

Lichttechnisches Institut

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

**Institut für Angewandte Materialien -
Elektrochemische Technologien**

Prof. Dr.-Ing. Ulrike Krewer
Adenauerring 20b
76131 Karlsruhe

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	8,5	6,5	9,5	8	8	47,5

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 47,5, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 23,5.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift und kein Rotstift!).

Fortsetzung auf der Rückseite!

-
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
 - Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
 - Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
 - Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
 - Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Grundlagen der Festkörperelektronik [7P]**Teil I**

- a) Ein dünner Halbleiterkristall wird mit unterschiedlichen monochromatischen Strahlungen bestrahlt. Bei Wellenlängen λ oberhalb von 370 nm wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke des Halbleiters? [1P]

Die Bandlücke W_G des Halbleiters lässt sich mithilfe der Energie der eingestrahnten Photonen bei der angegebenen Grenzwellenlänge 370 nm abschätzen:

$$W_G = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{370 \text{ nm}} = 5,38 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,36 \text{ eV}$$

- b) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer Energie von $W = 5 \text{ keV}$ verwendet. Berechnen sie die entsprechende de-Broglie Wellenlänge der Elektronen. Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [1P]

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e W}} = 1,73 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Teil II

- c) Die Wellenfunktion zur Beschreibung eines quantenmechanischen Teilchens darf komplexe Werte annehmen. Steht das im Widerspruch zu der physikalischen Tatsache, dass in der Natur nur reelle Messgrößen beobachtet werden können? (Begründung!) [1P]

Nein, denn die Wellenfunktion ist in der Natur nicht beobachtbar. Beobachtet werden kann nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, also das Quadrat der Wellenfunktion. Das Quadrat einer komplexen Größe ist aber immer reell.

-
- d) Am Large Hadron Collider (LHC) werden Protonen bis auf 99,999999 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Diese Protonen werden am vorgeschalteten Linearbeschleuniger mit einer kinetischen Energie von 50 MeV mit einer Ungenauigkeit von $\pm 1 \text{ keV}$ erzeugt und in den LHC-Ring geschossen. Schätzen Sie ab, wie genau Sie den Ort des Protons beim Austritt aus dem Linearbeschleuniger bestimmen können? (Hinweis: Aus der Fehlerfortpflanzung folgt $\Delta p = \frac{\partial p(W)}{\partial W} \Delta W$) [2P]

Formel für den Impuls:

$$p = \sqrt{2mW}$$

Ableitung nach Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta p = \frac{\partial p(W)}{\partial W} \Delta W = \sqrt{\frac{m_P}{2W}} \Delta W$$

$$\Delta p = 3,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Einsetzen in Unschärferelation:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 1,61 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Teil III

- e) Leiten Sie die Dispersionsrelation für freie Elektronen aus der Schrödingergleichung her. [2P]

Schrödingergleichung:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right) \psi(x,t)$$

Ansatz:

$$\psi(x,t) = A \cdot e^{j(kx - \omega t)}$$

$$V(x,t) = 0$$

Führt zu:

$$\begin{aligned} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \cdot A \cdot e^{j(kx - \omega t)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot A \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ j\hbar \cdot (-j\omega) \cdot A \cdot e^{j(kx - \omega t)} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (-k^2) \cdot A \cdot e^{j(kx - \omega t)} \\ j\hbar \cdot (-j\omega) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (-k^2) \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

2. Elektronen in Potentialen [8,5P]

Teil I

Ein dünner Halbleiterfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Halbleiterfilm. Das Potential kann als Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden. Die Schichten seien in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt $W_1 = 14,93 \text{ meV}$. Zeigen sie, dass der Halbleiter 5 nm dick ist. Geben sie die Formel in der Form $L(W)$ an! [1,5P]
(Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)

Die Energieeigenwerte $W_n(x)$ im unendlichen Potentialtopf ergeben sich zu:

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

Umstellen nach L und für $n = 1$ folgt:

$$L = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2mW_1}} = 5 \text{ nm}$$

- b) Das Elektron soll durch Licht in den 42. angeregten Zustand angeregt werden. Berechnen sie die Wellenlänge λ_{ph} der Photonen. In welchem spektralen Bereich sind diese einzuordnen (ultraviolettes, sichtbares, infrarotes Spektrum) [1,5P]

Das Photon hat eine Energie von ($n=42 - n=1$)

$$W_{ph} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - 14,93 \text{ meV} = 27,59 \text{ eV}$$

$$\lambda_{Photon} = h\nu = h \frac{c}{W_{Photon}} = 44,996 \text{ nm}$$

Die Wellenlänge ist dem UV-Bereich zuzuordnen

- c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ des Grundzustandes und des **zweiten angeregten Zustandes** und geben Sie die normierten Wellenfunktionen an. [1,5P]

Die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ sind

$$\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

mit der Normierung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{A^2 L}{2}$$

folgt $A_n = \sqrt{2/L}$ und damit

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{1\pi}{L}x\right)$$

$$\Psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

(Angabe der Wellenfunktionen reichte aus.)

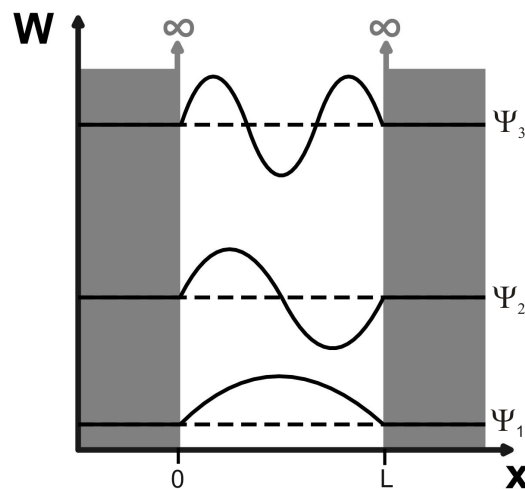


Abbildung 1: Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ für $n = 1, 2, 3$. Gefragt war nach $\Psi_1(x)$ und $\Psi_3(x)$.

- d) Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen x , y und z qualitativ? [1P]

Die Wellenfunktionen in x -Richtung sind diskret, während sie in y - und z -Richtung wegen der unendlichen Ausdehnung der Schichten kontinuierlich sind.

- e) Die unendlichen Potentiale werden durch endliche Potentiale ausgetauscht. Zusätzlich werden nach der ersten Halbleiterschicht an der Stelle L ein weiterer Isolator der Dicke d und eine weitere Halbleiterschicht der Dicke L eingebracht. Abschließend

folgt wieder der unendlich ausgedehnte Isolator. Die Dicke d des Isolators zwischen den beiden Halbleiterschichten wird auf wenige nm begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke d des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in x -Richtung und die Grundzustands-Wellenfunktion der Elektronen. [1,5P]

Ein realer Isolator führt zu einem endlich hohen Potentialtopf. Dadurch reichen die Wellenfunktionen in die Isolatorschichten hinein. Wird die Überlappung der Wellenfunktionen der Elektronen in den Halbleiterfilmen bei kleinen Isolatorschichtdicken d groß, können Elektronen die Barriere „durchtunneln“. Die Wellenfunktionen der Elektronen der einzelnen Halbleiterfilme können nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden, sondern sind gekoppelt bzw. spalten sich auf.

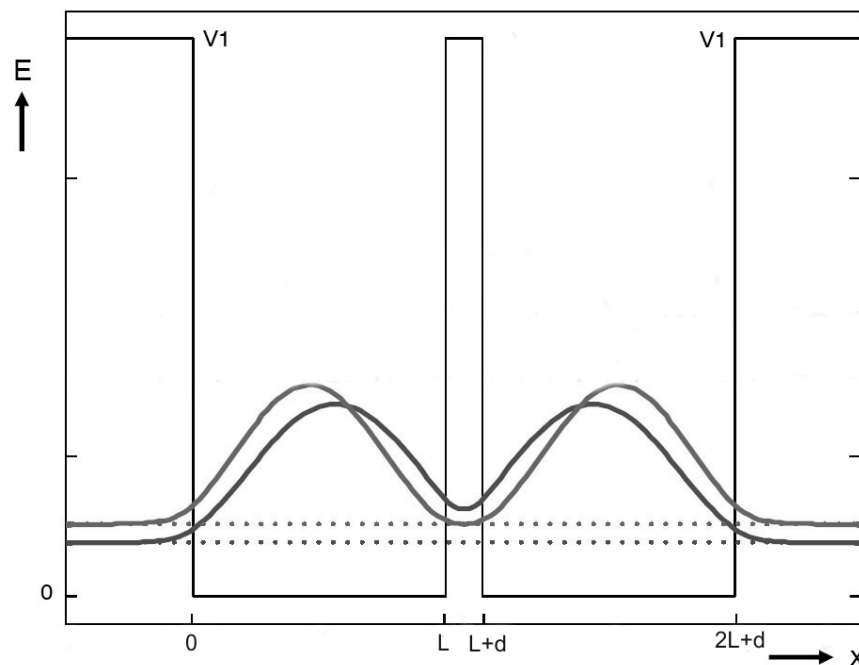


Abbildung 2: Der Grundzustand der Elektronen der gekoppelten Potentialtöpfe dringt in die Barriere ein und führt zu einer Aufspaltung des Grundzustandes bei sehr geringen Schichtdicken d . (Aufspaltung für Skizze nicht unbedingt nötig, aber nicht verschwindende Wellenfunktion in den Barrieren muss deutlich sichtbar sein.)

Teil II

Folgendes Potential $V(x)$ sei gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ V_0 & : 0 \leq x \end{cases} \quad \text{mit } V_0 = 6 \text{ eV}$$

- f) Betrachten Sie ein von links ($x < 0$) einlaufendes Elektron mit dem Impuls $p = 1,48 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Energie des Elektrons in Elektronenvolt

und zeichnen Sie entsprechend den Potentialverlauf mit der sich ausbreitenden Elektronenwelle in den Bereichen $x < 0$ und $0 \leq x$. Wie ändert sich der Impuls an der Stelle $x = 0$ qualitativ? [1,5P]

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1,48 \cdot 10^{-24})^2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6} eV = 7,5 eV \quad (1)$$

Der Impuls des Elektrons wird kleiner.

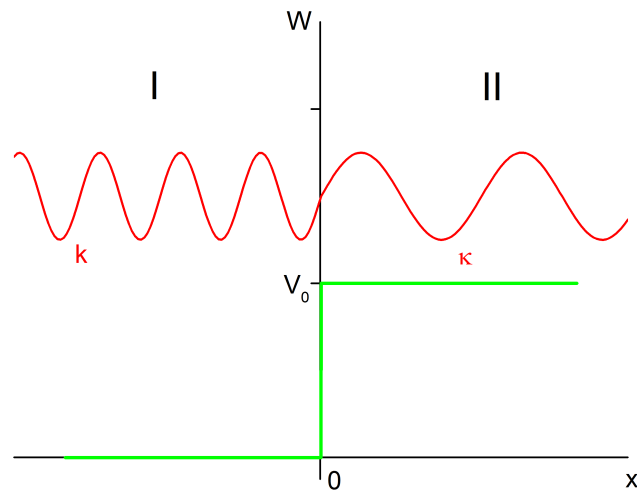
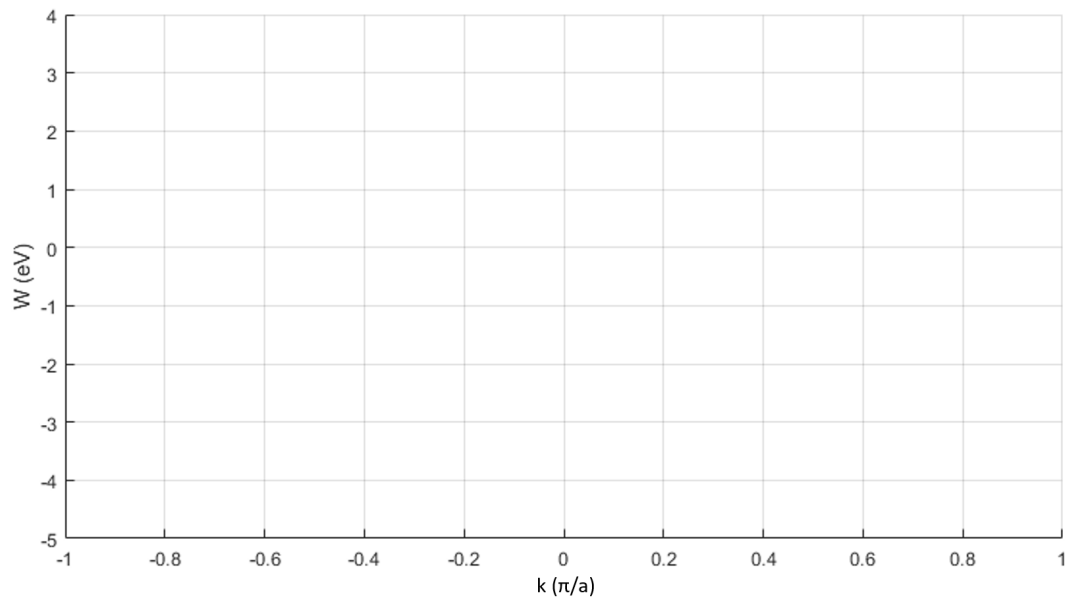
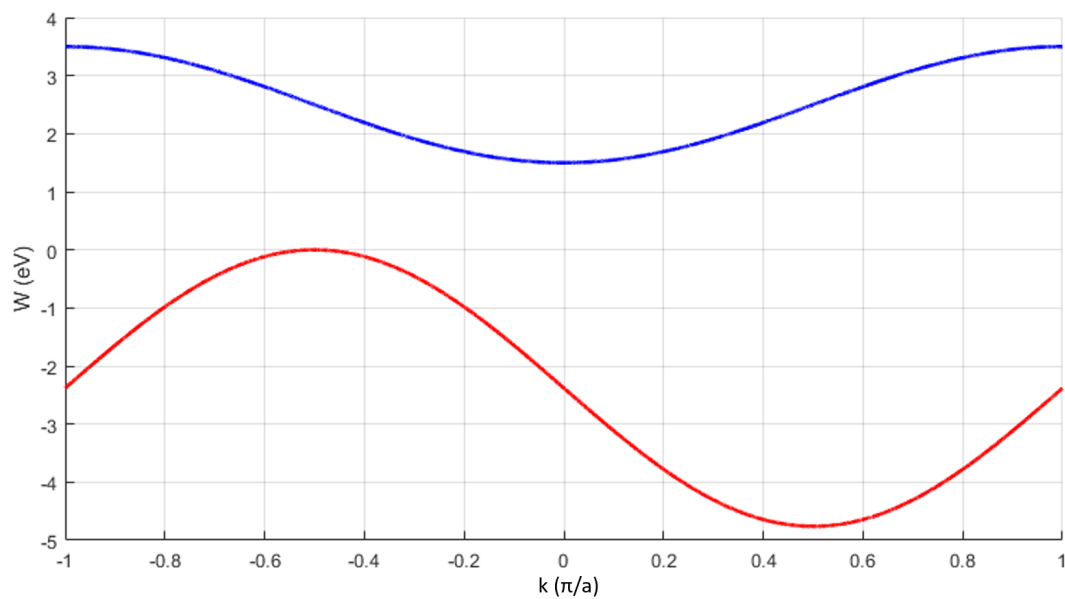


Abbildung 3: Potentialstufe mit Teilchenwelle

3. Kristalle [6,5P]

Das Leitungsband eines Halbleiters lässt sich im k -Raum im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X -Punkt) näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = W_0(2,5 - \cos(ka))$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2,38 \cdot W_0(1 + \cos(ka - \frac{\pi}{2}))$ beschrieben. W_0 sei 1 eV.

- a) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in das bereitgestellte Diagramm in Abbildung 4! [1P]

Abbildung 4: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$ Abbildung 5: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

b) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Begründen Sie! [1P]

Es handelt sich um einen indirekten Halbleiter. Minimum des Leitungsbandes und Maximum des Valenzbandes liegen beim unterschiedlichen k -Werten.

c) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1,5P]

Die Werte für $\frac{ka}{\pi}$ können aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Leitungsbandkante ist bei $k = 0 \cdot \frac{\pi}{a}$:

$$\begin{aligned} W_{LBK} &= W_L(0) = W_0(2,5 - \cos(0)) \\ &= W_0(2,5 - 1) = 1,5W_0 (= 1,5eV) \end{aligned}$$

Valenzbandkante bei $k = -0,5 \cdot \frac{\pi}{a}$:

$$\begin{aligned} W_{VBK} &= W_V(-0,5\pi) = -2,38W_0(1 + \cos(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})) \\ &= -2,38W_0(1 - 1) = -2,38 \cdot 0 \cdot W_0 (= 0eV) \end{aligned}$$

Bandlücke:

$$W_{BL} = W_{LBK} - W_{VBK} = W_0(1,5 - 0) = 1,5 \cdot W_0$$

- d) Bestimmen Sie die effektive Masse m_{eff} eines Elektrons im Leitungsbandminimum für eine Gitterkonstante von $a = 0,5nm$ und $W_0 = 1eV$! [1,5P]

$$\begin{aligned} W_L(k) &= W_0(2,5 - \cos(ka)) \\ \frac{\partial W}{\partial k} &= aW_0 \sin(ka) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= a^2W_0 \cos(ka) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (m_{eff})^{-1} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = \frac{a^2 W_0}{\hbar^2} \cos(ka) \\ \Rightarrow m_{eff} &= 2,77 \cdot 10^{-31} kg \end{aligned}$$

- e) Die Besetzungswahrscheinlichkeit von Zuständen in Halbleitern wird über die Fermi-Dirac Verteilung beschrieben. Geben Sie die Formel $f(W,T)$ an und skizzieren Sie den Graphen in Abbildung 6 für die Temperaturen $T_1 = 500K$ und $T_2 = 300K$. Identifizieren Sie die Kurven eindeutig! [1P]

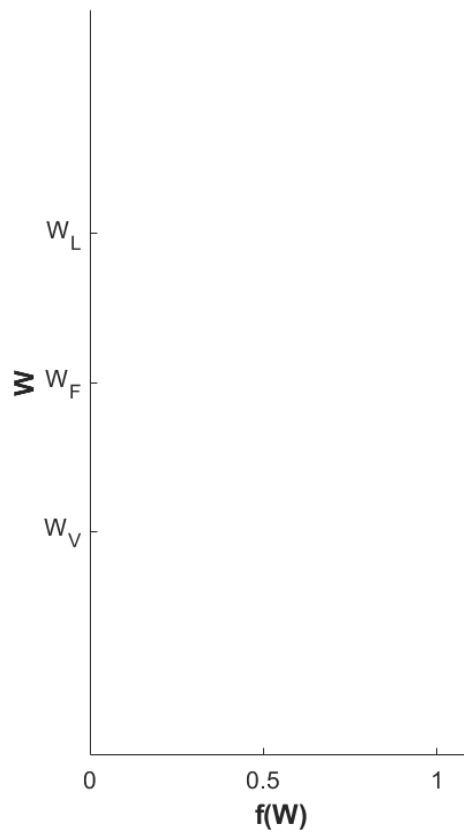


Abbildung 6: Die Fermi-Dirac Funktion

Die Fermi-Dirac-Verteilung ist durch die folgende Formel $f(W,T)$ gegeben:

$$f(W,T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W-W_F}{k_B T}\right)}$$

Der Graph für $T_1 = 500K$ und $T_2 = 300K$ ist in Abbildung 7 dargestellt.

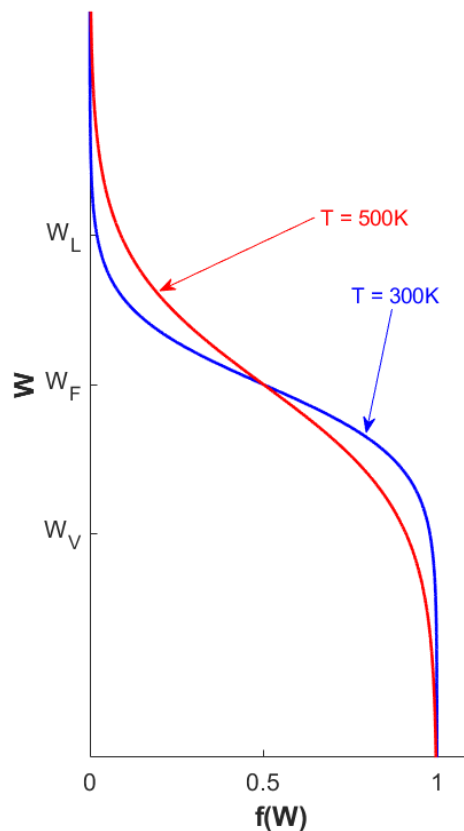


Abbildung 7: Die Fermi-Dirac Funktion für $T_1 = 500K$ und $T_2 = 300K$

- f) Betrachten wir nun einen intrinsischen Halbleiter für eine Temperatur $T = 0K$. Welche intrinsische Ladungsträgerdichte n_i findet sich im Leitungsband? [0,5P]

Bei einer Temperatur von $T = 0K$ sind im intrinsischen Halbleiter alle Elektronen im Valenzband eingefroren. Im Leitungsband finden sich keine freien Ladungsträger und die intrinsische Ladungsträgerdichte ist daher 0. Erst für $T > 0K$ gilt durch die thermische Energie im Material $n_i > 0$.

4. Dotierte Halbleiter und der pn-Übergang [9,5P]

Teil I - Dotierte Halbleiter

- a) Ein Stück n-dotierter Halbleiter wird einer elektrischen Feldstärke von $E = 1 \frac{V}{m}$ ausgesetzt. Es wird bei Raumtemperatur eine Stromdichte von $j = 1,6 \frac{mA}{cm^2}$ gemessen. Diffusionsströme treten nicht auf. Die Beweglichkeit der Elektronen ist $\mu_n = 2,1 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$, die der Löcher $\mu_p = 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$. Die intrinsische Ladungsträgerdichte ist $n_i = 8,34 \cdot 10^{12} cm^{-3}$. Berechnen Sie die Ladungsträgerdichte der Elektronen, die im Halbleiter vorliegt! (Hinweis: Durch die Dotierung gilt $n_D \gg p$) [1P]

Für die Stromdichte j gilt:

$$j = \sigma \cdot E$$

wobei σ über die Formel

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \approx en_D\mu_n$$

gegeben ist. Da n -dotiert kann der Beitrag der Löcher vernachlässigt werden und die Ladungsträgerdichte entspricht der Dichte der ionisierten Störstellen n_D . Einsetzen in die Formel der Stromdichte und Umformen ergibt.

$$n_D = \frac{j}{e\mu_n E} = \frac{1,6 \frac{mA}{cm^2}}{1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 2,1 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs} \cdot 1 \frac{V}{m}} = 0,1 \cdot 4,76 \cdot 10^{15} \cdot \frac{1}{cm^3} = 4,76 \cdot 10^{14} \frac{1}{cm^3}$$

Teil II - Halbleiter im Nichtgleichgewicht

- a) Ein Halbleiter wird von einer konstanten Lichtquelle bestrahlt. Es tritt eine Dynamik im Halbleiter ein, die über die Kontinuitätsgleichung beschrieben wird. Die Gleichung lautet wie folgt:

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n + e(g_n - r_n)$$

Was beschreiben die Komponenten der Gleichung? Benennen Sie die einzelnen Terme. [1P]

Bedeutung der einzelnen Terme:

$e \frac{\partial n}{\partial t}$: zeitliche Änderung der Ladungsträgerdichte,

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n$: Einfluss durch Ladungsträgerströme,

g_n : Einfluss durch Generationsprozesse,

r_n : Einfluss durch Rekombinationsprozesse.

- b) Die Beleuchtung erzeugt im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L . Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Für die Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ kann $\Delta p \ll n_D$ angenommen werden, wobei n_D die Donatorenkonzentration darstellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Licht schlagartig abgeschaltet. Leiten Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$ her in Abhängigkeit von g_L und τ_p . Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p(t)$ im zeitlichen Verlauf! [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\vec{\nabla}\Delta p = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$:

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_L \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

$t > 0$:

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt $g_L = 0$. Verbleibende Überschussladungsträger Δp rekombinieren mit Majoritätsträgern und ändern sich zeitlich ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = A e^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_L \tau_p$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$ lösen. Damit Δp für $t \rightarrow \infty$ zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_L \tau_p = A e^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_L \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -b g_L \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_L \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_L \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p} d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_L \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln (\Delta p / g_L \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}\end{aligned}$$

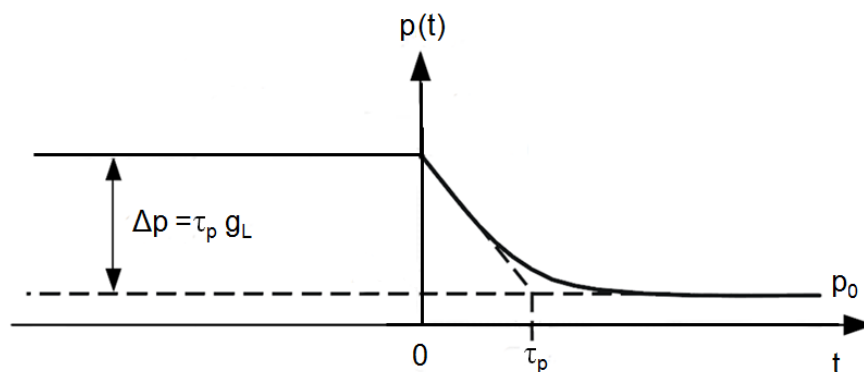


Abbildung 8: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p(t)$.

Teil III - Der pn- Übergang

- a) Ein n-dotierter Halbleiter und ein p-dotierter Halbleiter werden in Kontakt gebracht. Dabei sind die Dotierdichten im jeweiligen Halbleiter gegeben durch die Donatorkonzentration n_D und die Akzeptorkonzentration n_A . Geben Sie eine Formel an, in welcher die Längen der Raumladungszonen l_n und l_p im jeweiligen Gebiet in Verhältnis gesetzt werden zu den Dotierdichten. [0,5P]

Es gilt der formelle Zusammenhang:

$$n_D \cdot l_n = n_A \cdot l_p$$

- b) Zeichnen Sie das Banddiagramm der beiden Halbleiter im Kontakt, für dem Fall dass keine externe Spannung anliegt. Zeichnen Sie das Fermi-Niveau ein! [1P]

Werden p und n-dotierter Halbleiter in Kontakt gebracht, bildet sich die in Abbildung 9 gezeigte Bandstruktur. Das Fermi-Level bleibt konstant zwischen beiden Regionen. Leitungs- und Valenzband verbiegen sich. Es bildet sich die Diffusionsspannung U_D aus.

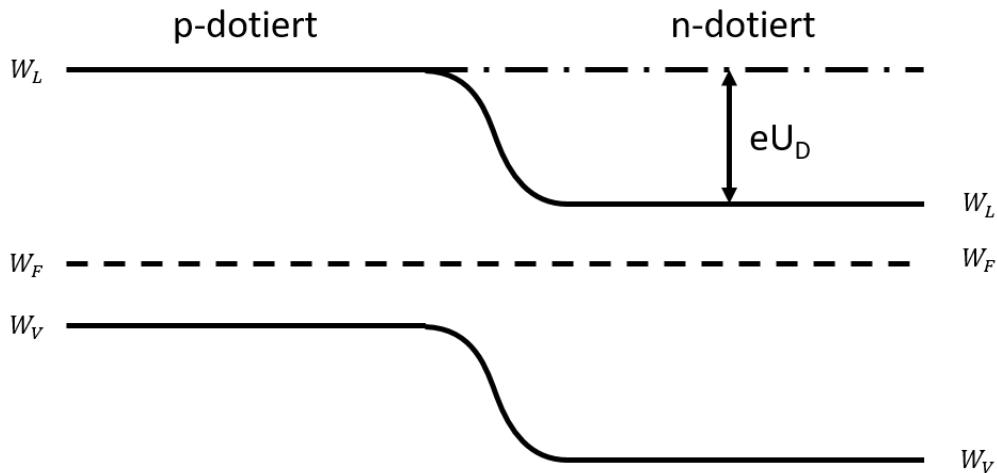


Abbildung 9: Das Bandschema von einem pn-Übergang ohne externer Vorspannung.

- c) Zeichnen Sie nun den pn-Übergang für den Fall, dass eine Spannung $U < U_D$ in Durchlassrichtung angelegt wird. Zeichnen Sie die Fermi-Niveaus ein! Bitte beschriften Sie eingezeichnete Bänder und Energieniveaus. [1P]

Werden ein *n-dotierter* und ein *p-dotierter Halbleiter* in Kontakt gebracht mit einer externen angelegten Spannung in Durchlassrichtung, so bildet sich die in Abbildung 10 gezeigte Bandstruktur. Durch die externe Vorspannung splittet sich das Fermi-Level im Bereich der Raumladungszone in zwei Quasi-Fermi-Niveaus auf für Elektronen und Löcher. Die interne Diffusionspannung U_D wird durch die externe Spannung verringert.

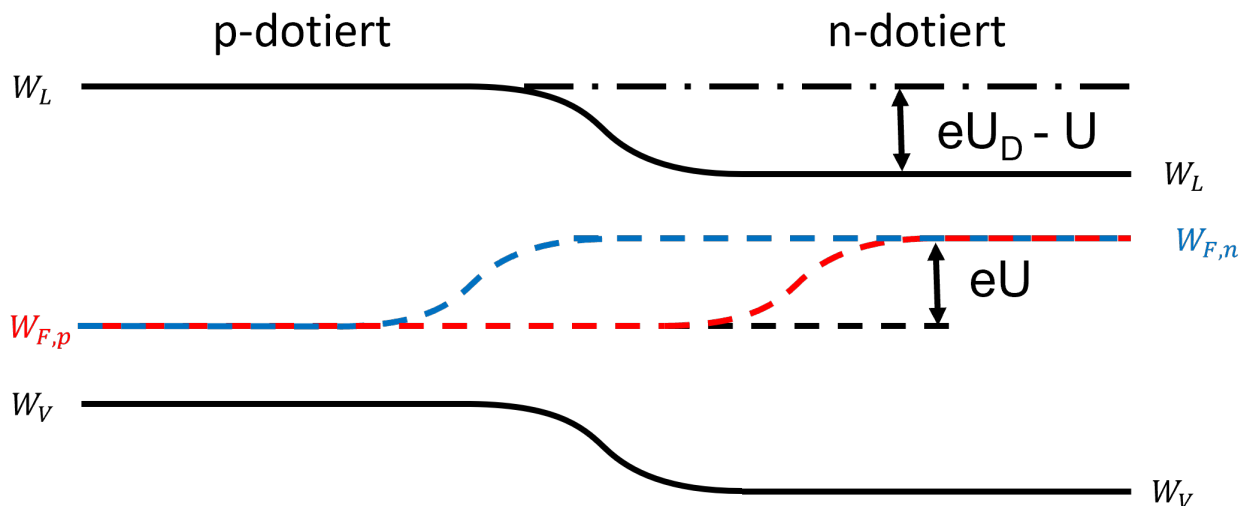


Abbildung 10: Das Bandschema von einem pn-Übergang mit externer Vorspannung in Durchlassrichtung.

5. Dielektrika [8P]

a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie an falls die entsprechende Aussage korrekt ist. [2P]

- ☐ Raumladungspolarisation und Ionenpolarisation weisen im Wechselfeld Resonanzverhalten auf.
- ☐ Richteten sich einzelne Atom im E-Feld räumlich aus, so führt dies zu Orientierungspolarisation.
- ☐ In Edelgasen tritt ausschließlich Elektronenpolarisation auf.
- ☐ Elektronenpolarisation bezeichnet die Auslenkung von Atomkern und -hülle.
- ☐ *Raumladungspolarisation und Ionenpolarisation weisen im Wechselfeld Resonanzverhalten auf.*
- ☐ *Richteten sich einzelne Atom im E-Feld räumlich aus, so führt dies zu Orientierungspolarisation.*
- ☒ *In Edelgasen tritt ausschließlich Elektronenpolarisation auf.*
- ☒ *Elektronenpolarisation bezeichnet die Auslenkung von Atomkern und -hülle.*

b) Zur Bestimmung der Dielektrizitätszahl ε_r einer Polyesterprobe wird die unten dargestellte Schaltung (Sawyer-Tower-Schaltung) realisiert: Zwei baugleiche Plattenkondensatoren werden dazu in Reihe geschaltet. In einen davon wird die Polyesterprobe eingebracht. Der zweite Kondensator dient als Referenz und ist luftleer. Berechnen Sie die Dielektrizitätszahlen ε_r und die elektrischen Suszeptibilitäten χ_e des Dielektrikums für beide angegebenen Temperaturen $T_1 = 25^\circ\text{C}$ und $T_2 = 225^\circ\text{C}$ und tragen Sie diese in Tabelle 1 ein. [2P]

Hinweis: In Tabelle 1 ist die am Referenzkondensator gemessene Spannung U_{Mess} für zwei verschiedene Temperaturen bei einer angelegten Gleichspannung von $U_0 = 6\text{ V}$ gegeben.

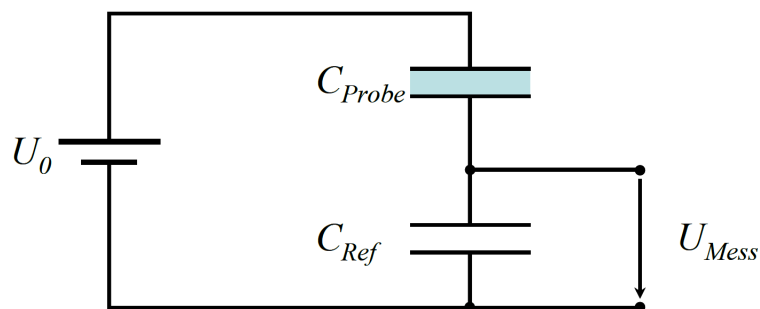


Abbildung 11: Sawyer-Tower-Schaltung

i	$T / ^\circ C$	U_{Mess} / V	$\varepsilon_r / -$	$\chi_e / -$
1	25	4,5		
2	225	4,25		

Tabelle 1: U_{Mess} bei unterschiedlichen Temperaturen.

$$\begin{aligned}
 Q &= C_{\text{Probe}} \cdot (U_0 - U_{\text{Mess}}) = C_{\text{Ref}} \cdot U_{\text{Mess}} \\
 \Rightarrow \varepsilon_{r,1} &= \frac{U_{\text{Mess},1}}{U_0 - U_{\text{Mess},1}} = 3 \\
 \chi_{e,1} &= \varepsilon_{r,1} - 1 = 2 \\
 \Rightarrow \varepsilon_{r,2} &= \frac{U_{\text{Mess},2}}{U_0 - U_{\text{Mess},2}} = 2,43 \\
 \chi_{e,2} &= \varepsilon_{r,2} - 1 = 1,43
 \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie die Suszeptibilitätsanteile der Elektronenpolarisation $\chi_{el,1}$ und der Orientierungspolarisation $\chi_{or,1}$ bei einer Temperatur von $T_1 = 25^\circ \text{C}$ auf Basis der Werte aus der vorangegangenen Teilaufgabe. Für die Berechnung soll die Konzentration der permanenten Dipole im Dielektrikum temperaturunabhängig sein. [2P]

Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität χ_e lässt sich beschreiben mit:

$$\begin{aligned}
 \chi_e(T) &= \chi_{el} + \chi_{or}(T) \\
 (I) \quad \chi_{el,1} &= \chi_{el,2} \\
 (II) \quad \frac{\chi_{or,1}}{\chi_{or,2}} &= \frac{T_2}{T_1} \\
 \Rightarrow \chi_{or,1} &= \frac{T_2}{T_2 - T_1} (\chi_{e,1} - \chi_{e,2})
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte ergibt

$$\begin{aligned}
 \chi_{or,1} &= 1,42 \\
 \chi_{el,1} &= 0,58
 \end{aligned}$$

- d) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild durch welches die Polarisierung aus der vorangegangenen Teilaufgabe beschrieben werden kann. Beschriften Sie die Komponenten. [2P]

Die Beiträge beider Polarisationsmechanismen bestehend aus Widerstand, Kapazität und bei der Elektronenpolarisation mit Induktivität sind parallel geschaltet:

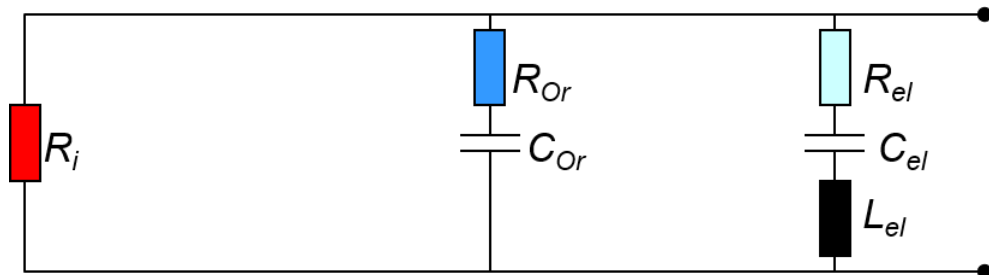


Abbildung 12: Ersatzschaltbild der Elektronen- und Orientierungspolarisation

6. Ionenleitung und Grenzflächen [8P]

- a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie an falls die entsprechende Aussage korrekt ist. [2P]
- ☐ In kristallinen Festkörpern ermöglicht der Vehikel Mechanismus eine höhere Ionenleitfähigkeit.
 - ☐ Bei Raumtemperatur ist die Ionenleitfähigkeit in Festkörpern und Flüssigelektrolyten nahezu gleich.
 - ☐ Polymerelektrolyte bilden Schottky Defekte aus.
 - ☐ In Flüssigelektrolyten sind gelöste Ionen nahezu frei beweglich.
 - ☐ In kristallinen Festkörpern ermöglicht der Vehikel Mechanismus eine höhere Ionenleitfähigkeit.
 - ☐ Bei Raumtemperatur ist die Ionenleitfähigkeit in Festkörpern und Flüssigelektrolyten nahezu gleich.
 - ☐ Polymerelektrolyte bilden Schottky Defekte aus.
 - ☒ In Flüssigelektrolyten sind gelöste Ionen nahezu frei beweglich.
- b) Eine ionenleitende Membran der Dicke $x = 200 \mu\text{m}$ trennt zwei wässrige Elektrolytlösungen in denen H_2SO_4 vollständig dissoziiert in den Konzentrationen 0 mol/L und 1 mol/L vorliegen. Berechnen Sie die Diffusionsstromdichte der Protonen unter der Annahme, dass in der Membran ausschließlich Protonentransport

entlang eines konstanten Konzentrationsgradienten stattfindet. Der Diffusionskoeffizient $D_{H^+} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ sei für $T = 300 \text{ K}$ gegeben. [2P]

Die Gleichung zur Berechnung des Diffusionsstromes wird mit $dc = 2 \cdot (c_{A,H_2SO_4} - c_{B,H_2SO_4})$ und $dx = x$ linearisiert.

$$j_{Diff} = -z F D_{H^+} \frac{2 \cdot (c_{A,H_2SO_4} - c_{B,H_2SO_4})}{x} = 289,4 \text{ A/m}^2 \quad (2)$$

- c) Materialdefekte in kristallinen Festkörpern ermöglichen die Leitung von Sauerstoffionen O^{2-} . Der Diffusionskoeffizient sei für eine Temperatur von $T = 1000 \text{ °C}$ mit $D = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ gegeben. Berechnen Sie die Beweglichkeit der Ionen. [2P]

Für die Berechnung der Beweglichkeit wird die Einstein-Relation verwendet.

$$\mu_{ion} = \frac{e_0 z_{ion}}{k_B T} \cdot D_{ion} = 9,11 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \quad (3)$$

- d) Skizzieren Sie den Verlauf der Stromdichte über dem Überpotential nach der Butler-Volmer Gleichung für eine reversible Redox-Reaktion. Skizzieren Sie zudem die Anteile der Stromdichte aus Oxidation und Reduktion. [2P]

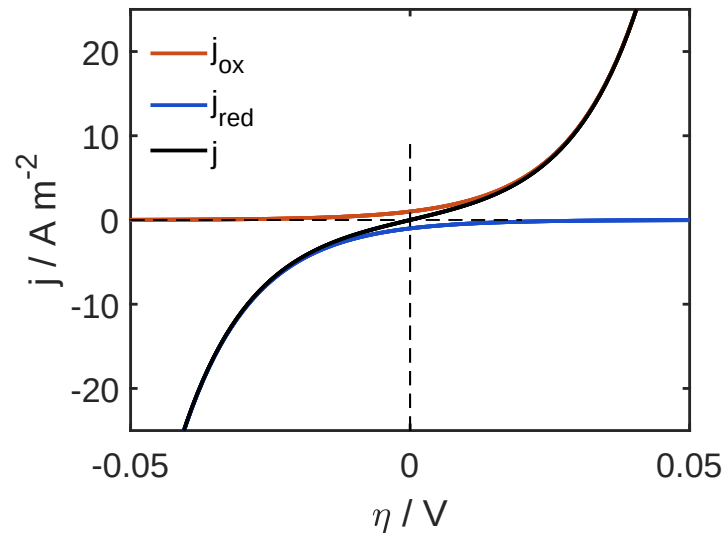


Abbildung 13: Butler-Volmer Stromdichte

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Gaskonstante	R	$=$	8,314	J/(mol K)
Faraday-Konstante	F	$=$	96485	As/mol
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp\{(j k x)\} + \exp\{(-j k x)\} = 2 \cos(k x)$$

$$\exp\{(j k x)\} - \exp\{(-j k x)\} = 2j \sin(k x)$$

$$\int (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int (\cos a x)^2 dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int \sin a x \cos a x dx = \frac{1}{2a} (\sin a x)^2$$

$$\int x (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4a} x \sin 2a x - \frac{1}{8a^2} \cos 2a x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{a x} dx = e^{a x} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-a x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut