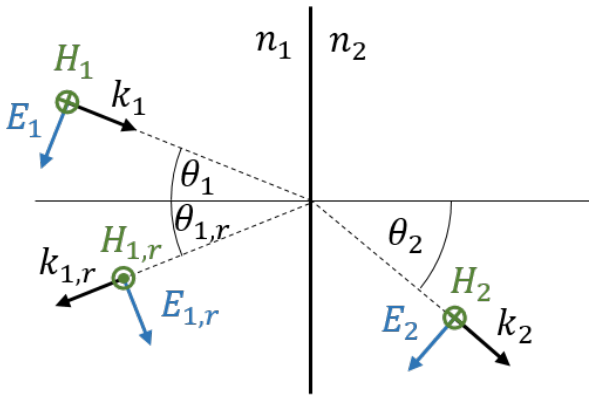


Abbildung 1: Brechung einer p-polarisierten elektromagnetischen Welle an einer Grenzfläche

b) Skizzieren Sie qualitativ den Reflexions- und Transmissionsgrad der elektromagnetischen Welle aus Abbildung 1 beim Übergang von dem Medium n_1 in das Medium n_2 in Abhängigkeit des Einfallswinkels und kennzeichnen Sie wichtige Winkel! [1,5P]

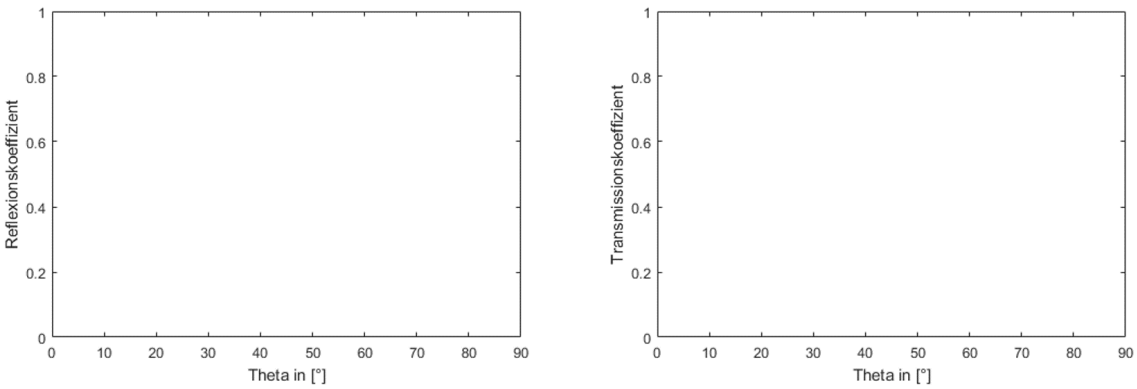


Abbildung 2: Reflexionskoeffizient und Transmissionskoeffizient

Fortsetzung auf Rückseite!

Teil 2: Optische Abbildung

c) Gegeben ist eine dünne bi-konvexe Linse aus Flintglas (n_{Linse} = 1,7). Der Betrag der Radien der Linse ist jeweils mit $R = 4{,}2\,\mathrm{cm}$ angegeben. Skizzieren Sie die Linse auf die gegebene optische Achse und geben Sie die Vorzeichen ihrer Krümmungsradien bezogen zur Ausbreitungsrichtung der optischen Achse gemäß der Vorzeichenkonvention der Vorlesung an! [1P]

d) Berechnen Sie die Brennweite der Linse für den Fall, dass sich das Linsensystem in Luft befindet! [0,5P]

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

e) Die Linse befindet sich weiterhin in Luft. Zeichnen Sie den Strahlengang für einen Gegenstand, der sich 4,5 cm links der Linse befindet, und beschriften Sie die Zeichnung! Bestimmen Sie Bildweite und Vergrößerungsmaßstab der Linse aus der Zeichnung! [2P]

f) Eine Seite der Linse wird nun plangeschliffen. Dadurch vergrößert sich die Brennweite auf 6 cm. Der Gegenstand befindet sich weiterhin 4,5 cm linksseitig der Linse. Um was für ein optisches Instrument handelt es sich, begründen Sie? [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

g) Skizzieren Sie einen Strahlengang des in der vorherigen Teilaufgabe beschriebenen Aufbaus! [1P]

h) Erklären Sie die chromatische Aberration bei einer Linse und geben Sie eine technische Lösungsmöglichkeit an! [1P]

2. **Allgemeine Fragen zur Quantenmechanik [7P]**

a) Der quantenmechanische Zustand eines Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschrieben. Wie lautet die partielle Differentialgleichung, welche die Zeitentwicklung des Zustandes im Rahmen der Quantenmechanik beschreibt? Geben Sie den formalen Zusammenhang und den Namen der Gleichung an! [0,5P]

b) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik? [0,5P]

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Wellenfunktion und der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines quantenmechanischen Teilchens? Die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens darf im Allgemeinen komplexe Werte annehmen. Begründen Sie, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des quantenmechanischen Teilchens trotzdem immer reelle Werte annimmt! [1P]

d) Physikalische Messgrößen werden in der Quantenmechanik durch Operatoren $\hat{A}$ beschrieben. Wie lautet der formale Zusammenhang für den Mittelwert $\langle A \rangle$, welcher sich bei oftmaliger Messung der Größe A an einem quantenmechanischen Sytem ergibt? Wie ist der Operater $\hat{p}$ definiert, welcher dem Impuls p zugeordnet wird? [1P]

e) Abbildung 3 zeigt schematisch den Aufbau des Doppelspaltexperiments mit Elektronen. Skizzieren Sie die Auftreffwahrscheinlichkeiten für Elektronen! Was folgt daraus für die Natur der Elektronen? [1P]

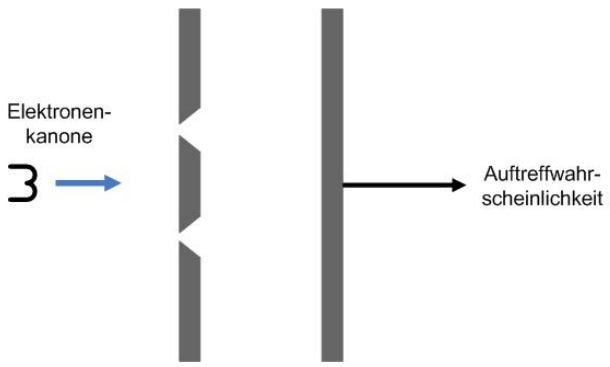


Abbildung 3: Doppelspalt-Experiment

Fortsetzung auf Rückseite!

f) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

g) Wie groß ist die kinetische Energie eines freien Protons, wenn seine De-Broglie-Wellenlänge 0,5 nm beträgt? Gehen Sie von einem nicht-relativistischen Proton aus. [1P]

h) Gehen Sie davon aus, dass die Energie dieses Protons genau bestimmt ist. Was lässt sich über den Ort des Protons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

3. **Endlicher Potentialtopf [10P]**

Gegeben sei folgendes Potential $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich 1)} \\ -V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq d \text{ (Bereich 2)} \\ 0 & \text{für } d < x \text{ (Bereich 3)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $d > 0$.

a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]

b) Skizzieren Sie im selben Diagramm die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten für Elektronen der niedrigsten zwei gebundenen Zustände mit Eigenenergien $-V_0 < W < 0$! Zeichnen Sie jeweils eine gestrichelte Linie ein, welche eine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von 0 markiert! [1,5P]

c) Worin unterscheiden sich die Lösungen der Schrödingergleichung für das gegebene Potential im Falle positiver ($W > 0$) und negativer ($-V_0 < W < 0$) Eigenenergien der Elektronen? Welche Besonderheit ergibt sich im Vergleich zu einem unendlichen Potentialtopf für die gebundenen Zustände innerhalb der Barriere und wie bezeichnet man den resultierenden Effekt? Nennen Sie ein Beispiel aus der Praxis, bei dem dieser Effekt zum Einsatz kommt! [2P]

Für die Wellenfunktionen $\psi_i(x)$ in den drei Bereichen ($i = 1,2,3$) ergeben sich folgende *allgemeine Lösungsansätze*:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Ae^{jk_1x} + Be^{-jk_1x}$
Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2x} + De^{-jk_2x}$
Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{jk_3x} + Fe^{-jk_3x}$

d) Geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! Keine Rechnung! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

e) Bestimmen Sie die Wellenzahlen k_i $(i = 1, 2, 3)$ in den Bereichen 1 bis 3! [1,5P]

f) Wir betrachten nun lediglich Elektronen in Eigenzuständen mit Energien $-V_0 < W < 0$. Setzen Sie die Wellenzahlen aus Aufgabe e) in die *allgemeinen Lösungsansätze* ein! Wie ändern sich dadurch die Lösungen (insbeondere in den Bereichen 1 und 3)? Begründen Sie, welche Koeffizienten des allgemeinen Lösungsansatzes gleich null gesetzt werden müssen und geben Sie die Wellenfunktionen in allen drei Bereichen an. [1,5P]

g) Das Potential im Bereich 1 sei nun $V(x < 0) = -V_0$. Damit betrachten wir eine Potentialstufe der Höhe V_0 an der Stelle $x = d$. Welche Energie $W < 0$ benötigt ein von links auf die Potentialstufe eintreffendes Elektron mindestens, damit seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit 1 Å innerhalb der Stufe (also bei $x = d + 1\,\text{Å}$) mindestens 50% der Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Rand der Stufe ($x = d$) entspricht? [2P]

4. **Kristalle [8P]**

a) Wir betrachten eine konventionelle Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc-) Kristallgitters mit zweiatomiger Basis. [1P]

- Wie viele Atome werden zur Einheitszelle gezählt?
- Welchem Kristallgitter entspricht das fcc-Gitter im reziproken Raum?

b) Wir betrachten einen Halbleiter entsprechend Aufgabe a), der in einem fcc-Gitter (mit Gitterkonstante a) mit zweiatomiger Basis kristallisiert. Er hat eine Dichte von $\rho = 2{,}336\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und eine molare Masse von $M = 28{,}09\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. Berechnen Sie die Gitterkonstante a! [1P]

Das Leitungsband des Halbleiters lässt sich im k-Raum im Bereich $[0, \frac{2\pi}{a}]$ zwischen Γ- und X-Punkt näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = \Delta W(2{,}5 + \cos(0{,}5ka))$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2\Delta W(1 - 1{,}19\cos(0{,}5ka))$ beschrieben. ΔW sei 1 eV.

c) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in die Diagramme in Abbildung 4 auf der Rückseite! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

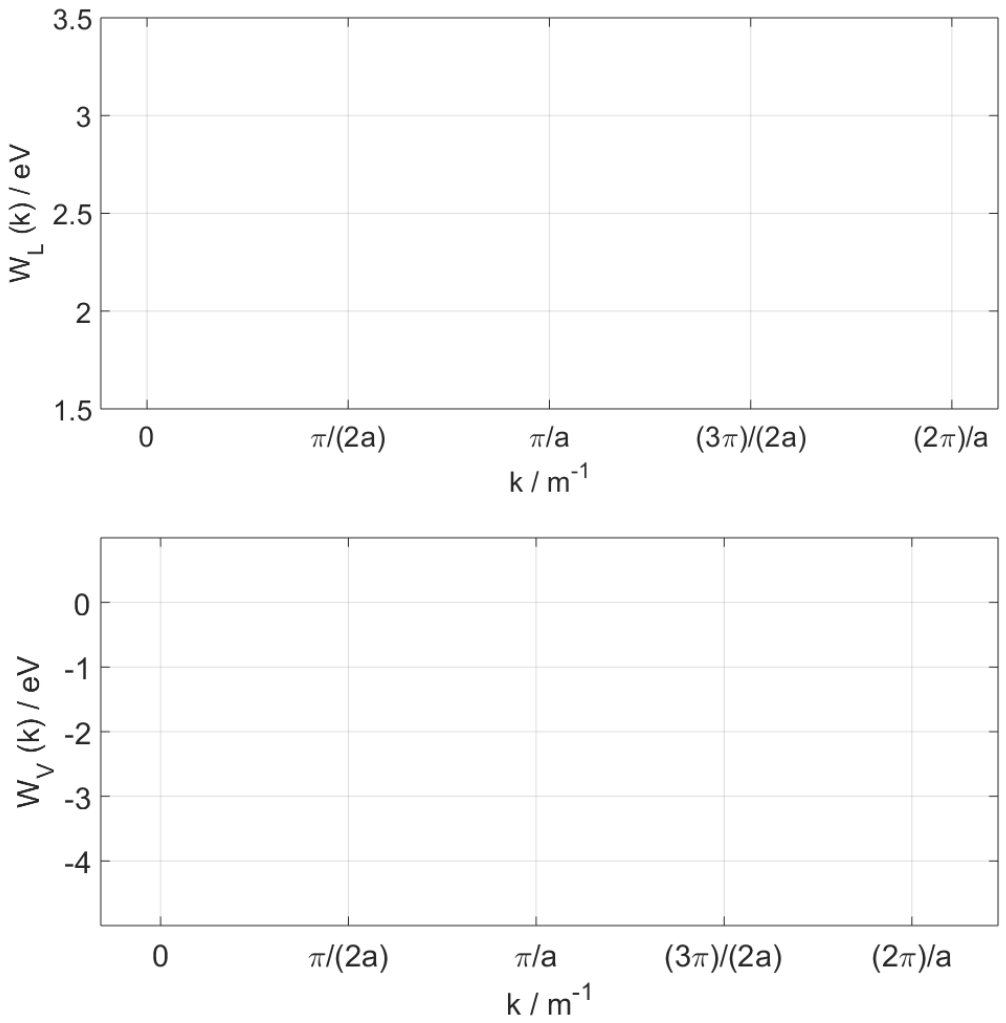


Abbildung 4: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

d) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Begründen Sie! [1P]

e) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1P]

f) Bestimmen Sie Gruppengeschwindigkeit v_g und effektive Masse m_{eff} eines Elektrons im Leitungsband in Abhängigkeit von a und ΔW! Bestimmen Sie dazu zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_L(k)}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}$! [2P]

g) Beschreiben Sie knapp und qualitativ, wie sich ein angelegtes elektrisches Feld (d.h. eine konstante Kraft) auf das Verhalten des in Teilaufgabe f) beschriebenen Elektrons auswirkt! Warum lässt sich diese Auswirkung durch eine einfache Strommessung nicht überprüfen? [1P]

5. **Intrinsische und dotierte Halbleiter [9P]**

a) Berechnen Sie die intrinsische Ladungsträgerkonzentration von Germanium bei einer Temperatur von 300 K! Die effektiven Zustandsdichten für das Leitungs- und Valenzband sind N_L=8,43 $\cdot 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$ und N_V=9,3 $\cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$ (Hinweis: Germanium absorbiert Licht bis zu einer Wellenlänge von λ=1,88 μm). [1,5P]

b) Nennen Sie zwei Dotierelemente, die prinzipiell als Akzeptoren in den Germaniumkristall eingebracht werden können! Wie nennt man diese Form der Dotierung?[0,5P]

c) In Abbildung 5 sind Lochkonzentrationen in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

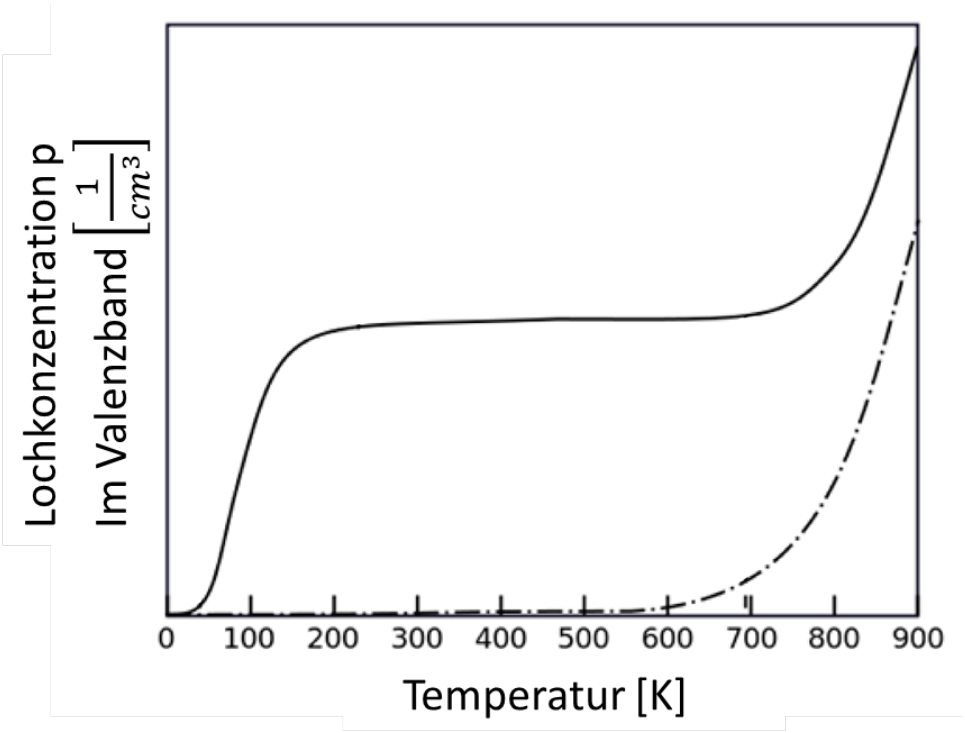


Abbildung 5: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

Fortsetzung auf Rückseite!

d) Betrachten Sie nun einen mit Akzeptoren dotierten Germanium-Kristall mit einer Akzeptorenkonzentration von $n_A = 10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$ bei einer Temperatur von 300 K! Alle Akzeptoren seien ionisiert. Bestimmen Sie die Loch- und Elektronkonzentrationen in einem solchen Kristall! [1,5P]

e) Die Ionisierungsenergie des Akzeptors im Germanium liege 10 meV oberhalb des Valenzbandes. Berechnen Sie die Lage des Ferminiveaus W_F relativ zum Akzeptorniveau W_A (d.h. $W_F - W_A$) und zum Valenzband W_V (d.h. $W_F - W_V$) und geben Sie diese jeweils in eV an! [1,5P]

f) Berechnen Sie die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters aus d)! Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_h = 10^3\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\mu_e = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$. Zeigen Sie, dass der Beitrag der Elektronen zur Leitfähigkeit vernachlässigt werden kann! [1,5P]

6. **pn-Übergang [9P]**

a) Was versteht man unter einer Raumladungszone? Erklären Sie zudem stichwortartig ihre Entstehung in einem pn-Übergang unter Berücksichtigung der wesentlichen Effekte! [2P]

Gegeben sei folgende x-abhängige Raumladungsdichte als Schottky-Näherung:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -l_\mathrm{p} \\ -en_\mathrm{A} & -l_\mathrm{p} < x \leq 0 \\ +en_\mathrm{D} & 0 < x \leq +l_\mathrm{n} \\ 0 & x > l_\mathrm{n} \end{cases}$$

Berücksichtigen Sie, dass $n_\mathrm{A} > n_\mathrm{D}$ gilt!

b) Skizzieren Sie die gegebene Raumladungsdichte! Deuten Sie darüber hinaus in Ihrer Skizze den realen Verlauf der Raumladungsdichte an! [2P]

c) Skizzieren Sie das elektrische Feld für den Bereich $[-2l_p, 2l_n]$! [1P]

d) Berechnen Sie nun jeweils für den p- und n-Bereich das elektrische Feld! [2P]

e) Welcher Zusammenhang zwischen l_p, l_n, n_D und n_A lässt sich aufgrund der Stetigkeit des elektrischen Feldes aufstellen? [1P]

f) Skizzieren Sie qualitativ (ohne weitere Rechnung) den Verlauf des Potentials Φ! Gehen Sie dabei davon aus, dass $\Phi(x \to \infty) = 0$! [1P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	=	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	=	$\frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	=	$6{,}02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	=	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	=	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	=	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	=	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	=	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	=	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	=	$3{,}0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	=	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	=	3,14	
Euler'sche Zahl	e	=	2,72	
Imaginäre Einheit	j	=	$\sqrt{-1}$	

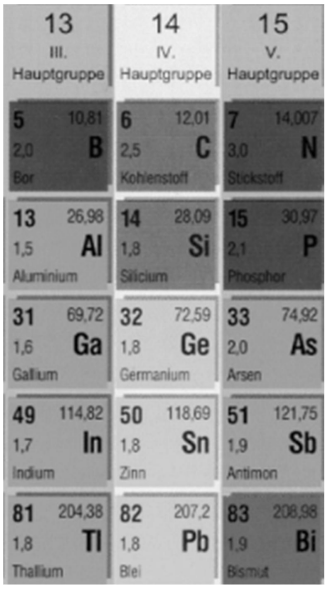
Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	→ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	→ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Fortsetzung auf Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\begin{aligned}
\exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\
\exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x(\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \; (a > 0, n = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned}$$