Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Kaiserstrasse 12
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
Musterlösung
21. April 2006

1. **Elektronen im Potentialtopf**

   (a) *Wieviele verschiedene Energie-Eigenwerte kann ein Elektron in einem unendlichen Potentialtopf der Breite 0,7 nm bis zur Energie V_0=10 eV haben. [2P]*

   Die Energieniveaus berechnen sich aus:

   $$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \overset{!}{<} E_{max} = 10\,\mathrm{eV} = 1,602 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$$

   Das höchste Energie-Niveau und damit die Anzahl der Energie-Niveaus bis 10 eV erhält man durch Auflösen nach n:

   $$n = \frac{L}{\hbar\pi}\sqrt{2mE} = 3,6$$

   Damit kann das Elektron 3 verschiedene Energiewerte im gegebenen Potentialtopf einnehmen.

   (b) *Berechnen Sie den Ortserwartungswert $< \hat{x} >$ des Elektrons. [2P]*

   $$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x^* \hat{x} \psi_x dx = \int_0^L \psi_x^* x \psi_x dx$$

   $$= \int_0^L \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot x \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx$$

   $$= \frac{2}{L} \int_0^L x \cdot \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)^2 dx$$

   Dieses Integral kann aus der Formelsammlung abgelesen werden:

   $$= \frac{2}{L} \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{L}{4n\pi} x \sin 2\frac{n\pi}{L}x - \frac{L^2}{8n^2\pi^2} \cos 2\frac{n\pi}{L}x \right]_0^L$$

   $$= \frac{2}{L} \left[\left(\frac{1}{4}L^2 - \frac{L^2}{8n^2\pi^2} \right) - \left(-\frac{L^2}{8n^2\pi^2} \right) \right]$$

$$= \frac{L}{2} = 0,35\,nm$$

2. **Zustandsdichte**
   Berechnen Sie die Zustandsdichte des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. [2P]

   Die Energie-Eigenwerte berechnen sich zu:

   $$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

   Auflösen der Eigenwerte nach n liefert:

   $$n = \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$
   $$\Leftarrow D(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{\hbar\omega}$$

3. **Wasserstoffatom**
   Betrachten Sie das radiale Potential des Wasserstoff-Atoms $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Die Wellenfunktion des Wasserstoff-Elektrons im Grundzustand ist

   $$\psi_0(r) = c_0 a_0^{-\frac{3}{2}} e^{-r/a_0}$$

   wobei $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ der Bohrsche Radius ist.

   (a) *Skizzieren Sie das Potential. [1P]*

   ...

   (b) *Zeigen Sie durch Berechnung, daß $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. [3P]*

   Die Konstante c_0 läßt sich aus der Normierungsbedingung gewinnen:

   $$\int_{3D} \psi^*(r)\psi(r)\, d^3r \stackrel{!}{=} 1$$

   $$\int_{3D} \psi^*(r)\psi(r)\, d^3r = \int_r \int_\phi \int_\theta \left(c_0 a_0^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}\right)^2 r^2\, dr\, d\phi\, \sin\theta d\theta$$
   $$= 4\pi c_0^2 a_0^{-3} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\, dr$$

$$= 4\pi c_0^2 a_0^{-3}\left[e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(-\frac{r^2 a_0}{2} - \frac{2ra_0^2}{4} + \frac{2a_0^3}{8}\right)\right]_0^\infty$$

$$= 4\pi c_0^2 a_0^{-3}\left(\frac{a_0^3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

(c) *Zeigen Sie mithilfe der stationären Schrödinger-Gleichung, daß das Elektron im Grundzustand die Energie 13,6 eV hat. [3P]*

Da es sich um ein radial-symmetrisches Problem handelt, das nicht von den Winkeln abhängt, vereinfacht sich der Laplace Operator zu

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$$

Damit lautet die Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi = E\psi$$

Mit $\psi = c_0 a_0^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ und $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ folgt

$$E\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{a_0}r^2\right)\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a_0 r^2}\left(2r - \frac{r^2}{a_0}\right)\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{a_0^2}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 r} + \frac{me^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^4}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -2,177\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = -13,6\,\mathrm{eV}$$

(d) *Mit Licht welcher Wellenlänge müssen Sie das Atom bestrahlen, um das Elektron im Grundzustand vom Atomkern zu trennen. [1P]*

Die Grundzustandsenergie des Elektrons entspricht seiner Bindungsenergie.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E} = 91\,\mathrm{nm}$$

4. **Gefangenes Elektron**
Ein Elektron sei bei $r < r_0$ „gefangen" im Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty\,\mathrm{eV} & : \quad r < 0 \\ -10\,\mathrm{eV} & : \quad 0 \leq r < r_0 \\ 5\,\mathrm{eV} & : \quad r_0 \leq r < d \\ 0 & : \quad d \leq r \end{cases}$$

(a) *Skizzieren Sie das Potential. [1P]*

...

(b) *Welche Energie muß ein Elektron mindestens haben, um dem Potential entkommen zu können (Begründung)? [1P]*

Das Elektron muß auf der dargestellten Energie-Skala mindestens die Gesamtenergie 0 haben, um die Barriere durchtunneln zu können.

(c) *Wovon hängt es qualitativ ab, nach (durchschnittlich) welcher Zeit das Elektron dem Potential entkommt? [2P]*

Damit es zu einem Zerfall kommt, muß das Elektron die Barriere durchtunneln. Die Tunnel-Wahrscheinlichkeit und damit durchschnittliche Zeit bis zum Entwichen des Elektrons hängt von der Dicke und der Höhe der Barriere ab.

(d) *Welche De-Broglie-Wellenlänge hat ein Elektron, das mit einer kinetischen Energie von 3 eV aus dem Zerfall hervorgeht? [1P]*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = 7{,}08 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

5. **Begriffsklärung**
   Erklären Sie die folgenden Begriffe:

   (a) *Bloch-Elektron [1P]*

   Elektronen in einem periodischen Kristallpotential, deren Wellenfunktion sich als $\psi(r) = u(r) \cdot e^{-ikr}$ schreiben läßt, heißen Bloch-Elektronen. u(r) ist dabei eine gitterperiodische Funktion mit $u(r) = u(r + \Delta r)$.

   (b) *Dispersionsrelation [1P]*

   Unter einer Dispersionsrelation versteht man den Zusammenhang zwischen der Energie eines Teilchens $E(k)$ und dessen Wellenvektor k, bzw. den Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz $\omega(k)$ und dem Wellenvektor k.

   (c) *Phonon [1P]*

   Das Phonon ist ein Quasi-Teilchen. Es ist eine quantisierte Gitterschwingung.

   (d) *Orthonormierung [1P]*

   Zwei quantenmechanische Zustände gelten als orthonormiert, falls gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & : \quad \forall n \neq m \\ 1 & : \quad n = m \end{cases}$$

6. **Fermi-Verteilungsfunktion**

(a) *Geben Sie die Fermi-Verteilungsfunktion für Elektronen an und skizzieren Sie diese für T=0 K und T=300 K. [1P]*

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}}$$

Skizze: ...

(b) *Welche Information enthält die Fermi-Verteilungsfunktion? [1P]*

Die Fermi-Verteilungsfunktion gibt bei vorgegebener Temperatur an, bei welchen Energien Zustände (z.B. in einem Halbleiter) besetzt werden.

(c) *Wie groß ist die Besetzungs-Wahrscheinlichkeit für einen Zustand $E_0 = 2k_B T$ oberhalb der Fermi-Energie? [1P]*

$$f(2k_B T) = \frac{1}{1 + e^2} = 12\,\%$$

(d) *Wie berechnet man bei bekannter Fermi-Verteilungsfunktion die Dichte der Löcher im Valenzband? [1P]*

Die Ladungsträgerdichte in einem Halbleiter-Band läßt sich durch Multiplikation der Fermi-Verteilungsfunktion mit der Zustandsdichte und Integration berechnen. Im Falle des Leitungsbandes:

$$n = \int_{E_L}^{\infty} (1 - f(E)) \cdot D(E)\, dE$$

7. **Halbleiter**

(a) *Charakterisieren Sie ein Metall, einen Halbleiter und einen Isolater anhand des Bänder-Modells. [1P]*

Skizze: ...

Überlappen sich Leitungs- und Valenzband oder ist eines der Bänder nicht voll besetzt, so können sich die Ladungsträger bewegen und es liegt ein Metall vor. Ein Isolator hat eine große Bandlücke, so daß kaum Elektronen aus dem Valenz- in das Leitungsband gelangen können. Ein Halbleiter hat eine moderate Bandlücke, so daß in Abhängigkeit der Temperatur Ladungsträger angeregt werden können. Der Übergang zwischen Isolator und Halbleiter ist fliessend.

(b) *Benennen und beschreiben Sie die vier Prozesse, die Ladungsträgerdichten in einem Halbleiter beeinflussen können. [3P]*

- Generation und ...
- Rekombinaten durch Einstrahlung oder Emission von Licht, Anregung oder Relaxation von Ladungsträgern zwischen Valenz- und Leitungsband oder durch Wechselwirkung mit Störstellen
- Driftströme: Ströme, die durch ein von außen angelegtes elektrisches Feld erzeugt werden
- Diffusionsströme: Ströme, die von unterschiedlichen Ladungsträger-Konzentrationen herrühren.

8. **Mobilität in einem Halbleiter**

Die Löcherdichte in einem Si-Wafer (Beweglichkeit der Löcher 300 $\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Vs}}$*) nimmt zwischen den Positionen x=0 und x=1* μm *von* $10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$ *auf* $10^{13}\,\mathrm{cm}^{-3}$ *linear ab. Berechnen Sie den Lochdiffusionsstrom bei Raumtemperatur. [3P]*

Der Diffusionsstrom berechnet sich gemäß

$$j = eD\frac{\partial p}{\partial x}$$

Die Diffusionskonstante kann aus der Einstein-Relation bestimmt werden

$$D = \frac{k_B T}{e}\mu$$

Damit ergibt sich

$$j = k_B T \mu \frac{\partial p}{\partial x} = 1{,}118\,\mathrm{A\,cm}^{-2}$$

9. **Dotier**

(a) *B*

Zur n-Dotierung eines Halbleiters werden Atome mit mehr Valenzelektronen als zur Bindung nötig in den Kristall eingebaut. Im Falle des Halbleiters Silizium kann eine n-Dotierung mit Elementen aus der 5. Hauptgruppe des Periodensystems (z.B. N, P, As, ...) erfolgen. Die Elektronen, die nicht zur Bindung benötigt werden, können mit relativ geringem Energie-Aufwand von den Atomrümpfen getrennt werden und zu Strömen beitragen.

(b) *Beschreiben Sie ein technologisches Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters. [1P]*

- **Czochralski-Verfahren**: In eine Silizium-Schmelze werden hochdotierte Si-Kristalle gegeben. Ein Kondensationskeim wird in die Schmelze eingetaucht und unter langsamen Drehbewegungen wieder herausgezogen. Dabei bildet sich ein dotierter Einkristall.

(c) *Zeigen Sie, daß der Beitrag der intrinsisch erzeugten Ladungsträger gegenüber den ionisierten Störstellen bei einem n-dotierten Halbleiter-Kristall ($N_D = 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$) bei Raumtemperatur vernachlässigt werden können. Die Bandlücke betrage 1 eV, die Donator-Niveaus liegen 0,02 eV unter der Leitungsbandkante und die effektive Masse der Elektronen und der Löcher betrage $0,025 \cdot m_0$. m_0 sei die Masse des freien Elektrons. [4P]*

Es gilt das Massenwirkungsgesetz (T=300 K):

$$n_i = p_i = \left(m_e^* m_p^*\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} = 3,92 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^{-3}$$

Da wir bei Raumtemperatur annehmen können, daß alle Störstellen ionisiert sind, ist der Beitrag der intrinsischen Ladungsträger zur Gesamtzahl der Ladungsträger vernachlässigbar.

(d) *Sie messen an dem zuvor beschriebenen Halbleiter-Kristall einen spezifischen Widerstand von 1* $\mathrm{m}\Omega\,\mathrm{cm}$. *Welchen quantitativen Rückschluß läßt diese Messung auf die Mobilität von Elektronen und Löchern zu? [1P]*

Es gilt

$$R = \frac{1}{\sigma} \qquad \sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

Da die Zahl der Elektronen im Wesentlichen der Zahl der Störstellen entspricht (siehe vorhergehende Aufgabe) und der Beitrag der Löcher vernachlässigt werden kann, gilt

$$R = \frac{1}{eN_D\mu_n}$$

oder

$$\mu_n = \frac{1}{eN_D R} = 6,2 \cdot 10^3\,\mathrm{cm}^2\mathrm{V}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$$

Einen Rückschluß auf die Mobilität der Löcher als Minoritätsladungsträger läßt diese Messung nicht zu.

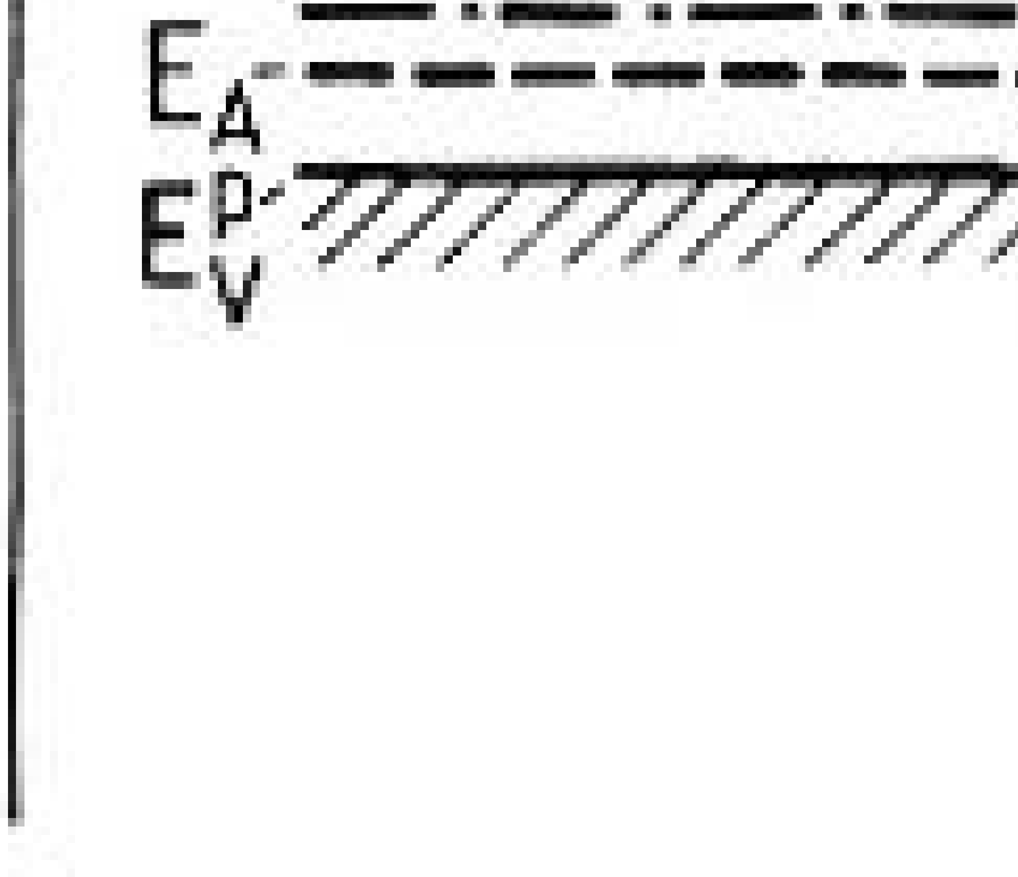
(e) *Wie verändert sich qualitativ das Verhältnis von intrinsisch erzeugten Ladungsträgern zu ionisierten Störstellen, wenn die Temperatur steigt? Wie verhält sich dabei die Fermi-Energie (Begründung)? [2P]*

Oberhalb einer bestimmten Temperatur sind alle Störstellen ionisiert. Ab dann werden nur noch Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband angeregt. D.h., das Verhältnis von intrinsisch erzeugten Ladungsträgern zu ionisierten Störstellen steigt.

Gleichzeitig sinkt die Fermi-Energie, da im Extremfall die Ladungsträger aus ionisierten Störstellen gegenüber den intrinsisch erzeugten vernachlässigt werden können und beim intrinsischen Halbleiter die Fermi-Energie ungefähr in der Bandmitte liegt.

10. **Leuch**

(a) *Sl*
ei



(b) *Erläutern Sie die Funktionsweise einer Diode anhand des pn-Übergangs. [2P]*

Bei Anlegen einer Spannung in Vorwärtsrichtung, werden Elektronen auf der n-Seite und Löcher auf der p-Seite des Übergangs injiziert. Die anlegte Spannung fällt über der Rekombinationszone ab und das Fermi-Niveau verschiebt sich. Dadurch werden die Ladungsträger in die Rekombinationszone getrieben, wo sie rekombinieren. Eine Spannung in Rückwärtsrichtung verschiebt das Fermi-Niveau in die entgegengesetzte Richtung, so daß die Ladungsträger von der Rekombinationszone weggetrieben werden. Bei hohen Spannungen in Sperrrichtung, können die Ladungsträger zwischen Leitungs- und Valenzband tunneln. Der Strom steigt schnell an.

(c) *Eignet sich Silizium (Si) oder Galliumarsenid (GaAs) besser für die Herstellung von Leuchtdioden (Begründung)? [2P]*

GaAs eignet sich besser für die Herstellung von Leuchtdioden, da GaAs ein direkter Halbleiter ist. Die Rekombinationswahrscheinlichkeit und damit die Lichtausbeute ist gegenüber einem indirekten Halbleiter höher, da hier keine Phononen an der Rekombination von Elektronen und Löchern beteiligt sein müssen.