Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
Klausur
04. Oktober 2018

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	9,0	7,0	11,0	10,5	7,0	7,5	52

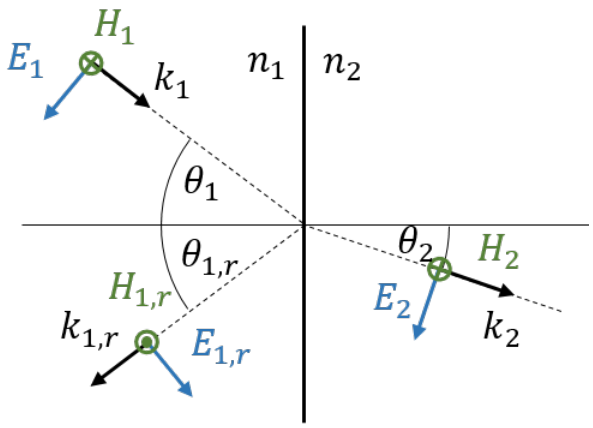
Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Optik [9P]**

Teil 1: Polarisation

a) Eine Welle trifft entsprechend der Abbildung unter dem Winkel θ_1 zum Lot auf eine Grenzfläche und wird unter dem Winkel θ_2 gebrochen. Begründen Sie rechnerisch, ob die Brechung vom optisch dichteren ins optisch dünnere oder vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium stattfindet. [1 P]



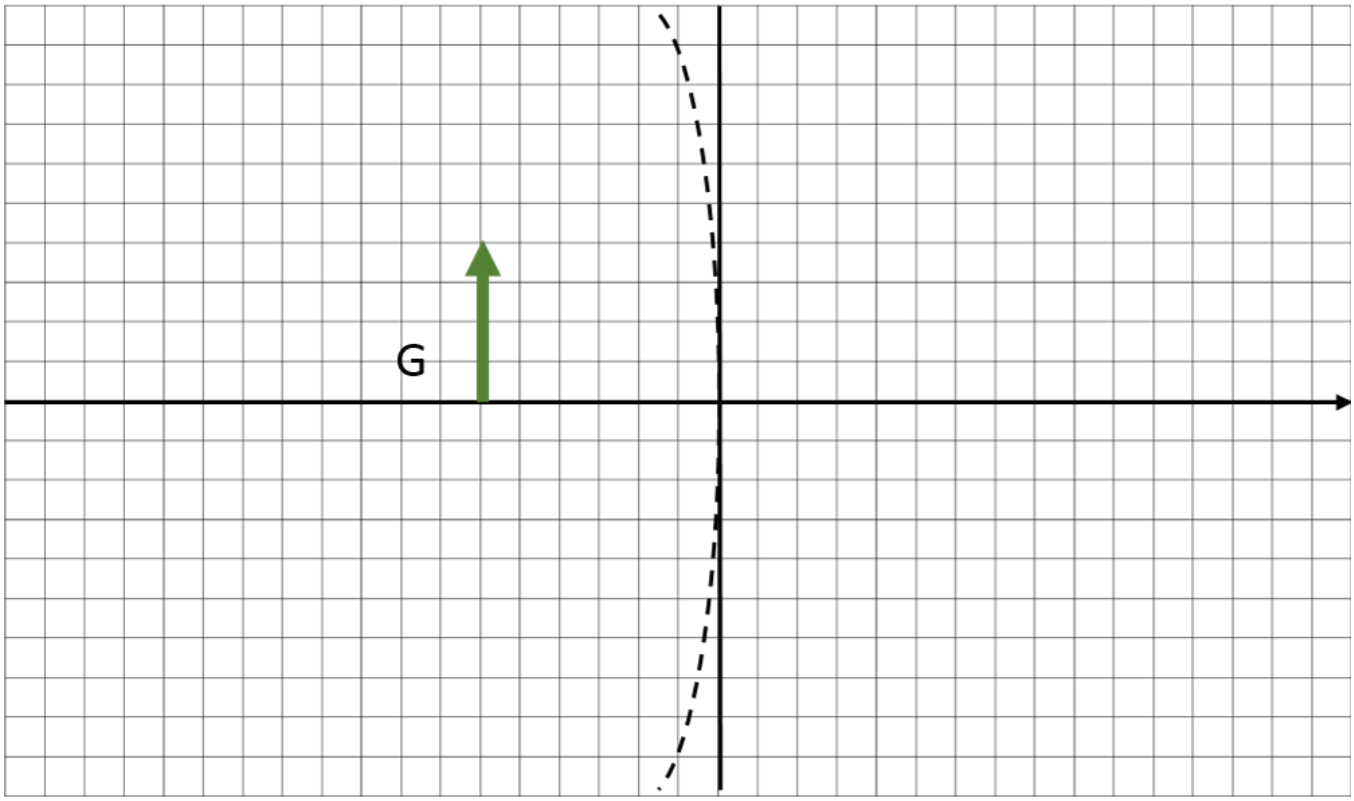
b) Skizzieren Sie qualitativ den Reflexions- und Transmissionsgrad der Welle aus der Abbildung beim Übergang von dem Medium n_1 in das Medium n_2 in Abhängigkeit des Einfallswinkels. (Hinweis: Beachten Sie die Polarisation!) [2 P]

Fortsetzung auf der Rückseite!

Teil 2: Optische Abbildung

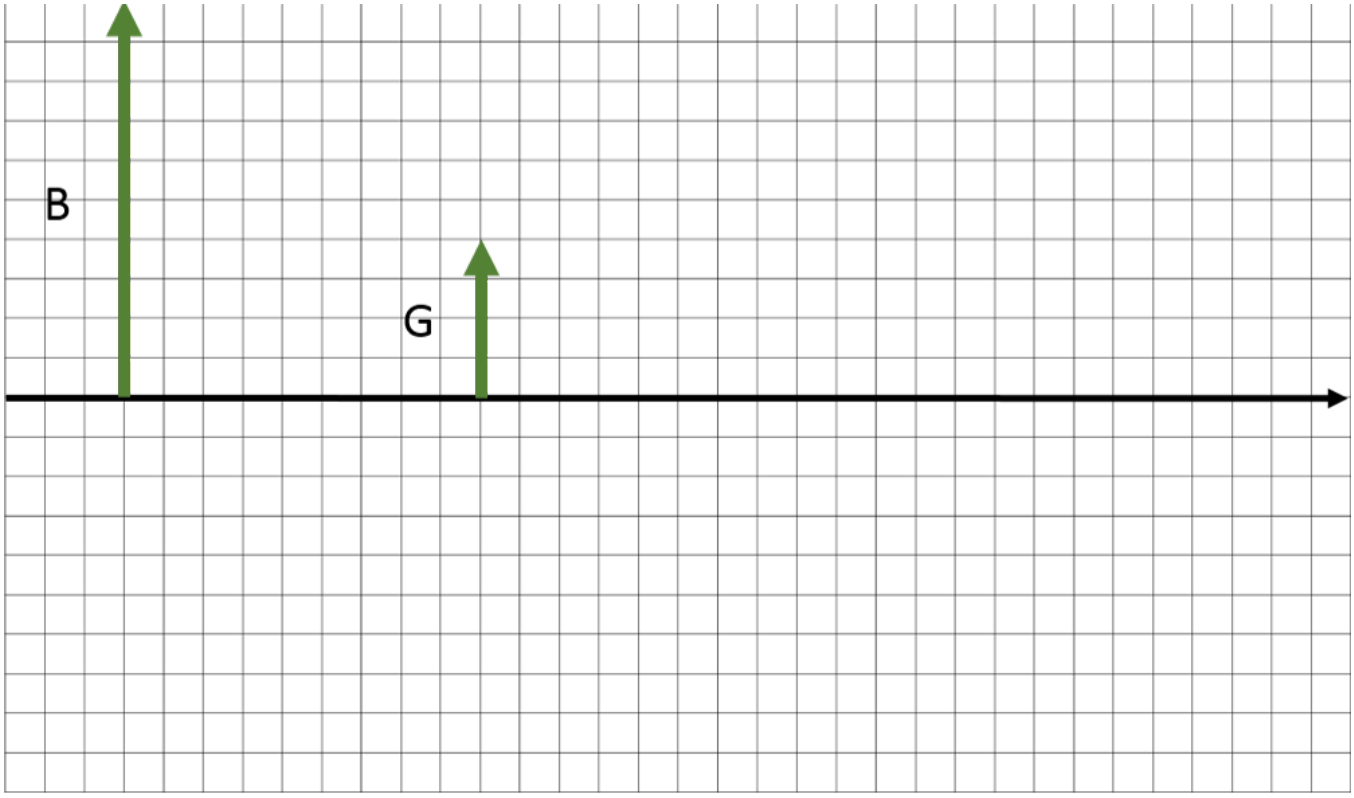
Konstruieren Sie die Strahlengänge maßstabsgetreu (1 Kästchen entspricht 0,5 cm Kantenlänge) und beschriften Sie ihre Zeichnungen. Gehen Sie dabei von der paraxialen Näherung aus. Werte zur weiteren Berechnung können, wenn möglich, auch den Zeichnungen entnommen werden. Das optische Element befindet sich jeweils in Luft.

c) Ein Gegenstand G liegt 3 cm linksseitig eines Hohlspiegels mit einem betragsmäßigen Radius von 14 cm. Konstruieren Sie den Strahlengang und geben Sie die Brennweite an. [1,5 P]



Fortsetzung auf der nächsten Seite!

d) Bei Betrachtung eines Gegenstandes G durch eine dünne Linse entsteht ein 2,5fach vergrößertes, virtuelles Bild B. Bild und Gegenstand liegen 4,5 cm auseinander. Konstruieren Sie den Strahlengang und berechnen Sie die Radien der Linse im Bezug zur Ausbreitungsrichtung, wenn die Linse aus einem Material mit $n_{Linse} = 1{,}7$ gefertigt wurde und $R_1 = -R_2$ gilt. Die Brennweite kann der Zeichnung entnommen werden. [2 P]



Fortsetzung auf der Rückseite!

e) Ein Gegenstand G wird durch eine plankonkave, dünne Linse, mit einem Brechungsindex von n_{Linse} = 1,7 und einem geschliffenen Radius von $|R|$ = 2,1 cm abgebildet. Berechnen Sie die Brennweite und konstruieren Sie den Strahlengang für einen Gegenstand der sich 6 cm linksseitig der Linse befindet. [1,5 P]

f) Erklären Sie die chromatische Aberration bei einer Linse und geben Sie eine technische Lösungsmöglichkeit an! [1P]

2. **Grundlagen der Quantenmechanik [7P]**

a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme! [1P]

b) Die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch $\psi(x,0) = Ne^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ gegeben. Bestimmen Sie die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(x,0)$. Verwenden Sie anschließend die allgemeine Normierungsbedingung, um den Normierungsfaktor N zu bestimmen. Hinweis: Beachten Sie die Formelsammlung am Ende der Klausur! [2P]

c) Physikalische Messgrößen werden in der Quantenmechanik durch Operatoren $\hat{A}$ beschrieben. Wie lautet der formale Zusammenhang für den Erwartungswert $\langle A \rangle$, welcher sich bei oftmaliger Messung der Größe A an einem quantenmechanischen System ergibt? Wie ist der Operater $\hat{p}$ definiert, welcher dem Impuls p zugeordnet wird? [1P]

d) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

e) Welche Wellenlänge kann man einem Elektron zuordnen, das durch eine Spannung von 1 V beschleunigt wurde? [1P]

f) Gehen Sie davon aus, dass die Energie dieses Elektrons genau bestimmt ist. Was lässt sich über den Ort des Elektrons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

3. **Potentialtopf und stückweise stetiges Potential [11P]**

a) Skizzieren Sie einen endlichen Potentialtopf der Höhe V_0 und Breite L für Elektronen (im Topf sei $V = 0$ und außerhalb $V = V_0 > 0$)! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! Zeichnen Sie zusätzlich die Wellenfunktionen (Realteil) von zwei Eigenfunktionen mit Energien $W > V_0$ und die Wellenfunktionen (Realteil) von drei Eigenfunktionen mit den niedrigsten Energien $W < V_0$! [2P]

b) Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W > V_0$ und $W < V_0$? [1P]

Betrachten Sie im Folgenden für die Teilaufgaben c)-g) das Potential $V(x)$, in das eine ebene Welle von links einläuft:

$$V(x) = \begin{cases} +\frac{V_0}{2} & \text{für } x < L \text{ (Bereich 1)} \\ V_0 & \text{für } L \leq x < 2L \text{ (Bereich 2)} \\ 0 & \text{für } 2L \leq x < 3L \text{ (Bereich 3)} \\ +\infty & \text{für } x \geq 3L \text{ (Bereich 4)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $L > 0$.

c) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [1P]

d) Stellen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die Wellenfunktionen $\psi_i(x)$ in jedem Bereich ($i = 1,2,3,4$) auf und geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! [2P]

Die von links einlaufende ebene Welle habe die Energie $W = \frac{3}{4}V_0$.

e) Geben Sie die Wellenzahlen k_i ($i = 1, 2, 3$) in den Bereichen 1 bis 3 an! Worin besteht der wesentliche Unterschied zwischen der Wellenfunktion $\psi_2(x)$ im Bereich 2 gegenüber den Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ im Bereich 1 und $\psi_3(x)$ im Bereich 3? [2P]

Fortsetzung auf der Rückseite!

f) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_{\mathrm{i}}(x)|^2$ in allen Bereichen (i = 1,2,3,4) in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a)! Geben Sie dabei eine gestrichelte Linie vor, die $|\psi_{\mathrm{i}}(x)|^2 = 0$ markiert, und achten Sie auf die Randbedingungen! [2,5P]

g) Welcher quantenmechanische Effekt tritt in Bereich 2 (also beim Übergang von Bereich 1 nach 3) auf? [0,5P]

4. **Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilung [10,5P]**

a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff Zustandsdichte versteht! [1P]

b) In Abbildung 1 sind vier Halbleiterstrukturen unterschiedlicher Dimensionalität abgebildet. Ein Volumen-Halbleiter (3-dimensional), ein Quantentopf (2-dimensional), ein Quantendraht (1-dimensional) und ein Quantenpunkt (0-dimensional). Die zu den Strukturen gehörigen Zustandsdichten $g(W)$ sind in Abbildung 2 a)-d) dargestellt. Ordnen Sie die Zustandsdichten a)-d) aus Abbildung 2 den jeweiligen Strukturen in Abbildung 1 zu! Nutzen Sie für eine eindeutige Zuordnung die Kästchen unter den Strukturen in Abbildung 1! [1,5P]

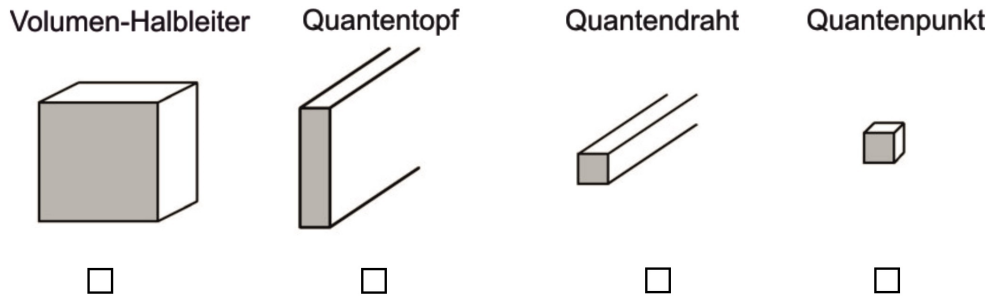


Abbildung 1: Quantenstrukturen vier verschiedener Halbleiterstrukturen.

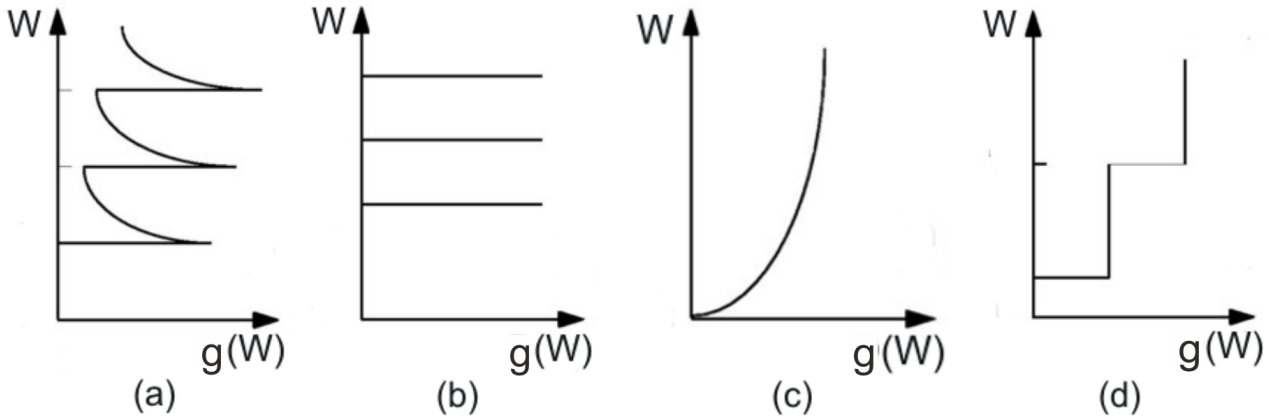


Abbildung 2: Zustandsdichten $g(W)$ vier verschiedener Halbleiterstrukturen.

Fortsetzung auf der Rückseite!

c) Die Fermi-Dirac-Verteilung gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit $f(W,T)$ ein quantenmechanischer Zustand der Energie W bei der Temperatur T besetzt ist. Skizzieren Sie diese Verteilung $f(W,T)$ in Abhängigkeit der Energie W für eine Temperatur $T > 0$ K sowie für $T = 0$ K. Erläutern Sie hierbei die Bedeutung der Fermienergie! Unter welcher Vorraussetzung können Sie die Boltzmann-Verteilung anstelle der Fermi-Dirac-Verteilung anwenden? Achten Sie bei der Skizze auf eine Beschriftung der Achsen. [2P]

d) Leiten Sie die Zustandsdichte $g_{1\mathrm{D}}(W)$ für einen **eindimensionalen** Quantendraht her! Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. [2,5P]

e) Betrachten Sie nun ein 2D-Materialsystem! Das Leitungsband sei durch die untere Bandkante bei der Energie $W_\mathrm{C} = 2{,}25$ eV begrenzt. Wie viele Zustände N sind bei Raumtemperatur auf einer quadratischen Kristallfläche der Kantenlänge $L = 10$ cm im Leitungsband besetzt, wenn das Fermi-Niveau bei der Energie $W_\mathrm{F} = 2$ eV liegt? Dabei sei die Boltzmann-Näherung gültig. Verwenden Sie die Masse des freien Elektrons! (Hinweis: Die flächennormierte zweidimensionale Zustandsdichte ist $g(W)_{2\mathrm{D}} = \frac{m}{\hbar^2\pi}$!) [2P]

f) Wir gehen nun von einem intrinsischen **dreidimensionalen** Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur aus. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 3: [1,5P]

- Energieabhängige Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$
- Energieabhängige Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
- Energieabhängige Ladungsträgerdichte $\tilde{n}(W)$ und $\tilde{p}(W)$

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

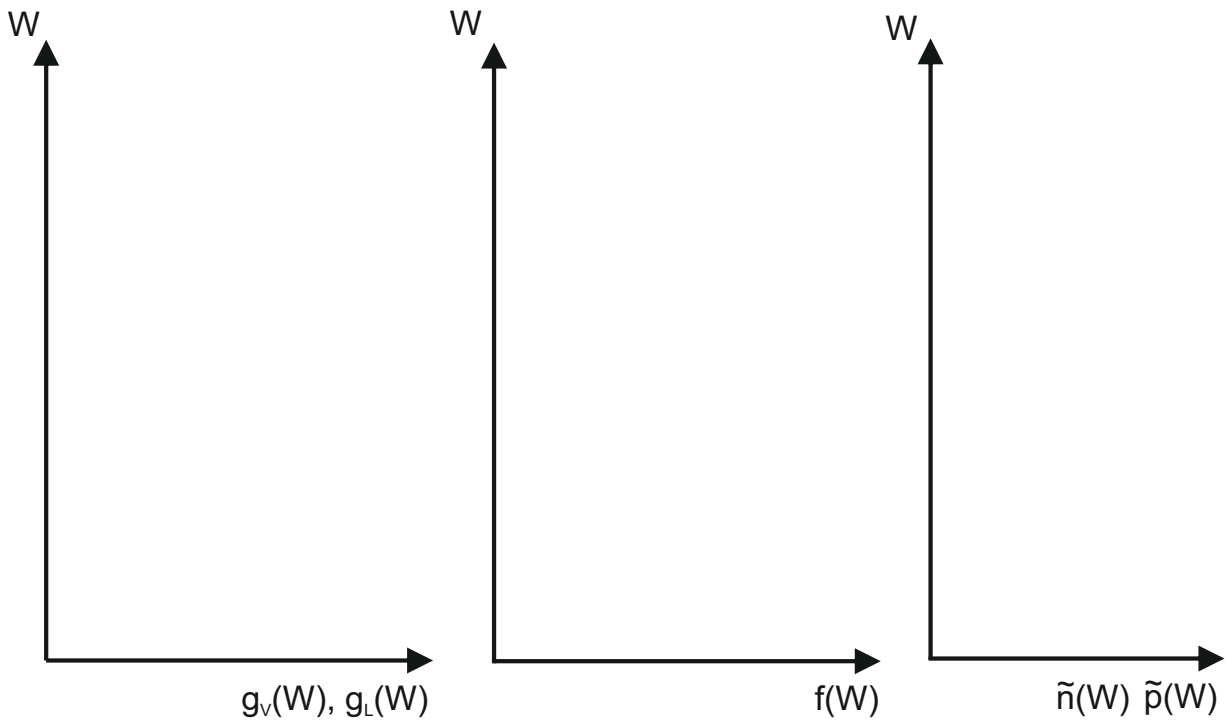


Abbildung 3: Koordinatensysteme für Aufgabe 4f)

5. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht [7P]**

a) Geben Sie die Gleichung an, mit der Sie die Entwicklung der Lochdichte p in Abhängigkeit der verschiedenen Beiträge in Abbildung 4 berechnen können! Beschreiben Sie zusätzlich die Bedeutung der einzelnen Terme! [1,5P]

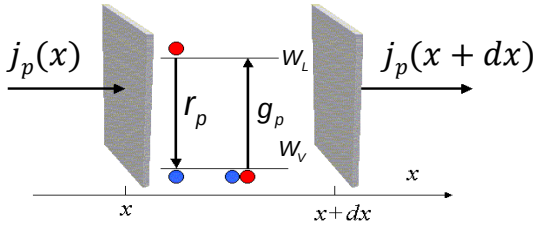


Abbildung 4

b) Geben sie die allgemeinen formalen Zusammenhänge für Drift- und Diffusionsströme in drei Dimensionen an und beschreiben Sie jeweils deren Ursache! [2P]

Betrachten Sie für die folgenden Aufgabenteile c), d) und e) einen stark n-dotierten Halbleiter (mit Donatorenkonzentration n_D) bei Raumtemperatur. Der Halbleiter wird konstant beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektron-Lochpaare ($\hat{=}$ Überschussladungsträgerdichte $\Delta p \ll n_\mathrm{D}$) räumlich homogen mit der Generationsrate g_p erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_\mathrm{p} = \Delta p/\tau_\mathrm{p}$ an, wobei τ_p die Lebensdauer der Löcher ist. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt.

c) Leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp einen Ausdruck für Δp in Abhängigkeit von g_p und τ_p ab! Beachten Sie hierbei die Annahmen aus der Aufgabenstellung! [1P]

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Beleuchtung des Halbleiters schlagartig abgeschaltet.

d) Leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp eine Differentialgleichung für $\Delta p(t)$ für $t > 0$ her! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

e) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ für $t > 0$. Geben Sie hierfür den mathematischen Lösungsansatz für $\Delta p(t)$ an, der die vereinfachte Kontinuitätsgleichung aus dem Aufgabenteil d) löst und bestimmen Sie die Koeffizienten. (Hinweis: Beachten Sie die Randbedingung für $\Delta p(t = 0)$ aus dem Aufgabenteil c)!) [1,5P]

6. **pn-Übergang [7,5P]**

a) Was versteht man unter einer Raumladungszone? Erklären Sie zudem stichwortartig Ihre Entstehung in einem pn-Übergang unter Berücksichtigung der wesentlichen Effekte! [2P]

b) Zeichnen Sie das Bandiagramm für einen p-Halbleiter und einen n-Halbleiter für den Fall, dass sich die Halbleiter [1P]

- nicht im Kontakt befinden.
- im Kontakt befinden.

c) Es wird nun eine äußere Vorspannung U an eine Diode angelegt. Wie muss die Diode kontaktiert werden um sie in Durchlassrichtung zu betreiben? Wie muss die Kontaktierung für den Betrieb in Sperrichtung sein? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie die Banddiagramme für beide Fälle. [3P]

d) Skizzieren Sie die ideale U-I-Kennlinie einer pn-Diode. Welcher Strom I fließt bei $T = 300\,\mathrm{K}$ durch das Bauteil bei einer angelegten Spannung von $0{,}6\,\mathrm{V}$. Der Sperrstrom der Diode beträgt $1\,\mathrm{pA}$. [1,5P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	=	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	=	$\frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	=	$6{,}02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	=	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	=	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	=	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	=	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	=	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	=	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	=	$3{,}0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	=	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	=	3,14	
Euler'sche Zahl	e	=	2,72	
Imaginäre Einheit	j	=	$\sqrt{-1}$	

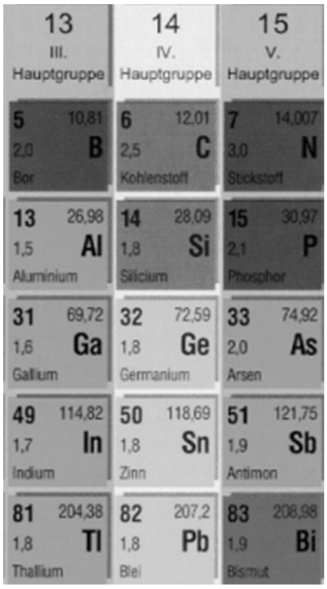
Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	→ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	→ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Fortsetzung auf Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\begin{aligned}
\exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\
\exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x(\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \; (a > 0, n = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned}$$