

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

|         |   |    |   |   |   |   |   |          |
|---------|---|----|---|---|---|---|---|----------|
| Aufgabe | 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\Sigma$ |
| Punkte  |   |    |   |   |   |   |   |          |
| Max     | 8 | 18 | 8 | 8 | 9 | 7 | 7 | 65       |

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteilte Formelsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 65, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 35.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihre Immatrikulationsbescheinigung während der Klausur bereit.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben. Verwenden Sie insbesondere keinen Bleistift und schreiben Sie nicht in roter Farbe.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle und mit den entsprechenden Einheiten anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

---

## 1. Das freie Elektron

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von  $\lambda = 10^{-11}$  m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [2P]
- b) Freie Elektronen können beschrieben werden als ebene Welle,

$$\psi(x, t) = A \exp(j(kx - \omega t)). \quad (1)$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert  $\langle \hat{p}(t) \rangle$  für ein freies Elektron. [3P]

- c) Für den Erwartungswert des Impulsoperatorquadrats gilt beim freien Elektron  $\langle \hat{p}^2(t) \rangle = \hbar^2 k^2$ . Berechnen Sie die Unschärfe des Impulses,  $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2}$ . Falls Sie Aufgabe 1b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit  $\langle \hat{p}(t) \rangle = \hbar k$ . Was folgt daraus für die Ortsunschärfe  $\Delta x$ ? [3P]

---

## 2. Endliche Potentialstufe

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

einer endlichen Potentialstufe der Höhe  $V_0 > 0$ .

- Skizzieren Sie  $V(x)$ . [2P]
- Zeichnen sie zwei Eigenfunktionen für  $W < V_0$  und zwei Eigenfunktionen für  $W > V_0$  ein. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für  $W < V_0$  und  $W > V_0$  qualitativ? [3P]
- Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit  $W < V_0$ ? Machen Sie Lösungsansätze für die zwei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein und lösen Sie das Gleichungssystem! [9P]
- Erklären Sie in einem Satz, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn  $V_0 \rightarrow \infty$ . [1P]
- Es sei nun

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 < x < L \\ 0 & \text{für } L < x \end{cases} \quad (3)$$

Berechnen Sie den Wert der Wellenfunktion  $\psi(x)$  am Endpunkt  $x = L$  der Barriere mit Hilfe der WKB Näherung

$$\psi(L) = \psi(0) \exp \left( - \int_0^L \frac{\sqrt{(2m^*(V(x) - W))}}{\hbar} dx \right). \quad (4)$$

Es gelte  $\psi(0) = 1$ ,  $m^* = m_e$ ,  $L = 1 \text{ nm}$ ,  $V_0 = 2,0 \text{ eV}$ ,  $W = 1,9 \text{ eV}$ . [3P]

---

**3. Zustandsdichte**

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [2P]
- b) Berechnen Sie die Zustandsdichte  $g(W)$  für einen zweidimensionalen Halbleiter in parabolischer Näherung. Gehen Sie dazu von einem zweidimensionalen  $k$ -Raum aus! [6P]

---

## 4. Bandstruktur

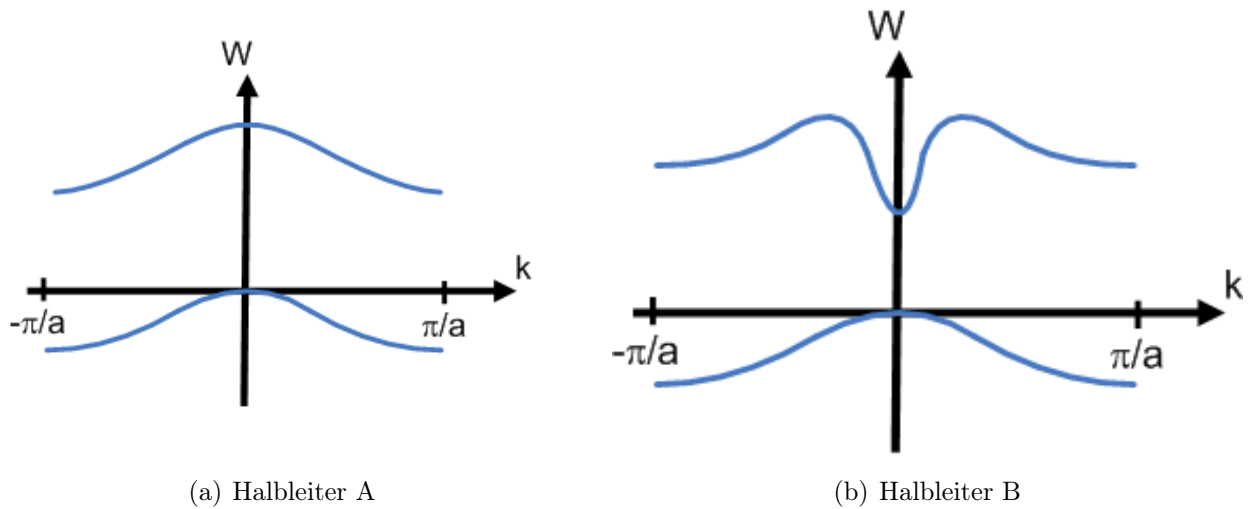


Abbildung 1: Eindimensionale schematische Darstellung der Bandstrukturen zweier Halbleiter.

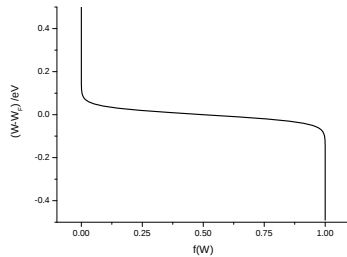
In Abbildung 1 sind idealisierte Bandstrukturen zweier Halbleiter gegeben.

- Beschriften Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils Valenzband und Leitungsband. [2P]
- Tragen Sie in die Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils die Energie der Bandlücke  $W_g$  ein. Bei welchem der Halbleiter handelt es sich um einen direkten, bei welchem um einen indirekten? [2P]
- Skizzieren Sie in den Abbildungen 1(a) und 1(b) jeweils parabolische Näherungen im Valenzbandmaximum und im Leitungsbandminimum. [2P]
- Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gegeben als  $W_L(k) = +A \cdot k^2$ , wobei  $A = \frac{\hbar^2}{0,2m_e}$ . Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband. [2P]

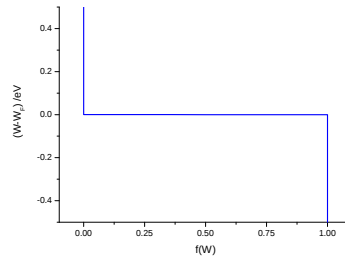
---

## 5. Leitfähigkeit

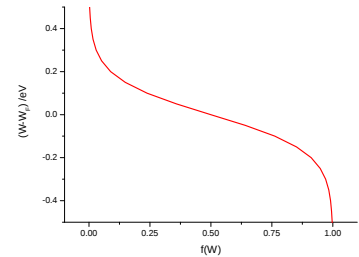
- a) In Abbildung 2 ist die Fermi-Dirac-Funktion für Temperaturen von  $T = 0$  K,  $T = 200$  K und  $T = 1000$  K aufgetragen. Ordnen Sie die Temperaturen den Verteilungen zu! [2P]



(a)  $T = \dots\dots\dots$



(b)  $T = \dots\dots\dots$



(c)  $T = \dots\dots\dots$

Abbildung 2: Fermi-Dirac-Verteilung für verschiedene Temperaturen

- b) In einem Indium-Arsenid Kristall (InAs) wird eine intrinsische Ladungsträgerdichte von  $n_i = 8,15 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  gemessen. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche  $0,02m_e$ . Bestimmen Sie die Bandlücke von Indium-Arsenid bei Raumtemperatur  $T = 300$  K. [4P]
- c) Die spezifische Leitfähigkeit eines Indium-Arsenid-Kristalls betrage  $\sigma = 10^{-2} \frac{1}{\Omega\text{cm}}$ . Bestimmen Sie die Ladungsträgerbeweglichkeiten unter der Annahme, dass  $\mu_n = 40\mu_p$  gelte. Verwenden Sie zur Berechnung die Ladungsträgerdichte aus dem vorherigen Aufgabenteil. [3P]

---

## 6. Halbleitergrundgleichungen

- a) Durch Bestrahlung ist zu einem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  in einem Halbleiter ein Profil von Elektron-Loch-Paaren der Form

$$n(x) = p(x) = g_0 \sin^2 \left( \frac{2\pi}{L} x \right) \quad (5)$$

erzeugt worden. Für die Diffusionskonstanten gelte  $D_n = 2D_p$ . Berechnen Sie die Diffusionsstromdichte  $J_x(x_0)$  an der Stelle  $x_0 = \frac{L}{8}$  in diesem Moment. [4P]

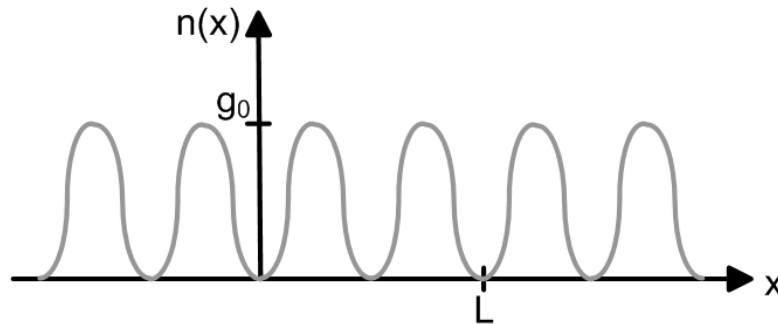


Abbildung 3: Durch Bestrahlung erzeugtes Ladungsträgerdichteprofil  $n(x)$

- b) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der freien Elektronendichte in drei Dimensionen an. Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Gleichung? [3P]

---

**7. pin-Diode**

- a) Das Raumladungsprofil in einer *pin*-Diode ohne angelegte Spannung betrage:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -l_p \\ -en_A & \text{für } -l_p < x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq l_i \\ +en_D & \text{für } l_i < x \leq l_i + l_n \\ 0 & \text{für } l_i + l_n < x \end{cases} \quad (6)$$

Skizzieren Sie das Ladungsprofil und markieren Sie alle relevanten Längen. [2P]

- b) Leiten Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld in der *pin*-Diode ohne angelegte Spannung her. [5P]

---

**Konstanten**

|                                |              |     |                                        |                   |
|--------------------------------|--------------|-----|----------------------------------------|-------------------|
| Planck'sches Wirkungsquantum   | $h$          | $=$ | $6.63 \cdot 10^{-34}$                  | Js                |
|                                | $\hbar$      | $=$ | $\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$ | Js                |
| Avogadro-Konstante             | $N_A$        | $=$ | $6.02 \cdot 10^{23}$                   | $\text{mol}^{-1}$ |
| Bohr'scher Radius              | $a_0$        | $=$ | $5.29 \cdot 10^{-11}$                  | m                 |
| Elementarladung                | $e$          | $=$ | $1.6 \cdot 10^{-19}$                   | As                |
| Atomare Masseneinheit          | $u$          | $=$ | $1.66 \cdot 10^{-27}$                  | kg                |
| Elektronenmasse                | $m_e$        | $=$ | $9.11 \cdot 10^{-31}$                  | kg                |
| Protonenmasse                  | $m_p$        | $=$ | $1.67 \cdot 10^{-27}$                  | kg                |
| Neutronenmasse                 | $m_n$        | $=$ | $1.67 \cdot 10^{-27}$                  | kg                |
| Dielektrizitätskonstante       | $\epsilon_0$ | $=$ | $8.85 \cdot 10^{-12}$                  | As/Vm             |
| Permeabilitätskonstante        | $\mu_0$      | $=$ | $4\pi \cdot 10^{-7}$                   | Vs/Am             |
| Lichtgeschwindigkeit im Vakuum | $c$          | $=$ | $3.0 \cdot 10^8$                       | m/s               |
| Boltzmann-Konstante            | $k_B$        | $=$ | $1.38 \cdot 10^{-23}$                  | J/K               |
| Kreiszahl                      | $\pi$        | $=$ | 3.14                                   |                   |
| Euler'sche Zahl                | $e$          | $=$ | 2.72                                   |                   |

**Konversion von Einheiten**

|                                               |                                                |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm | $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule            | $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  |

**Integrale**

$$\begin{aligned}
 \int (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int (\cos ax)^2 dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\
 \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} (\sin ax)^2 \\
 \int x (\sin ax)^2 dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}
 \end{aligned}$$

---

## Additionstheoreme

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)]$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$