

Lichttechnisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
Klausur
5. April 2007

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	5,5	9	7,5	8	6	7	7	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen notwendige Punktzahl: 21.
- In eckigen Klammern angegebene Zahlen sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Uni gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.

1. Klassische Experimente

- (a) Ergänzen Sie in der Skizze für das Doppelspaltexperiment (Abb. 1) die Auftreffwahrscheinlichkeiten für Elektronen. Was passiert beim gleichzeitigen Öffnen beider Spalte? Welche Intensitätsverteilung ergibt sich auf dem Schirm, wenn jeweils einer der Spalte zugedeckt wird? Was folgt daraus für die Natur der Elektronen? [2,5 P]



Abb. 1: Doppelspalt-Experiment

Mit zwei offenen Spalten bilden sich Interferenzen aus, deckt man einen Spalt zu, so verschwinden diese. Diese Aspekte des Doppelspalterperiments belegen die Wellennatur der Elektronen.



Abb. 2: Lösung Doppelspalt-Experiment

- (b) Erklären Sie den Photoeffekt. Was folgt daraus für die Natur elektromagnetischer Strahlung? [3 P]

Bestrahlt man ein Material mit elektromagnetischer Strahlung, so werden unter Umständen Elektronen aus dem Material herausgeschlagen. Das Auftreten dieses Effekts hängt von der Wellenlänge der Strahlung und vom Material ab, fast nicht jedoch von der Intensität der Strahlung. Diese Tatsache ist nicht zufrieden stellend im Wellenbild elektromagnetischer Strahlung zu erklären. Hier sollte ein mit der Intensität zunehmender Strom auftreten. Dass im Gegensatz dazu für Strahlung oberhalb einer bestimmten Wellenlänge keine Emission von Elektronen erfolgt, erklärt das Teilchen-

bild der elektromagnetischen Strahlung. Die Elektronen absorbieren einzelne Photonen. Diese tragen die Energie $h\nu$. Ist die Energie groß genug, um die Austrittsarbeit aus dem Material aufzubringen, entstehen freie Elektronen. Da die Absorption zweier oder mehrerer Photonen in schneller Folge sehr unwahrscheinlich ist, erhöht eine größere Intensität, die eine höhere Zahl von Photonen bedeutet, die Anzahl der freigesetzten Elektronen nur oberhalb einer Schwelle. Wenn der Energieübertrag durch ein einzelnes Photon zu niedrig ist, werden bei höherer Intensität mehr Elektronen angeregt, ohne jedoch das Material verlassen zu können. Während das Doppelspaltexperiment zu Beginn des 20. Jahrhunderts zeigte, dass bis dato als Teilchen betrachtete Elektronen auch Wellencharakter haben, beweist der Photoeffekt den Teilchencharakter der vormals als Welle begriffenen elektromagnetischen Strahlung. Beide Experimente zeigen einen Grundsatz der Quantenmechanik: ALLES ist gleichzeitig Welle und Teilchen.

2. Quantenmechanisches Messen

In einem unendlichen Potentialtopf ($V = 0$ zwischen $x = 0$ und $x = a$ ($a > 0$) und $V = \infty$ sonst) befindet sich ein Elektron im ersten angeregten Zustand.

- (a) Leiten Sie den Ausdruck für die möglichen Werte der Energie der Elektronen im Topf her. Welche Energie wird man an dem System messen? [2,5 P]

Im Topf machen wir den Ansatz:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (1)$$

Hier gilt $k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$. Da es sich um einen unendlich hohen Topf handelt, muss die Wellenfunktion an den Rändern verschwinden, um der Stetigkeitsbedingung zu genügen. So folgt:

$$\psi(0) = B = 0 \quad (2)$$

Des weiteren erhält man:

$$\psi(a) = A \sin(ka) + B \cos(ka) \overset{\text{mit 2}}{=} A \sin(ka) = 0 \quad (3)$$

Das kann nur gelten, wenn $A = 0$ oder $ka = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die erste Bedingung führt auf die triviale Lösung $A = 0$ und $B = 0$, wir betrachten daher den zweiten Fall. Mit $k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$ kann man schreiben

$$n\pi/a = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} \rightarrow W = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2. \quad (4)$$

Der erste angeregte Zustand hat die Quantenzahl $n = 2$. Wenn das System in diesem Zustand ist, wird mit Sicherheit die zugehörige Energie $W = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$ gemessen.

- (b) Nun wird eine Ortsmessung durchgeführt. Wie kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, das Elektron entweder zwischen $a/6$ und $2a/6$ oder zwischen $5a/6$ und a zu finden (der Ausdruck für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit muss **nicht** ausgewertet werden)? [2 P]

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ergibt sich als Integral über $\psi\psi^$. Dazu muss noch die Konstante A über die Normierungsbedingung bestimmt werden:*

$$1 = \int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = A^2 \left| \frac{1}{2}x - \frac{a}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right) \right|_0^a = \frac{A^2 a}{2} \quad (5)$$

Somit wird $A = \sqrt{2/a}$. Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den oben genannten Bereichen ergibt sich:

$$\rho = \int_{a/6}^{2a/6} \frac{2}{a} \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx + \int_{5a/6}^a \frac{2}{a} \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx \quad (6)$$

- (c) Nun wird in die Mitte des Topfs eine dünne Zwischenwand eingefügt, die das Elektron nicht durchtunneln kann. Das Elektron befinde sich in dem rechten der beiden Töpfe. Wie sieht die (normierte) Wellenfunktion des Elektrons unmittelbar nach dem Einschieben der Trennwand aus? [2 P]

Der erste angeregte Zustand nach dem Einschieben der Zwischenwand ist:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq x < a/2 \\ C \sin \frac{2\pi x}{a} & : a/2 \leq x < a \end{cases}$$

Die Normierungskonstante erhält man mit

$$1 = \int_{a/2}^a C^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{a} \right) dx = C^2 \left| \frac{1}{2}x - \frac{a}{8\pi} \sin \left(\frac{4\pi x}{a} \right) \right|_{a/2}^a = \frac{C^2 a}{4} \quad (7)$$

zu $C = \sqrt{4/a}$. Also sieht die Wellenfunktion folgendermaßen aus:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq x < a/2 \\ \sqrt{4/a} \sin \frac{2\pi x}{a} & : a/2 \leq x < a \end{cases}$$

- (d) Sie wollen mittels eines Streuexperiments nachprüfen, ob sich Elektronen wirklich wie im Bohrschen Atommodell vorausgesagt auf Kreisbahnen um den Kern bewegen (Abb. 3). Um eine vernünftige Auflösung zu erhalten, müssen Sie Strahlung verwenden, deren Wellenlänge höchstens $1/20$ der aufzulösenden Strukturgröße beträgt. Strahlung welcher Frequenz benötigen Sie mindestens, wenn Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand vermessen wollen? [1 P]

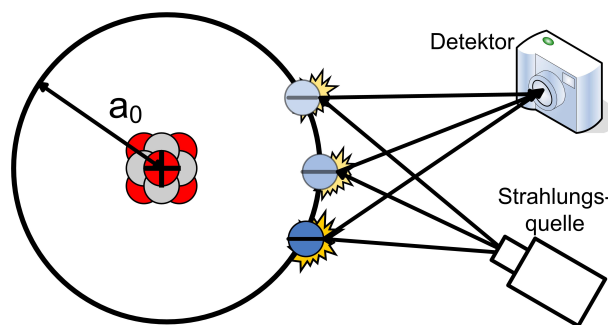


Abb. 3: Streuexperiment

Der Bohrsche Radius für den Grundzustand ist $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m. So brauchen wir Strahlung mit einer Wellenlänge von höchstens $\lambda = 2,645 \cdot 10^{-12}$ m. Für die Frequenz ergibt sich über $c = \lambda \nu$:

$$\nu = c/\lambda = 1,13 \cdot 10^{20} \text{ Hz} \quad (8)$$

- (e) Berechnen Sie die Energie eines Photons der Mess-Strahlung aus Aufgabenteil d) (verwenden Sie $\lambda = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, falls Sie diesen Teil nicht lösen konnten.) Vergleichen Sie die erhaltene Energie mit der Ionisierungsenergie von Wasserstoff (13,6 eV) und erläutern Sie, was das für das in d) vorgestellte Experiment bedeutet. Welche grundsätzliche Besonderheit beim Messen in der Quantenmechanik offenbart sich hier? [1,5 P]

Die Energie der Photonen der Mess-Strahlung angegeben in eV berechnet sich zu:

$$W = h\nu = 46,87 \text{ keV} \quad (9)$$

Wenn man bedenkt, dass die Ionisierungsenergie für Wasserstoff bei 13,6 eV liegt, wird das Dilemma offensichtlich. Die Streuung des Photons am Elektron während des Messprozesses führt unweigerlich zu einer deutlichen Veränderung seines Zustands (in unserem Fall wahrscheinlich der Ionisation). Damit kann keine weitere Ortsmessung an dem Wasserstoffatom im Grundzustand vorgenommen werden, da der Zustand durch die Messung verändert wird. Dies zeigt deutlich, dass die klassische Annahme einer idealisiert wechselwirkungsfreien Messung auf quantenmechanischen Energieskalen unzulässig ist.

3. Delta-Potential

Wir betrachten ein Delta-Potential, also $V(x) = V_0\delta(x)$. V_0 sei negativ, so dass sich die in Abb. 4 skizzierte Situation ergibt.

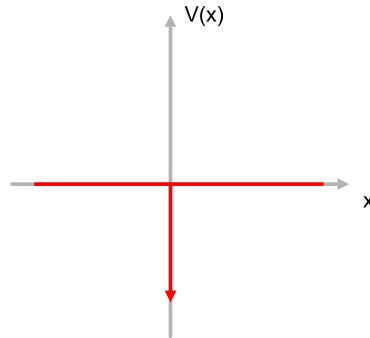


Abb. 4: Delta-Potential

- (a) Nehmen Sie $W < 0$ an. Stellen Sie zunächst die Lösungsansätze der Schrödingergleichung und die Randbedingungen für $x \rightarrow \pm\infty$ auf. [1,5 P]

Bis auf den Punkt $x = 0$ können wir das Problem in zwei Bereiche mit Potential $V = 0$ einteilen (siehe Abb. 4.) Für $W < 0$ ergibt sich für die Wellenzahl $k = j\kappa = j\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$. Das eingesetzt in den Standard-Lösungsansatz ergibt für die Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & x < 0 \\ \psi_{II}(x) &= Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & x > 0\end{aligned}$$

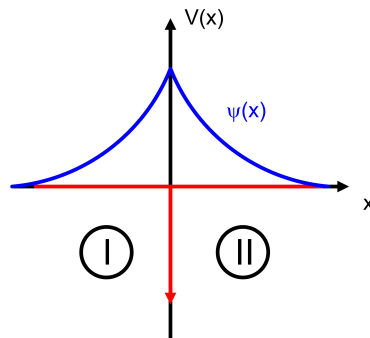


Abb. 5: Lösung Delta-Potential

Da für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ die exponentiell ansteigenden Terme verschwinden müssen, muss $A = 0$ und $D = 0$ gelten.

- (b) Um die Randbedingung bei $x = 0$ zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor: Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Delta-Potential von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Dann führen Sie die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ durch. Damit erhalten

Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt $x = 0$. Was folgt daraus für die Wellenfunktion selbst? [3,5 P]

Die Schrödingergleichung lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V_0 \delta(x) \psi(x) = W \psi(x) \quad (10)$$

Die Integration von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ wird durchgeführt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) dx}^{=\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)} + \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} V_0 \delta(x) \psi(x) dx}^{=V_0 \psi(0)} = \overbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} W \psi(x) dx}^{=W(\Psi(\epsilon) - \Psi(-\epsilon))} \quad (11)$$

Die Stammfunktion der zweiten Ableitung ist die erste Ableitung, so ergibt sich der erste Term. Der zweite folgt aus den Eigenschaften der Dirac-Distribution. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wird die Wellenfunktion über einen 2ϵ -Bereich um $x = 0$ integriert. Wenn wir nun die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ ausführen, verschwindet dieser Term (wenn die Wellenfunktion nicht divergiert, was vorausgesetzt werden kann), weil die Fläche unter der Wellenfunktion gegen Null geht. Wir erhalten:

$$\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon) = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \psi(0) \quad (12)$$

Auf der rechten Seite steht ein konstanter Term. Somit sagt Gleichung 12 aus, dass die erste Ableitung der gesuchten Wellenfunktion einen Sprung bei $x = 0$ aufweist, die Wellenfunktion an sich ist an diesem Punkt also stetig.

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Randbedingungen die Form der Wellenfunktion im Delta-Potential für $W < 0$. Falls Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, nehmen Sie Stetigkeit bei $x = 0$ an. [2,5 P]

Aus der Stetigkeitsbedingung folgt $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$, also $B = C$. Aus 12 kann man $-\kappa = \frac{mV_0}{\hbar^2}$ ableiten. Damit wird der Ausdruck für die Wellenfunktion:

$$\psi(x) = B \exp\left(-\frac{m|V_0|}{\hbar^2} |x|\right) \quad (13)$$

Zuletzt kann noch die Konstante B über die Normierung bestimmt werden. Wir erhalten $B = \sqrt{|V_0|/\hbar}$.

4. Dreieckige Barriere

Wir betrachten eine Potentialbarriere mit folgender Form:

$$V(x) = \begin{cases} -q\Phi_A & : x < 0 \\ q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{L}\right) & : x \geq 0 \end{cases}$$

Eine solche Situation kann an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien bei Anwesenheit eines starken Feldes entstehen.

- (a) Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials ($q\Phi_A$, $q\Phi_B$ und L seien größer Null.) [1 P]

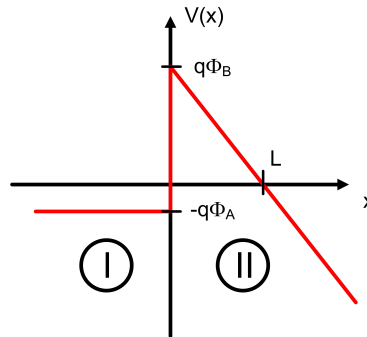


Abb. 6: Dreieckige Barriere

- (b) Diskutieren Sie, was mit einem von links auf die Barriere einfallenden Elektron passiert. Vergleichen Sie die Voraussagen der Quantenmechanik mit der der klassischen Physik. [2 P]

Je nach Energie wird im klassischen Modell das Elektron reflektiert ($W < q\Phi_B$) oder mit Änderung seiner kinetischen Energie transmittiert ($W > q\Phi_B$). In der quantenmechanischen Betrachtung wird im Gegensatz dazu in beiden Fällen ein Teil der Elektronenwelle reflektiert und der Rest transmittiert (Tunneleffekt). Diese Effekte sind jedoch nur für kleine Energien und dünne Barrieren merklich, was sich mit der Tatsache verträgt, dass das klassische Bild durch den Übergang zu großen Quantenzahlen aus der quantenmechanischen Beschreibung folgt.

- (c) Unter bestimmten Umständen kann man das Problem mit einer Näherung betrachten. Diese liefert für die Wellenfunktion nach Passage der Barriere:

$$\psi(L) = \psi(0) \exp \left(- \int_0^L \frac{\sqrt{(2m^*(V(x) - W))}}{\hbar} dx \right) \quad (14)$$

Hierbei ist $\psi(0)$ die Wellenfunktion direkt vor dem Eintritt in die Barriere. Berechnen Sie den Wert Wellenfunktion $\psi(x)$ am Endpunkt $x = L$ der Barriere für $V(x) - W = q\Phi_B \left(1 - \frac{x}{L}\right)$. [2 P]

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \psi(L) &= \psi(0) \exp \left(- \int_0^L \frac{\sqrt{(2m^*q\Phi_B (1 - \frac{x}{L}))}}{\hbar} dx \right) \\
 &= \psi(0) \exp \left(- \frac{\sqrt{2m^*q\Phi_B}}{\hbar} \int_0^L \sqrt{(1 - \frac{x}{L})} dx \right) \\
 &= \psi(0) \exp \left(- \frac{\sqrt{2m^*q\Phi_B}}{\hbar} \frac{2L}{3} \right)
 \end{aligned}$$

- (d) Bestimmen Sie nun die Tunnelwahrscheinlichkeit durch die Barriere aus dem Quotienten der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen nach der Barriere und der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen vor der Barriere. Setzen Sie dann den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E und der Länge L , $L = \phi_B/E$ in die Gleichung ein. [1,5 P]

Die Tunnelwahrscheinlichkeit wird also:

$$\Theta = \frac{\psi(L)\psi(L)^*}{\psi(0)\psi(0)^*} = \exp \left(- \frac{\sqrt{2m^*q\Phi_B}}{\hbar} \frac{4L}{3} \right) = \exp \left(- \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m^*q}}{\hbar} \frac{\Phi_B^{3/2}}{E} \right) \quad (15)$$

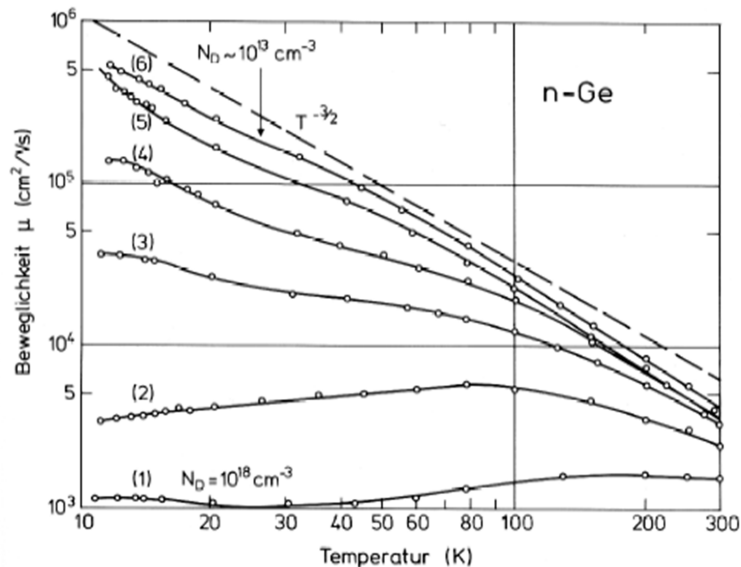
- (e) Die Elektronen treffen die Barriere mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit $\bar{v}$ und der Dichte n . Wie groß ist die Tunnelstromdichte j_T ? [1,5 P]

Bei einer Dichte von n und der durchschnittlichen Geschwindigkeit von $\bar{v}$ ergibt sich eine Stromdichte von $j = -en\bar{v}$ auf der linken Seite der Barriere. Der Transmissionskoeffizient Θ gibt den Anteil der getunnelten Elektronen an, wir erhalten so für die Tunnelstromdichte:

$$j_T = -en\bar{v} \exp \left(- \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m^*q}}{\hbar} \frac{\Phi_B^{3/2}}{E} \right) \quad (16)$$

5. Elektronen im Halbleiter

- (a) Das Diagramm 7 zeigt die Abhängigkeit der Elektronen-Beweglichkeit in Germanium von verschiedenen Parametern. Erklären Sie die wichtigen Trends, die man dem Diagramm entnehmen kann. [2 P]



Die Kurven (1) bis (6) bezeichnen absteigende Dotierungsdichten von 10^{18} cm^{-3} bis 10^{13} cm^{-3} .

Abb. 7: Elektronen-Beweglichkeit in Germanium

Für alle Kurven wird eine Abnahme der Beweglichkeit im Bereich hoher Temperaturen mit steigender Temperatur beobachtet. Dieser Effekt ist auf die Streuung an Gitterschwingungen zurückzuführen, die mit steigender Temperatur zunehmen. Bei niedrigen Temperaturen ist die Beweglichkeit stark von der Dotierung abhängig, hier dominiert die Streuung an Störstellen. Nach dem Lehrbuch-Modell müsste dieser Streuprozess mit zunehmender Temperatur weniger effizient werden, die Beweglichkeit also zunehmen. Im realen Halbleiter tritt dieser Effekt aufgrund weiterer Einflüsse nur für niedrigdotierte Fälle auf.

- (b) Kauft man einen Siliziumwafer, so ist genau gekennzeichnet, entlang welcher Kristallebene der Schnitt verläuft. Warum ist das in Kristallen wichtig? Ist eine solche Angabe auch für eine Schicht amorphes Silizium oder Glas sinnvoll? [1,5 P]

Kristalline Strukturen haben, je nach Raumrichtung, verschiedene Geometrien. Da hiervon auch die physikalischen Eigenschaften abhängen, ist es wichtig zu wissen, entlang welcher Gitterebene der Einkristall geschnitten wurde. So kann es zum Beispiel Bewegungsrichtungen im Kristall geben, entlang derer die Elektronenbeweglichkeit besonders hoch ist. In amorphen Materialien gibt es solche Vorzugsrichtungen nicht, in Näherung bietet sich in jede Richtung das gleiche Bild. Daher sind auch die Eigen-

schaften isotrop und eine Kennzeichnung einer bestimmten Ebene nicht möglich und nötig.

- (c) Die Beweglichkeiten in Silizium seien $\mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, die effektiven Massen seien $m_e = 0,36m_0$ (Elektronen) und $m_h = 0,81m_0$ (Löcher), die Bandlücke $W_G = 1,1 \text{ eV}$. Wie muss man die Dotierung eines p-dotierten Plättchens wählen, damit die Leitfähigkeit gleich der eines mit 10^{16} Dotieratomen pro Kubikzentimeter dotierten n-dotierten Plättchens ist (die Beweglichkeiten seien unabhängig von der Dotierdichte)? [2,5P]

$$\begin{aligned} n_i &= \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) \\ &= 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} m_e^{3/4} m_h^{3/4} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 3,43 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Damit spielen im Fall des dotierten Halbleiterplättchens die intrinsisch erzeugten Ladungsträger keine Rolle. Die Leitfähigkeit im n-Halbleiter ist somit:

$$\begin{aligned} \sigma &= e_0 \mu_n n \\ &= 2,16 \text{ S/cm} \end{aligned}$$

Die benötigte Dotierdichte der Akzeptoren ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma}{e_0 \mu_p} \\ &= 2,81 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

6. Photonen und Elektronen

- (a) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

i. $\omega_{\text{Photon}} = ck$

ii. $\omega_{\text{Elektron}} = \frac{\hbar}{2m}k^2$

Geben Sie die Ausdrücke für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in beiden Fällen an. [2 P]

Die Phasengeschwindigkeit errechnet sich zu $v_{Ph} = \omega/k$, die Gruppengeschwindigkeit zu $v_{Gr} = \partial\omega/\partial k$, somit folgt:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Photon}} = ck &\rightarrow v_{Ph} = c, v_{Gr} = c \\ \omega_{\text{Elektron}} = \frac{\hbar}{2m}k^2 &\rightarrow v_{Ph} = \frac{\hbar}{2m}k, v_{Gr} = \frac{\hbar}{m}k\end{aligned}$$

Für das Photon sind also Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich. Im Falle des Elektrons dagegen ist die Gruppengeschwindigkeit halb so groß wie die Phasengeschwindigkeit.

- (b) Wie beschreibt man Elektronen im periodischen Potential eines Kristalls? [1 P]

Während die Lösungen der Schrödingergleichung des freien Elektrons ebene Wellen sind, kommt im Kristall eine periodische Modulation mit der Periodizität des Kristalls hinzu. Diesen Lösungsansatz mit einem Produktterm aus ebener Welle und gitterperiodischer Funktion, der die Schrödingergleichung für Elektronen im Kristallpotential löst, nennt man Bloch-Welle.

- (c) Erklären Sie (ggf. anhand einer Zeichnung) die Absorption eines Photons mit der Bandlückenenergie W_G in einem direkten und einem indirekten Halbleiter. [2 P]

Im direkten Halbleiter liegen die Bandkanten des Valenz- und Leitungsbands beim gleichen Kristallimpuls. Da bei Übergängen im Kristall Energie- und Impulserhaltung gilt und Photonen im optischen Bereich keinen nennenswerten Impuls tragen, kann durch direkte Absorption eines Photons ein angeregter Zustand entstehen. Im indirekten Halbleiter sind die Orte der Extrema der Bänder bei verschiedenen Kristallimpulsen zu finden. Für einen direkten Übergang muss also noch ein Teilchen mit passendem Impuls an dem Absorptionsprozess teilnehmen. Das ist relativ unwahrscheinlich.

- (d) Geben Sie eine Abschätzung dafür an, dass ein Photon mit der Wellenlänge 1000 nm nicht genug Impuls trägt, um ein Elektron in Silizium direkt anzuregen. [2 P]

Der benötigte Gitterimpuls liegt in der Größenordnung $\hbar 2\pi/a$ (aus der Zeichnung entnommen), wobei a die Gitterkonstante ist. Ein Photon trägt den Impuls $p_{\text{Photon}} =$

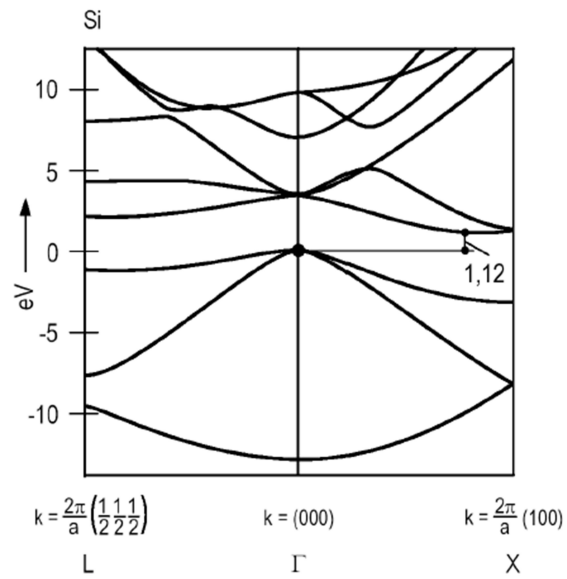


Abb. 8: Energie-Banddiagramm von Silizium

$\hbar k = \hbar 2\pi/\lambda$. Für $p_{\text{Gitter}} = p_{\text{Photon}}$ müsste also die Wellenlänge in der Größenordnung der Gitterkonstante liegen. Im Falle von Silizium liegt die Gitterkonstante entlang der $[111]$ -Richtung bei circa 0,5 nm, die Wellenlänge von grünem Licht liegt um 550 nm. Wir haben also $\lambda \gg a$ und somit $p_{\text{Gitter}} \gg p_{\text{Photon}}$.

7. pin-Diode

Eine pin-Diode enthält eine Folge einer p-dotierten Siliziumschicht, einer undotierten (intrinsischen) Schicht und einer n-dotierten Schicht. In Abb. 9 sehen Sie die sich ausbildenden Raumladungen skizziert.

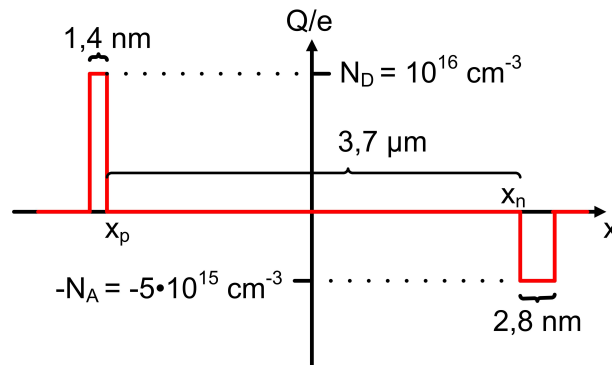


Abb. 9: Raumladungszonen einer PIN-Diode

- (a) Skizzieren Sie die zugehörigen Feld- und Potentialverläufe der pin-Diode. [2 P]

Das Feld ergibt sich aus der Raumladungsverteilung über $\nabla \vec{E} = \rho$. Weiter gilt für das elektrische Potential ϕ der Zusammenhang $\vec{E} = -\nabla \phi$. Das Feld steigt oder fällt also linear in Bereichen konstanter Raumladung, in der intrinsischen Schicht bleibt es konstant ($\partial E / \partial x = 0$ im eindimensionalen Fall). Weiter ergibt sich aus den linearen Veränderungen des Feldes eine quadratische Verbiegung des Potentials, das Potential in der intrinsischen Schicht hat einen linearen Verlauf. Wir erhalten ähnliche Verläufe wie für die pn-Diode (siehe Abb. 10, zur Verdeutlichung sind die Raumladungszonen überproportional breit eingezeichnet.)

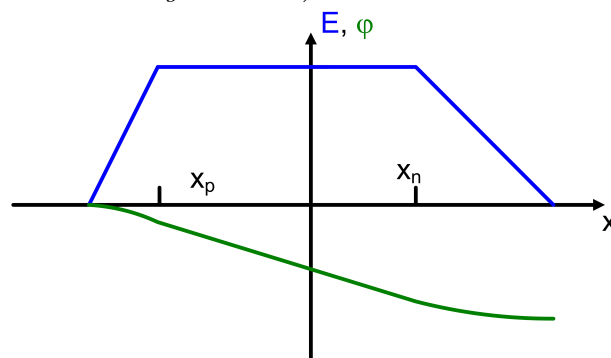


Abb. 10: Feldverlauf und elektrisches Potential in einer PIN-Diode

- (b) Berechnen Sie die Diffusionsspannung im Bauteil bei Raumtemperatur. Die effektive Masse von Elektronen und Löchern sei gleich der freien Elektronenmasse. [1,5 P]

Die Diffusionsspannung U_D berechnet sich, wie im Falle einer pn-Diode, zu:

$$U_D = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{n_A n_D}{n_i^2} \right) \quad (17)$$

Hier benötigen wir die intrinsische Ladungsträgerdichte.

$$n_i = \frac{2}{h^3} (2\pi m_0 kT)^{3/2} \cdot \exp \left(-\frac{W_G}{2kT} \right) = 8.4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \quad (18)$$

Somit erhalten wir $U_D = 0,68 \text{ V}$.

- (c) Die intrinsische Schicht sei $3,7 \text{ }\mu\text{m}$ dick. Eine Sperr-Spannung von 2 V liege über der Schicht an. Die Elektronen- und Löcherbeweglichkeit ist gleich bei $\mu = 500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Wenn nun ein Elektron-Loch-Paar in der Mitte der intrinsischen Schicht erzeugt wird, wird es durch das Feld getrennt. Den dann fließenden Strom können Sie messen. Berechnen Sie die Laufzeit der Elektronen/Löcher in der intrinsischen Schicht und machen Sie eine Abschätzung über die Grenzfrequenz des Bauteils. [1,5 P]

Die Elektronen und Löcher werden von einem Feld getrennt, dass der angelegten Spannung plus der Diffusionsspannung entspricht, also $0,72 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Die Geschwindigkeit hängt vom angelegten Feld und der Beweglichkeit ab über $\bar{v} = \mu E$. Zum Durchlaufen der intrinsischen Schicht benötigen die Ladungsträger also:

$$t = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{d}{2\mu E} = \frac{d^2}{2\mu U} = 0,51 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (19)$$

Diese Zeit charakterisiert auch die Laufzeitbegrenzung des Bauteils. Erst wenn die beim letzten Detektionsereignis erzeugten Elektronen die intrinsische Schicht verlassen haben und folglich kein Strom mehr fließt, kann das nächste Detektionsereignis eindeutig durch den Photostrom festgestellt werden. Aus der Gleichung 20 folgt eine Schaltzeit von etwa 5 GHz .

- (d) Wie groß ist die Kapazität der Diode, wenn eine quadratische Fläche von $100 \text{ }\mu\text{m}$ Seitenlänge angenommen wird (die Geometrie des Bauteils entnehmen Sie Abb. 9, gehen Sie von einem Plattenkondensator mit $\epsilon_r = 12$ aus)? [1 P]

Mit der Länge der intrinsischen Schicht $L = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ folgt aus der Formel für die Kapazität des Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{L} = 2,87 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0,29 \text{ pF} \quad (20)$$

- (e) Geben Sie nun die Grenzfrequenz des RC-Glieds Diode an, wenn der Widerstand $R = 50 \text{ }\Omega$ beträgt (Falls Sie den Teil d nicht lösen konnten, nehmen Sie $C = 1 \text{ pF}$ an.) [1 P]

Die Grenzfrequenz dieses RC-Glieds errechnet sich zu:

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ Hz} = 11 \text{ GHz} \quad (21)$$

Die kapazitive Grenzfrequenz ist also etwas höher als die laufzeitbedingte.

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	A s
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	A s V ⁻¹ m ⁻¹
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	V s A ⁻¹ m ⁻¹
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m s ⁻¹
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Taylor-Reihe

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in einer Taylor-Reihe um x_0 :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Hermite'sche Polynome

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

bitte wenden ...

Integrale

$$\begin{aligned}\int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\ \int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)] \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)\end{aligned}$$