

1. Potentialtöpfe

Seien $V_1 > 0$, $L > 0$, $d > 0$ und $L > d$. Betrachten Sie den gekoppelten Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & : |x| > L \\ 0 & : L > |x| > d \\ V_0 & : d > |x| \end{cases}$$

(a) Sei $V_0 = V_1$. Skizzieren Sie das gegebene Potential. Skizzieren Sie zwei eigentliche Zustände eines Elektrons in diesem Potential. [1P]

(b) Ein Elektron der Energie $E_{q1} > V_1$ laufe von links ein. Wie verhält es sich im angegebenen Potentialgebiet? [1P]

Über dem Gebiet mit $V=0$ gewinnt das Elektron Energie, die Wellenlänge verkürzt sich.

(c) Wie verhält sich ein klassisches Elektron mit der Energie $E_{k1} < V_1$ bzw. der Energie $E_{k2} > V_1$? [2P]

Das Elektron mit der Energie $E_{k1} < V_1$ bewegt sich wie ein Ball entweder im linken oder im rechten Topf hin und her.

Das Elektron mit der Energie $E_{k2} > V_1$ bewegt sich über dem Potentialgebiet ohne Einfluß durch das Potential.

(d) Sei nun $V_0 = \infty$. Wie verhält sich nun ein quantenmechanisches Elektron der Energie $E_{q2} < V_1$? Wie verhält sich ein von links einlaufendes Elektron der Energie $E_{q1} > V_1$? (Keine Rechnung nötig!) [2P]

Das Elektron der Energie $E_{q2} < V_1$ dringt nicht in die Barriere zwischen den beiden Töpfen ein, wohingegen es in das Potentialgebiet mit $V = V_1$ eindringen kann.

Das Elektron der Energie $E_{q1} > V_1$ wird am Gebiet $V = \infty$ reflektiert, ohne in die Barriere einzudringen.

- (e) Geben Sie den Wellenvektor \vec{k}_{q1} im Gebiet $|x| > L$ an. [1P]

Aus

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

folgt mit $E = E_{q1} - V_1$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{q1} - V_1)}$$

- (f) Geben Sie den Impulserwartungswert des Elektrons mit der Energie $E_{q2} < V_1$ an und begründen Sie Ihre Antwort! (Keine Rechnung!) [2P]

Da sich das Elektron im Topf mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts bewegt, ist der Impuls-Erwartungswert $\langle \hat{p} \rangle = 0$.

2. Elektronenmikroskopie

In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen auf zu untersuchende Oberflächen beschleunigt. Dabei können Strukturen aufgelöst werden, die in der Größenordnung der Wellenlänge der Elektronen liegen.

Wir legen einen Diamanten in das Mikroskop. Diamant hat eine fcc-Struktur mit einer 2-atomigen Basis und eine Dichte von $3,51 \text{ g cm}^{-3}$. Die atomare Masse von Kohlenstoff ist 12 u.

- (a) Skizzieren Sie ein fcc-Gitter. Nennen Sie zwei weitere Kristall-Gitter. [2P]

...

bcc (body centered cubic) oder krz (kubisch raumzentriert), sc (simple cubic)

- (b) Wie groß ist die Gitterkonstante a von Diamant? [2P]

Diamant hat 8 Atome in der Elementarzelle. Damit ergibt sich eine Masse der Atome der Elementarzelle von:

$$m = 8 \times 12 \text{ u} = 96 \text{ u} = 1,59 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

Aus der Definition der Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ und $V = a^3$ folgt:

$$a = 3,56 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3,56 \text{ \AA}$$

- (c) Welche Energie in Elektronenvolt müssen die Elektronen haben, damit die Elementarzellen von Diamant unter dem Elektronenmikroskop „gesehen“ werden können? [2P]

Es gilt:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda^2} = 1,9 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 12 \text{ eV}$$

3. Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld

Der Hamilton-Operator für einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator im elektrischen Feld F lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + eFx$$

- (a) Geben Sie die Energie-Eigenwerte zu \hat{H} für $F=0$ an. [1P]

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

mit $n = 0, 1, 2 \dots$

- (b) Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte zu \hat{H} für $F \neq 0$ (Hinweis: Quadratische Ergänzung im Ausdruck für das Potential). [4P]

Der Hamilton-Operator für dieses Problem läßt sich geeignet umformen:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + eFx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 + \frac{2eF}{m\omega^2}x \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\underbrace{x + \frac{eF}{m\omega^2}}_{=\bar{x}} \right)^2 - \frac{(eF)^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

Einsetzen des Hamilton-Operators in die Schrödingergleichung liefert:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\bar{x}^2 - \frac{(eF)^2}{2m\omega^2}\right)\psi &= E\psi \\ \left(-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\bar{x}^2\right)\psi &= \underbrace{\left(E + \frac{(eF)^2}{2m\omega^2}\right)}_{\bar{E}}\psi \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die Energie Eigenwerte E_n berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \rightarrow E_n &= \bar{E}_n - \frac{(eF)^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{(eF)^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

4. Überlagerte Zustände

Gegeben seien 2 orthonormierte Zustände ψ_1, ψ_2 . Betrachten Sie den gemischten Zustand $\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$. Bestimmen Sie a_1 und a_2 unter der Voraussetzung, daß der Zustand ψ_2 dreimal so wahrscheinlich besetzt sein soll wie der Zustand ψ_1 , und daß ψ normiert ist. [4P]

Aus der Normierung von ψ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1\psi_1^* + a_2\psi_2^*) \cdot (a_1\psi_1 + a_2\psi_2) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1^2\psi_1^*\psi_1 + a_2^2\psi_2^*\psi_2 + a_1a_2\psi_1^*\psi_2 + a_1a_2\psi_1\psi_2^*) dx \\ &= \underbrace{a_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*\psi_1 dx}_{=1} + \underbrace{a_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^*\psi_2 dx}_{=1} + \underbrace{a_1a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*\psi_2 dx}_{=0} + \underbrace{a_1a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1\psi_2^* dx}_{=0} \\ &= a_1^2 + a_2^2 \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Nun soll gelten:

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{1}{3}$$

Die quadratische Abhängigkeit rührt daher, daß es hier um Wahrscheinlichkeiten geht, die ihrerseits vom Quadrat der Wellenfunktion abhängen.

Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1^2 + 3a_1^2 = 4a_1^2 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

5. Photoeffekt

Betrachten Sie einen mit Kalzium beschichteten Plattenkondensator, der mit einer Spannung von 6 V aufgeladen wurde. Die positiv geladene Platte werde auf der Innenseite mit UV-Licht bestrahlt. Kalzium hat eine Austrittsarbeit $W_a = 2,9 \text{ eV}$. Die Platten haben einen Abstand von 4 cm. Ab welcher Wellenlänge des einfallenden Lichtes kann man einen Strom an einem zwischen den Platten angeschlossenen Amperemeter feststellen? [3P]

Die eingestrahlte Licht-Energie $E = h\nu$ wird zum Losschlagen des Elektrons (Austrittsarbeit W_a) benötigt. Nur wenn $E_{\text{Licht}} > W_a$ werden Elektronen aus dem Festkörper ausgelöst. Die überschüssige Energie wird in kinetische Energie der Elektronen gewandelt. Diese Elektronen müssen nun entgegen dem Potential die andere (negative) Elektrode erreichen. Die kinetische Energie der Elektronen E_{kin} muß dazu größer sein, als die zum Durchkreuzen des Feldes notwendige Energie $E_{\text{Feld}} = eU$. Nur dann wird ein Strom gemessen.

Demnach gilt:

$$E_{\text{Licht}} > W_a + E_{\text{Feld}}$$

$$h\nu > W_a + eU$$

Daraus folgt:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{W_a + eU} = 1,39 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 139 \text{ nm}$$

Der Abstand der Elektroden spielt keine Rolle, solange nur danach gefragt ist, ob überhaupt Elektronen an der anderen Platte ankommen. Wenn nach der Stärke des Stromes gefragt würde, so spielt die einfallende Intensität eine Rolle und damit der Abstand. In die Stromstärke ginge dann auch die Plattengröße ein.

6. Begriffsklärung

Erklären Sie die folgenden Begriffe:

(a) *Driftstrom* [1P]

Ein Strom als Folge eines elektrischen Feldes bzw. einer elektrischen Potentialdifferenz.

(b) *Einkristall* [1P]

Ein Kristall ohne Fehl- oder Störstellen.

(c) *Phonon [1P]*

Eine quantisierte Kristallschwingung

(d) *Fermi-Energie [1P]*

In einem Halbleiter ist die Besetzungswahrscheinlichkeit bei der Fermi-Energie genau $\frac{1}{2}$.

(e) *Pauli-Prinzip [1P]*

Das Pauli-Prinzip besagt, daß zwei Fermionen (z.B. Elektronen) nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen bzw. die gleichen Zustände besetzen können.

7. Ladungsträger im Halbleiter

Betrachten Sie einen Silizium-Kristall (Si). In Silizium sind bei Raumtemperatur etwa $1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ Elektronen im Leitungsband. Die effektive Masse der Löcher betrage $m_h^* = 0,49 \cdot m_0$ und die effektive Masse der Elektronen $m_e^* = 0,19 \cdot m_0$. m_0 sei die Masse des freien Elektrons.

(a) *Berechnen Sie die Bandlücke von Si in Elektronenvolt bei Raumtemperatur. [3P]*

Aus dem Massenwirkungsgesetz

$$n_i = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

folgt

$$\begin{aligned} E_g &= -k_B T \frac{\ln n_i}{\ln (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 1,006 \text{ eV} \end{aligned}$$

(b) *Wie verändert sich die Elektronenkonzentration im Leitungsband, wenn die Temperatur sukzessive auf $T = 0 \text{ K}$ gesenkt wird (Begründung!). [1P]*

Die Konzentration nimmt ab, bis sie bei $T = 0 \text{ K}$ auf Null gesunken ist. Es werden mit fallender Temperatur immer weniger Elektronen in das Leitungsband angeregt.

- (c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit von Si bei Raumtemperatur. Die Beweglichkeit der Elektronen betrage $1400 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$, die der Löcher $450 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$. [2P]

$$\sigma = en\mu_e + ep\mu_p = 4,45 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$$

- (d) Nennen Sie ein Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters. [1P]

- Czochralski-Verfahren: Einkristall wird an Keim unter Drehung aus Schmelze gezogen. Dotierung durch Zugabe hochdotierter Kristalle zur Schmelze.
- Zonen-Zieh-Verfahren: Dotierung durch Anwesenheit von Dotiergas.
- Ionenbeschuß.
- Eindiffusion

- (e) Welche Atome eignen sich für eine p-Dotierung von Silizium? [1P]

Silizium befindet sich in der 4. Hauptgruppe des Periodensystems. Zur p-Dotierung eignen sich alle Elemente, die ein Valenzelektron weniger haben als Silizium. Diese Elemente stehen alle in der 3. Hauptgruppe. Ein Beispiel hierfür ist Bor.

- (f) Welche Konzentration von Dotieratomen ist nötig, um die Leitfähigkeit des Kristalls bei Raumtemperatur um 3 Größenordnungen zu steigern? [1P]

Bei Raumtemperatur sind im Allgemeinen alle Störstellen ionisiert. Damit ist eine Dotierkonzentration von 10^{13} cm^{-3} nötig, um die Konzentration der Ladungsträger um drei Größenordnungen zu steigern.

- (g) Beschreiben Sie eine weitere Möglichkeit, Elektronen in das Leitungsband des Kristalls anzuregen? [1P]

Absorption elektromagnetischer Wellen.

8. Zustandsdichte

- (a) Was beschreibt die Zustandsdichte? [1P]

Die Zustandsdichte beschreibt die Anzahl der Zustände pro Energieintervall

$$(D = \frac{\Delta Z}{\Delta E})$$

- (b) Skizzieren Sie die Zustandsdichte in einem parabolischen Halbleiter oberhalb der Leitungsband-Kante. [1P]

...

- (c) Wie groß ist die Zustandsdichte pro Volumen im Leitungsband eines reinen Halbleiters 0,2 eV oberhalb der Bandkante? Die Masse der Elektronen entspreche der Masse der freien Elektronen. [2P]

$$D(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_L)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{D(E)}{V} = 9,61 \cdot 10^{45} \text{ J m}^{-3} = 1,54 \cdot 10^{27} \text{ eV m}^{-3}$$

9. Raumladungszone

Die Dielektrizitätskonstante von Silizium beträgt $\epsilon = 12$. Wie groß ist die Dicke der Sperrschicht eines p/n-Übergangs in Silizium bei einer Diffusionsspannung von 0,4 V und einer Dotierung von $n_A = n_D = 10^{22} \text{ m}^{-3}$? [2P]

Es gilt:

$$d = \left[\frac{2\epsilon\epsilon_0 U_D}{e} \left(\frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_A} \right) \right]$$
$$= 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 320 \text{ nm}$$