

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	8	11	13	11	9	12	6	11	81

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 81, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 41.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was versteht man unter quarternären Halbleitern? [1P]
- b) Was ist die Born-Oppenheimer-Näherung? [1P]
- c) Nach welchen beiden Grundsätzen erfolgt die Besetzung elektronischer Niveaus im Atom? [1P]
- d) Was sind entartete Halbleiter? [1P]
- e) Wie funktioniert ein Rastertunnelmikroskop? [1P]
- f) Was unterscheidet allgemein gesehen das Prinzip der Quasi-Fermi-Niveaus von dem des „normalen“ Fermi-Niveaus? [1P]
- g) Was verbirgt sich hinter der Bezeichnung „Bloch-Elektronen“? [1P]
- h) Was beschreibt das Fermi-Niveau in einem Leiter/Halbleiter? Benutzen Sie sowohl die mathematische Definition als auch Ihre eigenen Worte, ohne dabei die Definition wiederzugeben. [1P]

2. Photonen und Elektronen

Ein Laserpointer strahlt blaues Licht der Wellenlänge 400 nm aus. Sie wollen diesen Laserpointer verwenden, um in einer Photozelle mit Natriumkathode ($W_a = 2,28$ eV) den Photoeffekt auszulösen.

- a) Ist dies möglich? Falls ja, berechnen Sie die Geschwindigkeit der erzeugten Elektronen unter der Annahme, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [2P]
- b) Sie strahlen mit diesem Laserpointer nun auf einen Film mit Silberkörnern. Bei dieser Wellenlänge benötigen Sie etwa $10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ zur Belichtung. Wie viele Photonen sind für 1 cm^2 lichtempfindliche Fläche zur Belichtung nötig? [2P]
- c) Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung, um die Dispersionsrelation des freien Elektrons herzuleiten. Gehen Sie dazu von der Beschreibung des freien Elektrons als ebene Welle aus: $\Psi(x,t) = A \exp(j(kx - \omega t))$. [3P]
- d) Nun fragen Sie sich, wie sich Elektronen und Photonen in Ihrem Dispersionsverhalten unterscheiden. Glücklicherweise fällt Ihnen noch ein, dass die Dispersionsrelation von Photonen im Vakuum gegeben ist durch $\omega_{\text{Photon}}(k) = ck$.

Berechnen Sie jeweils für Photonen im Vakuum und freie Elektronen die Gruppengeschwindigkeit v_G sowie den Dispersionsparameter $\beta = 1/2 \frac{\partial v_G}{\partial k}$. Falls Sie c) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Dispersionsrelation des freien Elektrons $\omega_{\text{Elektron}}(k) = A \cdot k^2$. [4P]

3. Potentialtopf

- a) Skizzieren Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Höhe V_0 (für Elektronen der Masse m), der räumlich zwischen 0 und $+L$ ausgedehnt ist. Das energetische Nullniveau befinde sich dabei am Topfboden. Zeichnen Sie den Realteil der Wellenfunktionen von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ in Ihre Skizze ein. [3P]
- b) Nun wird das Potential auf der linken Seite (auf der Ortsachse von $-\infty$ bis 0) auf ∞ erhöht.
Skizzieren Sie in einem neuen Koordinatensystem das so entstandene Potential. [1P]
- c) Beschreiben Sie, wie sich nun qualitativ die Form des Realteils der Wellenfunktionen ändert. [1P]
- d) Geben Sie für das Potential aus Teilaufgabe b) für $W < V_0$ die Lösungsansätze für die stationäre Schrödingergleichung in den zwei Bereichen mit endlichem Potential an und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. [4P]
- e) Leiten Sie nun die implizite Eigenwertgleichung für die Eigenenergien W für $W < V_0$ her. [4P]

4. Parabolisches Potential

Im eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ lauten die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (1)$$

und

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{b^3\sqrt{\pi}}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (2)$$

wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

- a) Berechnen Sie den Impulserwartungswert für ψ_1 ! [2P]
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert W_{kin} für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand! [3P]
- c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie Ihr Vorgehen! Falls Sie den Teil b) nicht lösen konnten, benutzen Sie $W_{kin} = K$. [1P]
- d) Sei das Potential nun mit einer großen Zahl N (N gerade) Elektronen gefüllt. Bestimmen Sie die Fermi-Energie ($T = 0$)! Welches fundamentale Prinzip muß hierbei beachtet werden? [2P]
- e) Wir betrachten nun einen halben harmonischen Oszillator mit

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } 0 \leq x. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Ortserwartungswert des Grundzustandes dieses neuen Systems! [3P]

5. Bandstruktur

- a) Erklären sie kurz, wie es zur Entstehung von Bandstrukturen in kristallinen Festkörpern kommt! Gehen sie bei Ihrer Argumentation vom Bild eines einzelnen Quantentopfes/Atoms aus und machen Sie dann den Transfer zu gekoppelten, periodisch angeordneten Quantentöpfen/Atomen. [2P]
- b) Das Leitungsband von Silizium sei durch $W_L(k) = \frac{\Delta W}{2}(1 + \cos(ka))$ annähernd beschrieben. Berechnen Sie die effektive Masse und die Gruppengeschwindigkeit eines Elektrons im Leitungsband an der Stelle $k = \pi/a$! [2P]
- c) Die Beweglichkeiten in Silizium seien $\mu_n = 1400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, die effektiven Massen seien $m_{\text{eff,e}} = 0,36 m_e$ (Elektronen) und $m_{\text{eff,h}} = 0,81 m_e$ (Löcher), die Bandlücke $W_G = 1,1 \text{ eV}$. Es herrsche Raumtemperatur (300 K). Berechnen Sie die Gesamt-Leitfähigkeit! [2P]
- d) Wie groß ist die Gesamt-Leitfähigkeit, wenn das Silizium-Plättchen nun mit $n_D = 10^{16}$ Atomen pro Kubikzentimeter n-dotiert wird? Gehen Sie bei Ihrer Rechnung von Störstellenerschöpfung aus. [1P]
- e) Wie verhält sich die Beweglichkeit der Elektronen in einem Halbleiter qualitativ mit steigender Temperatur? Fangen Sie mit Ihrer Begründung beim absoluten Tiefpunkt $T = 0$ an! (Maximal 5 Sätze) [2P]

6. Zustandsdichte

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [2P]
- b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $g_{2D}(W)$ für eine zweidimensionale Quantenstruktur mit der Kantenlänge L her. Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. Gehen Sie von einem zweidimensionalen k -Raum aus! [4P]
- c) Die Zustandsdichte im Leitungsband eines dreidimensionalen Halbleiterquaders lautet $g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$. Wie viele Zustände gibt es im Energieintervall $[W_L, W_L + 0,01 \text{ eV}]$, wenn der Festkörperblock ein Volumen von 1 mm^3 hat? Es gelte $m_{\text{eff}} = m_e$. [2P] (Anmerkung: Einige Taschenrechner können nur bedingt mit großen Zehnerpotenzen umgehen. In diesem Fall sollte man die Zehnerpotenzen per Hand kürzen.)
- d) Wie groß ist die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes $k_B T$ unterhalb bzw. oberhalb der Fermi-Energie? Ist eine Näherung dieser Besetzungswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Boltzmann-Verteilung gerechtfertigt? Begründen Sie dies! [2P]
- e) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf der Fermi-Energie W_F eines p-dotierten Siliziumchips in einem Banddiagramm! Es sei $m_{\text{eff,h}} > m_{\text{eff,e}}$. Wo liegt die Fermi-Energie bei der Temperatur $T = 0$, wo bei sehr großen Temperaturen ($T = 1000 \text{ K}$)? Skizzieren Sie zum Vergleich den Temperaturverlauf der Fermi-Energie $W_{F,i}$ ohne Dotierung ebenfalls. Beschriften Sie die Achsen und Energieniveaus eindeutig! [2P]

7. Kontinuitätsgleichung

- a) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der freien Elektronendichte in drei Dimensionen an. Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Gleichung? [3P]
- b) Wir betrachten nun einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d . An der Oberseite wird er homogen mit Licht bestrahlt. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

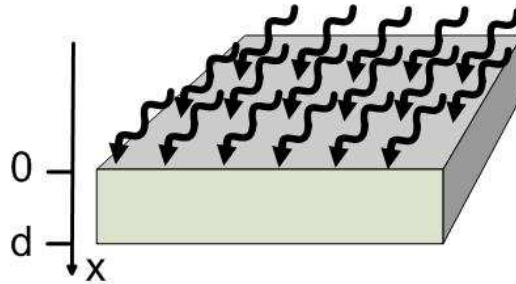


Abbildung 1: Absorption in einem Halbleiter der Dicke d

Vereinfachen Sie die Kontinuitätsgleichung für die Überschusselektronen Δn für diesen eindimensionalen Fall soweit wie möglich und erklären Sie Ihr Vorgehen. Geben Sie weiterhin die Randbedingungen für diesen Fall an. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussladungsträgerdichte Δn_0 aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus. (Das Lösen der Gleichung ist nicht verlangt.) [3P]

8. pin-Diode

Um beispielsweise die Ansprechempfindlichkeit einer Photodiode zu verbessern, werden sogenannte pin-Dioden anstelle gewöhnlicher pn-Dioden verwendet. Dabei wird zwischen p-dotierter Schicht (links) und n-dotierter Schicht (rechts) eine zusätzliche intrinsische Schicht belassen.

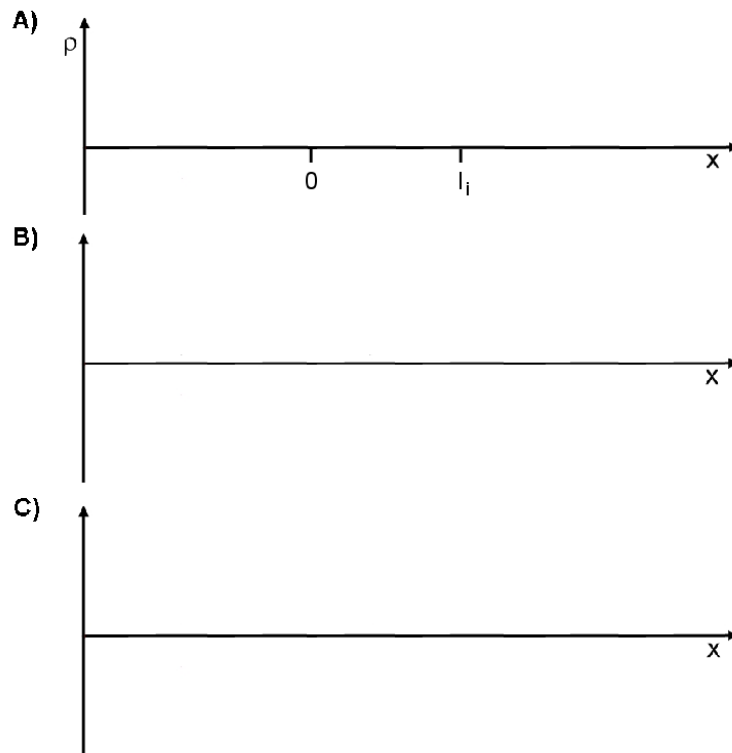


Abbildung 2: pin-Diode

- n_D beschreibe die Anzahl der Donatoren im n-dotierten Bereich, n_A die Anzahl der Akzeptoren im p-dotierten Bereich. Die beiden Schichten seien so dotiert, dass $n_D = C \cdot n_A$ gilt. Welcher Zusammenhang gilt dann zwischen l_n und l_p , den Ausdehnungen der Raumladungszone im n- bzw. p-Bereich? Gehen Sie von Störstellenerschöpfung und der Gültigkeit der Schottky-Näherung aus. [2P]
- Zeichnen Sie mit Hilfe des von Ihnen ermittelten Zusammenhangs aus a) den Raumladungsdichteverlauf in Abbildung 2 A) ein. Dabei erstrecke sich der intrinsische Bereich von 0 bis l_i . Es gelte $l_p = l_i$, $C = 4$, $n_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Falls Sie a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\sqrt{C} \cdot l_n = l_p$. [2P]
- Zeichnen Sie qualitativ (keine Rechnung notwendig) den Verlauf des elektrischen Feldes sowie des Potentials Φ in Abbildung 2 B) bzw. C) ein. Gehen Sie für das Potential davon aus, dass $\Phi(x \rightarrow \infty) = 0$. [4P]
- Nun wird die Breite der intrinsischen Schicht auf $l_i = 0$ reduziert, l_n und l_p behalten ihre jeweilige Größe. Berechnen Sie die Diffusionsspannung U_D des entstandenen

Bauteils. Verwenden Sie die Dotierwerte aus Teilaufgaben a) und b) und gehen Sie außerdem davon aus, dass die Diode aus Silizium ist ($W_G = 1,1$ eV), Raumtemperatur herrscht ($T = 300$ K) und dass die effektiven Massen der Elektronen sowie der Löcher im intrinsischen Halbleiter der freien Elektronenmasse entsprechen. [3P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	1 u	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
Elektronenvolt → Joule	1 eV	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{array}{ll}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2}
\end{array}$$