

Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
5. April 2007

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	5,5	6,5	2,5	7,5	8	6	7	7	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen notwendige Punktzahl: 21.
- In eckigen Klammern angegebene Zahlen sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Uni gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.

1. Klassische Experimente

- (a) Ergänzen Sie in der Skizze für das Doppelspaltexperiment (Abb. 1) die Auftreffwahrscheinlichkeiten für Elektronen. Was passiert beim gleichzeitigen Öffnen beider Spalte? Welche Intensitätsverteilung ergibt sich auf dem Schirm, wenn jeweils einer der Spalte zugedeckt wird? Was folgt daraus für die Natur der Elektronen? [2,5 P]



Abb. 1: Doppelspalt-Experiment

- (b) Erklären Sie den Photoeffekt. Was folgt daraus für die Natur elektromagnetischer Strahlung? [3 P]

- (c) In den 20er Jahren schlug Albert Einstein in einem berühmten Disput mit Niels Bohr mehrere Gedankenexperimente vor, um die neu formulierten Ideen der Quantenmechanik zu widerlegen. Um in einem Doppelspaltexperiment herauszufinden, welchen der beiden Wege ein Elektron genommen hat, ohne die Interferenz zu zerstören, schlug er vor, vor dem Doppelspalt S2 einen beweglich gelagerten Einzelspalt S1 zu platzieren (Abb. 2). Wenn nun ein Elektron am Punkt P des Schirms detektiert würde, wäre über eine Messung der Richtung des Impulses des Einzelspalts klar, welchen Spalt in S2 das Elektron passiert hätte (Beim Stoß des Elektrons am Spalt gilt Impulserhaltung). Gleichzeitig sollten weiter die Interferenzen zu sehen sein, da die zusätzliche Einzelspalt die Beugung am Doppelspalt nicht beeinflusst. Bohr widerlegte Einstein, indem er mit der Orts-/Impulsunschärfe des Spalts S1 argumentierte. Versuchen Sie, die Argumentation nachzuvollziehen.

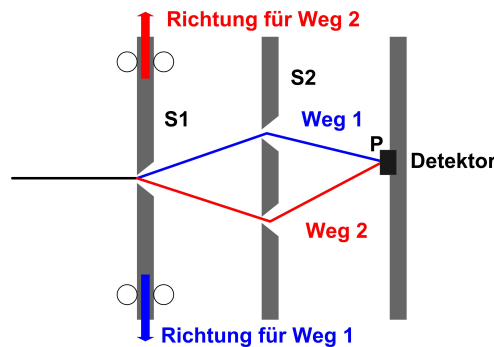


Abb. 2: Einsteins Gedankenexperiment

Der Impuls des Spalts S1 muss sehr genau gemessen werden, damit die gewünschte Aussage über die Flugrichtung des Elektrons getroffen werden kann. Über die Orts-Impuls-Unschärfe folgt dann, dass der Ort des Spalts eine recht große Unschärfe hat. Verändert sich jedoch der Ort, so ändert sich auch das Interferenzmuster auf dem Detektionsschirm. Die Unsicherheit in der Lage des Spalts überträgt sich in eine Unsicherheit in der Position der Interferenzextrema, was gleichbedeutend mit einem Verschmieren und somit Verschwinden der Interferenzen ist (siehe Abb. 3.)

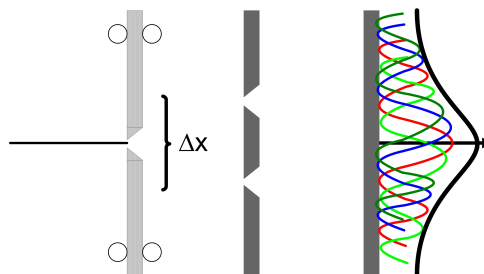


Abb. 3: Einsteins Gedankenexperiment

Name:

Matrikel-Nr.:

2. Quantenmechanisches Messen I

In einem unendlichen hohen Potentialtopf der Breite a (Potential $V(x) = 0$ zwischen $x = 0$ und $x = a$ ($a > 0$) und $V(x) = \infty$ sonst) befindet sich ein Elektron im ersten angeregten Zustand.

- (a) Leiten Sie den Ausdruck für die möglichen Werte der Energie der Elektronen im Topf her. Welche Energie wird man an dem System messen? [2,5 P]
- (b) Nun wird eine Ortsmessung durchgeführt. Wie kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, das Elektron entweder zwischen $a/6$ und $2a/6$ oder zwischen $5a/6$ und a zu finden (der Ausdruck für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit muss **nicht** ausgewertet werden)? [2 P]
- (c) Nun wird in die Mitte des Topfs eine dünne Zwischenwand eingefügt, die das Elektron nicht durchtunneln kann. Das Elektron befinde sich in dem rechten der beiden Töpfe. Wie sieht die (normierte) Wellenfunktion des Elektrons in niedrigsten Eigenzustand nach dem Einschieben der Trennwand aus? [2 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

3. Quantenmechanisches Messen II

- (a) Sie wollen mittels eines Streuexperiments nachprüfen, ob sich Elektronen wirklich, wie im Bohrschen Atommodell vorausgesagt, auf Kreisbahnen um den Kern bewegen. Um eine vernünftige Auflösung zu erhalten, müssen Sie Strahlung verwenden, deren Wellenlänge höchstens $1/20$ der aufzulösenden Strukturgröße beträgt. Strahlung welcher Frequenz benötigen Sie mindestens, wenn Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand vermessen wollen? [1 P]
- (b) Berechnen Sie die Energie eines Photons der Mess-Strahlung aus Aufgabenteil a) (verwenden Sie $\lambda = 5 \cdot 10^{-12}$ m, falls Sie diesen Teil nicht lösen konnten.) Vergleichen Sie die erhaltene Energie mit der Ionisierungsenergie von Wasserstoff (13,6 eV) und erläutern Sie, was das für das in a) vorgestellte Experiment bedeutet. Welche grundsätzliche Besonderheit beim Messen in der Quantenmechanik offenbart sich hier? [1,5 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

4. Gebundene Zustände beim Delta-Potential

Wir betrachten ein Delta-Potential $V(x) = V_0\delta(x)$. V_0 sei negativ, so dass sich die in Abb. 4 skizzierte Situation ergibt.

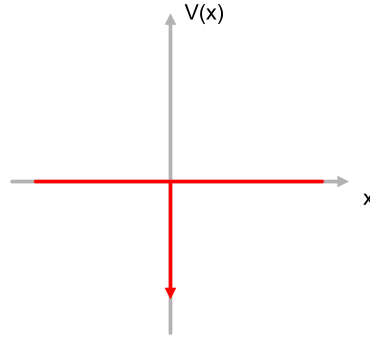


Abb. 4: Delta-Potential

- (a) Nehmen Sie für die Energie $W < 0$ an. Stellen Sie zunächst die Lösungsansätze der Schrödingergleichung und die Randbedingungen für $x \rightarrow \pm\infty$ auf. [1,5 P]
- (b) Um die Randbedingung bei $x = 0$ zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Delta-Potential von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann führen Sie die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ durch. Damit erhalten Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt $x = 0$. Was folgt daraus für die Wellenfunktion am Punkt $x = 0$? [3,5 P]
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Randbedingungen aus b) der Wellenfunktion für $W < 0$. Falls Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, nehmen Sie Stetigkeit bei $x = 0$ an. [2,5 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

5. Dreieckige Barriere

Wir betrachten eine Potentialbarriere mit folgender Form:

$$V(x) = \begin{cases} -q\Phi_A & : x < 0 \\ q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{L}\right) & : x \geq 0 \end{cases}$$

Eine solche Situation kann an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien bei Anwesenheit eines starken Feldes entstehen.

- (a) Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials ($q\Phi_A$, $q\Phi_B$ und L seien größer Null.) [1 P]
- (b) Diskutieren Sie, was mit einem von links auf die Barriere einfallenden Elektron passiert. Vergleichen Sie die Voraussagen der Quantenmechanik mit der der klassischen Physik für die Fälle $W < q\Phi_B$ und $W > q\Phi_B$. [2 P]
- (c) Unter bestimmten Umständen kann man das Problem mit einer Näherung betrachten. Diese liefert für die Wellenfunktion nach Passage der Barriere:

$$\psi(L) = \psi(0) \exp \left(- \int_0^L \frac{\sqrt{(2m^*(V(x) - W))}}{\hbar} dx \right) \quad (1)$$

Hierbei ist $\psi(0)$ die Wellenfunktion direkt vor dem Eintritt in die Barriere. Berechnen Sie den Wert Wellenfunktion $\psi(x)$ am Endpunkt $x = L$ der Barriere für $V(x) - W = q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{L}\right)$. [2 P]

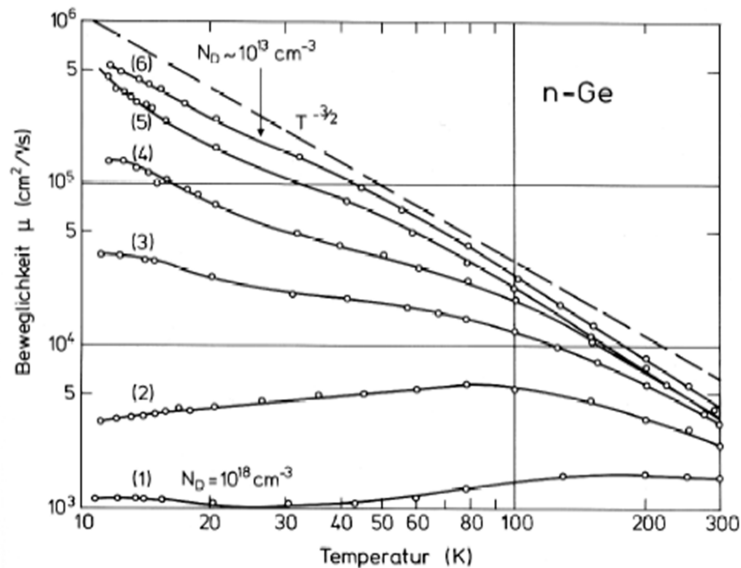
- (d) Bestimmen Sie nun die Tunnelwahrscheinlichkeit durch die Barriere aus dem Quotienten der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen nach der Barriere und der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen vor der Barriere. Setzen Sie dann den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E und der Länge L , $L = \phi_B/E$ in die Gleichung ein. [1,5 P]
- (e) Die Elektronen treffen die Barriere mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit $\bar{v}$ und der Dichte n . Wie groß ist die Tunnelstromdichte j_T ? [1,5 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

6. Elektronen im Halbleiter

- (a) Das Diagramm 5 zeigt die Abhängigkeit der Elektronen-Beweglichkeit in Germanium von verschiedenen Parametern. Erklären Sie die wichtigen Trends, die man dem Diagramm entnehmen kann. [2 P]



Die Kurven (1) bis (6) bezeichnen absteigende Dotierungsdichten von 10^{18} cm^{-3} bis 10^{13} cm^{-3} .

Abb. 5: Elektronen-Beweglichkeit in Germanium

- (b) Kauft man einen Siliziumwafer, so ist genau gekennzeichnet, entlang welcher Kristallebene der Schnitt verläuft. Warum ist das in Kristallen wichtig? Ist eine solche Angabe auch für eine Schicht amorphes Silizium oder Glas sinnvoll? [1,5 P]
- (c) Die Beweglichkeiten in Silizium seien $\mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, die effektiven Massen seien $m_e = 0,36m_0$ (Elektronen) und $m_h = 0,81m_0$ (Löcher), die Bandlücke $W_G = 1,1 \text{ eV}$. Wie muss man die Dotierung eines p-dotierten Plättchens wählen, damit die Leitfähigkeit gleich der eines mit 10^{16} Dotieratomen pro Kubikzentimeter dotierten n-dotierten Plättchens ist (die Beweglichkeiten seien unabhängig von der Dotierdichte)? [2,5P]

Name:

Matrikel-Nr.:

7. Photonen und Elektronen

(a) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

i. $\omega_{\text{Photon}} = ck$

ii. $\omega_{\text{Elektron}} = \frac{\hbar}{2m} k^2$

Geben Sie die Ausdrücke für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in beiden Fällen an. [2 P]

(b) Wie beschreibt man Elektronen im periodischen Potential eines Kristalls? [1 P]

(c) Erklären Sie (ggf. anhand einer Zeichnung) die Absorption eines Photons mit der Bandlückenenergie W_G in einem direkten und einem indirekten Halbleiter. [2 P]

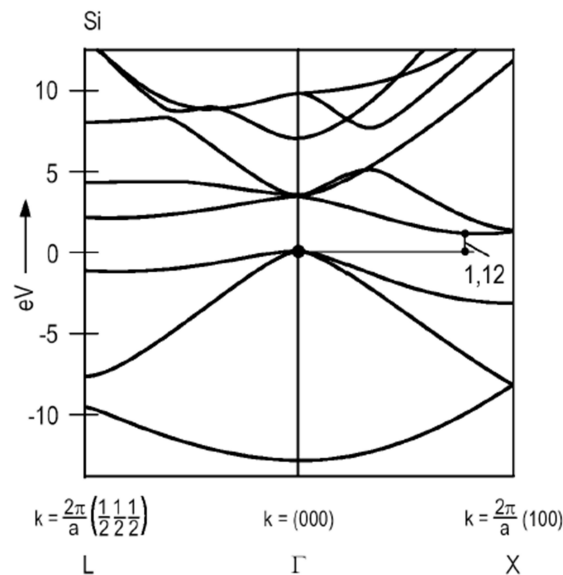


Abb. 6: Energie-Banddiagramm von Silizium

(d) Geben Sie eine Abschätzung dafür an, dass ein Photon mit der Wellenlänge 1000 nm nicht genug Impuls trägt, um ein Elektron in Silizium direkt anzuregen. [2 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

8. pin-Diode

Eine pin-Diode enthält eine Folge einer p-dotierten Siliziumschicht, einer undotierten (intrinsischen) Schicht und einer n-dotierten Schicht. In Abb. 7 sehen Sie die sich ausbildenden Raumladungen skizziert.

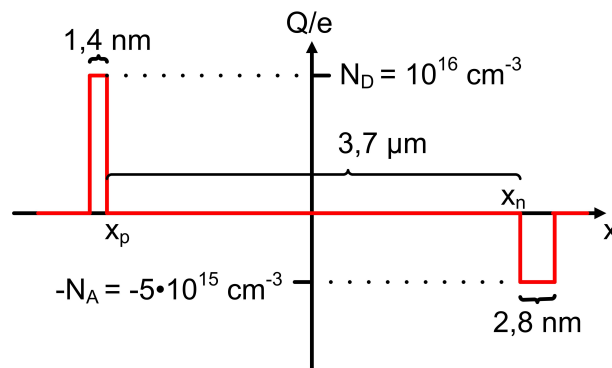


Abb. 7: Raumladungszonen einer PIN-Diode

- (a) Skizzieren Sie die zugehörigen Feld- und Potentialverläufe der pin-Diode. [2 P]
- (b) Berechnen Sie die Diffusionsspannung im Bauteil bei Raumtemperatur. Die effektive Masse von Elektronen und Löchern sei gleich der freien Elektronenmasse. [1,5 P]
- (c) Die intrinsische Schicht sei $3,7 \text{ }\mu\text{m}$ dick. Eine Sperr-Spannung von 2 V liege über der Schicht an. Die Elektronen- und Löcherbeweglichkeit ist gleich bei $\mu = 500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Wenn nun ein Elektron-Loch-Paar in der Mitte der intrinsischen Schicht erzeugt wird, wird es durch das Feld getrennt. Den dann fließenden Strom können Sie messen. Berechnen Sie die Laufzeit der Elektronen/Löcher in der intrinsischen Schicht und machen Sie eine Abschätzung über die Grenzfrequenz des Bauteils. [1,5 P]
- (d) Wie groß ist die Kapazität der Diode, wenn eine quadratische Fläche von $100 \text{ }\mu\text{m}$ Seitenlänge angenommen wird (die Geometrie des Bauteils entnehmen Sie Abb. 7, gehen Sie von einem Plattenkondensator mit $\epsilon_r = 12$ aus)? [1 P]
- (e) Geben Sie nun die Grenzfrequenz des RC-Glieds Diode an, wenn der Widerstand $R = 50 \text{ }\Omega$ beträgt (Falls Sie den Teil d nicht lösen konnten, nehmen Sie $C = 1 \text{ pF}$ an.) [1 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	A s
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	A s V ⁻¹ m ⁻¹
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	V s A ⁻¹ m ⁻¹
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m s ⁻¹
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	1 u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	1 eV	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$ J

Taylor-Reihe

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in einer Taylor-Reihe um x_0 :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Hermite'sche Polynome

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

bitte wenden ...

Integrale

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\
\int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\
\sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\
\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)
\end{aligned}$$