

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									
Max	8	11	13	11	9	12	6	11	81

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 81, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 41.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was versteht man unter quarternären Halbleitern? [1P] *Quarternäre Halbleiter bestehen aus vier verschiedenen Komponenten (Materialien), die sich zu einem Halbleiter verbinden.*
- b) Was ist die Born-Oppenheimer-Näherung? [1P] *Bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung in einem System von schweren und leichten Teilchen wird die Bewegung der langsameren Teilchen (z.B. im Wasserstoffatom die Bewegung des Kerns) gegenüber der Bewegung schnellerer Teilchen (z.B. der Elektronen) vernachlässigt.*
- c) Nach welchen beiden Grundsätzen erfolgt die Besetzung elektronischer Niveaus im Atom? [1P] *Die Niveaus werden so besetzt, dass i) das Pauliprinzip erfüllt ist und ii) die Gesamtenergie des Atoms im Grundzustand minimal wird.*
- d) Was sind entartete Halbleiter? [1P] *Bei sehr stark dotierten Halbleitern kann das Fermi-Niveau innerhalb eines Bandes liegen, womit Halbleiterband und Dotieratomband verschmelzen. Entartete Halbleiter zeigen daher metallische Eigenschaften.*
- e) Wie funktioniert ein Rastertunnelmikroskop? [1P] *Eine extrem spitze Metallelektrode wird im Vakuum sehr dicht über eine Oberfläche eines Materials geführt. Durch den Tunneleffekt kommt es zu einem Strom aus der Metallspitze durch die Potentialbarriere in die Atome an der Oberfläche des Materials. Da dieser Tunnelstrom nichtlinear ist, kann eine extrem hohe räumliche Auflösung (sogar atomar) erzielt werden.*
- f) Was unterscheidet allgemein gesehen das Prinzip der Quasi-Fermi-Niveaus von dem des „normalen“ Fermi-Niveaus? [1P] *Wird an ein Halbleiter-Bauteil z.B. eine Spannung von außen angelegt, so wird der ursprüngliche Gleichgewichtszustand, beschrieben durch die Fermi-Energie, gestört und das Fermi-Niveau spaltet sich in zwei Niveaus auf - eines für Elektronen und eines für Löcher.*
- g) Was verbirgt sich hinter der Bezeichnung „Bloch-Elektronen“? [1P] *Als Bloch-Elektronen beschreibt man Elektronen in einem perfekten Kristall mit periodischen Potential, deren Wellenfunktion durch das Bloch-Theorem $\psi(x) = \exp(ikx)u(x)$ beschrieben wird.*
- h) Was beschreibt das Fermi-Niveau in einem Leiter/Halbleiter? Benutzen Sie sowohl die mathematische Definition als auch Ihre eigenen Worte, ohne dabei die Definition wiederzugeben. [1P] *Das Fermi-Niveau ist die Energie, bei der die Besetzungswahrscheinlichkeit für eine endliche Temperatur $T \geq 0$ genau $1/2$ beträgt. Das bedeutet auch, dass oberhalb des Fermi-Niveaus einige zusätzliche Zustände besetzt sind, die dafür unterhalb des Fermi-Niveaus nicht besetzt werden. Dabei sind immer mehr Zustände unterhalb als oberhalb besetzt.*

2. Photonen und Elektronen

Ein Laserpointer strahlt blaues Licht der Wellenlänge 400 nm aus. Sie wollen diesen Laserpointer verwenden, um in einer Photozelle mit Natriumkathode ($W_a = 2,28$ eV) den Photoeffekt auszulösen.

- a) Ist dies möglich? Falls ja, berechnen Sie die Geschwindigkeit der erzeugten Elektronen unter der Annahme, dass die nach der Erzeugung verbleibende Energie vollständig in kinetische Energie umgewandelt wird. [2P]

$$W_{\text{Laser}} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 3,10 \text{ eV} > 2,28 \text{ eV}$$

Der Photoeffekt ausgelöst werden. Die Energiedifferenz beträgt 0,82 eV. Diese Energie soll vollständig den erzeugten Elektronen zur Verfügung gestellt werden, also gilt:

$$W_{\text{Photon}} = h\nu \stackrel{!}{=} W_A + W_{\text{kin, Elektron}} = W_A + \frac{1}{2}m_e v_{\text{max}}^2, \quad (1)$$

und damit schließlich für die Geschwindigkeit (unter Beachtung der Umwandlung von eV in J für SI-Einheiten)

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} (h\nu - W_A)} = 5,37 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \quad (2)$$

- b) Sie strahlen mit diesem Laserpointer nun auf einen Film mit Silberkörnern. Bei dieser Wellenlänge benötigen Sie etwa $10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ zur Belichtung. Wie viele Photonen sind für 1 cm² lichtempfindliche Fläche zur Belichtung nötig? [2P]

Ein Lichtquant bei 400 nm trägt $W_{\text{Photon}} = hc/\lambda = 4,69 \cdot 10^{-19}$ J Energie. Auf die Fläche A von 1 cm² benötigt man für die Belichtungs-dosis $S = 10^{-5}$ J/m² also $n = S \cdot A/W_{\text{Photon}} \approx 2 \cdot 10^9$ Photonen.

- c) Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung, um die Dispersionsrelation des freien Elektrons herzuleiten. Gehen Sie dazu von der Beschreibung des freien Elektrons als ebene Welle aus: $\Psi(x,t) = A \exp(j(kx - \omega t))$. [3P]

$$\begin{aligned} j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right) \psi(x,t) \\ j\hbar \frac{\partial}{\partial t} A \exp(j(kx - \omega t)) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ j\hbar(-j\omega) A \exp(j(kx - \omega t)) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (j^2 k^2) A \exp(j(kx - \omega t)) \\ \hbar\omega &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ \omega &= \frac{\hbar k^2}{2m} \end{aligned}$$

-
- d) Nun fragen Sie sich, wie sich Elektronen und Photonen in Ihrem Dispersionsverhalten unterscheiden. Glücklicherweise fällt Ihnen noch ein, dass die Dispersionsrelation von Photonen im Vakuum gegeben ist durch $\omega_{\text{Photon}}(k) = ck$.

Berechnen Sie jeweils für Photonen im Vakuum und freie Elektronen die Gruppengeschwindigkeit v_G sowie den Dispersionsparameter $\beta = 1/2 \frac{\partial v_G}{\partial k}$. Falls Sie c) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Dispersionsrelation des freien Elektrons $\omega_{\text{Elektron}}(k) = A \cdot k^2$. [4P]

Zunächst ist allgemein $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$.

Für Photonen ergibt sich

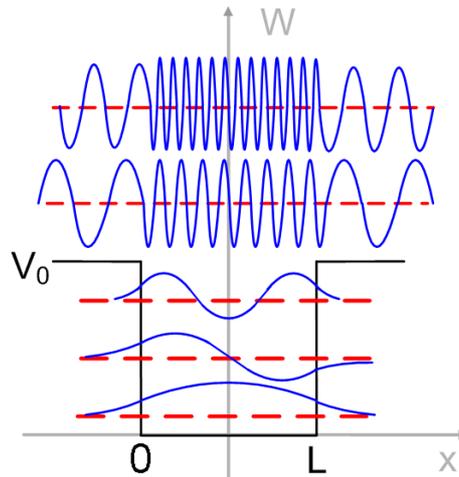
$$v_g = c \text{ und } \beta = 0,$$

für Elektronen folgt

$$v_g = \frac{\hbar k}{m_e} \text{ und } \beta = \frac{\hbar}{2m_e}.$$

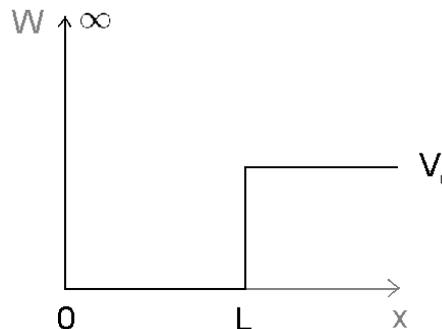
3. Potentialtopf

- a) Skizzieren Sie einen eindimensionalen Potentialtopf der Höhe V_0 (für Elektronen der Masse m), der räumlich zwischen 0 und $+L$ ausgedehnt ist. Das energetische Nullniveau befinde sich dabei am Topfboden. Zeichnen Sie den Realteil der Wellenfunktionen von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ in Ihre Skizze ein. [3P]



- b) Nun wird das Potential auf der linken Seite (auf der Ortsachse von $-\infty$ bis 0) auf ∞ erhöht.

Skizzieren Sie in einem neuen Koordinatensystem das so entstandene Potential. [1P]



- c) Beschreiben Sie, wie sich nun qualitativ die Form des Realteils der Wellenfunktionen ändert. [1P]

Bei $x = 0$ ergeben sich Knoten der Wellenfunktionen, es ist kein Eindringen in den Bereich $x < 0$ mehr möglich.

- d) Geben Sie für das Potential aus Teilaufgabe b) für $W < V_0$ die Lösungsansätze für die stationäre Schrödingergleichung in den zwei Bereichen mit endlichem Potential an und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. [4P]

Durch Betrachten des in Aufgabenteil b) skizzierten Potentials ist direkt klar, dass im Bereich $0 < x < L$ eine schwingende Welle, im Bereich $x > L$ eine exponentiell abklingende Welle vorliegen muss. Damit ergibt sich für die Lösungsansätze:

$$\begin{aligned}
0 < x < L : \Psi_1(x) &= A \exp(jk_1x) + B \exp(-jk_1x) \\
x > L : \Psi_2(x) &= C \exp(-\kappa_2x)
\end{aligned}$$

Dabei gilt für k_1 bzw. κ_2 durch Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung als Eigenwertproblem (kann auch erst für den nächsten Aufgabenteil berechnet werden):

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} \\
\kappa_2 &= \sqrt{\frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2}}
\end{aligned}$$

Drei Rand- und Nebenbedingungen lassen sich aufstellen:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(0) &= 0 \\
\Psi_1(L) &= \Psi_2(L) \\
\Psi_1'(L) &= \Psi_2'(L)
\end{aligned}$$

- e) Leiten Sie nun die implizite Eigenwertgleichung für die Eigenenergien W für $W < V_0$ her. [4P]

Wir wenden zunächst die erste Bedingung an:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(0) = A + B = 0 &\Rightarrow B = -A \\
\Rightarrow \Psi_1(x) &= A \exp(jk_1x) - A \exp(-jk_1x)
\end{aligned}$$

Damit gilt (z.B. unter Zuhilfenahme des Formelblattes am Ende der Klausur)

$$\Psi_1(x) = 2j \sin(k_1x)$$

Aus Bedingungen zwei und drei folgt damit

$$\begin{aligned}
2Aj \sin(k_1L) &= C \exp(-\kappa_2L) \\
2Ak_1j \cos(k_1L) &= -C\kappa_2 \exp(-\kappa_2L).
\end{aligned}$$

Teilen wir die beiden Gleichungen durcheinander, erhalten wir

$$\frac{k_1}{\kappa_2} = -\tan(k_1L)$$

und schließlich damit durch Einsetzen der Energien mit dem Zwischenergebnis aus Aufgabenteil b)

$$\sqrt{\frac{W}{V_0 - W}} = -\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}L\right).$$

4. Parabolisches Potential

Im eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ lauten die normierten Wellenfunktionen des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (3)$$

und

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{b^3\sqrt{\pi}}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (4)$$

wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

- a) Berechnen Sie den Impulserwartungswert für ψ_1 ! [2P]

Der Impulserwartungswert $\langle p \rangle = \langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \rangle$ der quantenmechanischen Zustandsfunktion ψ_1 berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)^* \cdot (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot \psi_1(x) dx \\ &= \frac{2}{b^3\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{x^3}{b^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \right) dx = 0 \end{aligned}$$

Das heißt, dass sich das Elektron im Mittel nicht bewegt. Dies lässt sich auch anhand von Symmetrie-Überlegungen begründen, ohne explizit zu rechnen.

- b) Berechnen Sie den Erwartungswert W_{kin} für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand! [3P]

Die kinetische Energie ergibt sich zu $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$. In Operatorschreibweise setzen wir den Impulsoperator ein, also $\hat{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, somit erhalten wir für den Operator der kinetischen Energie:

$$\hat{W}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{W}_{kin} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{W} \psi_0 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b^2} \sqrt{b^2 \pi} + \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2 \pi}\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2 \pi} = \frac{1}{4} \hbar \omega
\end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie Ihr Vorgehen! Falls Sie den Teil b) nicht lösen konnten, benutzen Sie $W_{kin} = K$. [1P]

Die Gesamtenergie des Grundzustands des harmonischen Oszillators ist $W_G = \frac{1}{2} \hbar \omega$. Die Gesamtenergie berechnet sich aus der Summe der potentiellen und kinetischen Energie, gleiches gilt auch für die Erwartungswerte. Mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe erhalten wir $\langle \hat{W}_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \hbar \omega$ bzw. $\langle \hat{W}_{pot} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega - K$.

- d) Sei das Potential nun mit einer großen Zahl N (N gerade) Elektronen gefüllt. Bestimmen Sie die Fermi-Energie ($T = 0$)! Welches fundamentale Prinzip muß hierbei beachtet werden? [2P]

Für die möglichen Eigen-Energien in einem harmonischen Potential gilt: $E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$. Jedes Energie-Niveau kann entsprechend dem Pauli-Prinzip mit 2 Elektronen („Spin hoch“ und „Spin runter“) besetzt werden. Dementsprechend ist der höchste besetzte Zustand $n = N/2$. Daraus folgt, dass die höchste noch besetzte Energie $E_F = \hbar \omega \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right) = \hbar \omega \frac{(N+1)}{2}$ ist.

- e) Wir betrachten nun einen halben harmonischen Oszillator mit

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 & \text{für } 0 \leq x. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Ortserwartungswert des Grundzustandes dieses neuen Systems! [3P]

Da dies ein neues System ist, gibt es auch neue Zustandsfunktionen. Allerdings ist leicht einsehbar, dass alle Zustandsfunktionen des normalen harmonischen Oszillators mit einem Knoten in der Mitte qualitativ gerade die Lösungen des halben

Oszillators für $x \geq 0$ sind, während die Zustandsfunktionen für $x < 0$ verschwinden, da die Zustandsfunktionen in den Knotenpunkten gerade 0 sind, was die Stetigkeitsbedingung im halben harmonischen Oszillator direkt erfüllt. Somit ist der Grundzustand $\psi_{0,halb}(x)$ des halben Oszillators

$$\psi_{0,halb}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ a\psi_1(x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

wobei der Vorfaktor $a = \sqrt{2}$ aus der neuen Normierung folgt:

$$1 \equiv \int_0^{\infty} a^2 \psi_1^2(x) dx = \frac{a^2}{2}$$

Für die Berechnung des Ortserwartungswertes muss man den Ortsoperator x verwenden:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{0,halb}(x)^* x \psi_{0,halb}(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \psi_1(x)^* x \psi_1(x) dx \\ &= 2 \frac{2}{b^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx \\ &= \frac{4}{b^3 \sqrt{\pi}} \frac{b^4}{2} \\ &= \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

5. Bandstruktur

- a) Erklären sie kurz, wie es zur Entstehung von Bandstrukturen in kristallinen Festkörpern kommt! Gehen sie bei Ihrer Argumentation vom Bild eines einzelnen Quantentopfes/Atoms aus und machen Sie dann den Transfer zu gekoppelten, periodisch angeordneten Quantentöpfen/Atomen. [2P]

In einem isolierten Atom/Quantentopf sind die Wellenfunktionen lokalisiert und die Eigenenergien der Elektronen besitzen diskrete Werte. Bringt man nun N solcher abgeschlossenen Elektronen-Potentialtöpfe zusammen, so überlappen die Wellenfunktionen und ändern ihre Form, die einzelnen Energieniveaus spalten jeweils in N neue Energien auf. Da N typischerweise groß ist ($\approx 10^{23}$), kommt es zu einer extrem feinen Aufspaltung der einzelnen Energieniveaus - es entstehen Bereiche von sehr nahe beieinander liegenden, quasi kontinuierlich verteilten Energieniveaus, die sogenannten Energiebänder. Nur innerhalb eines solchen Bandes liegen erlaubte Zustände, außerhalb der Bänder gibt es keine elektronischen Zustände. Diese unerlaubten Bereiche sind die Bandlücken.

- b) Das Leitungsband von Silizium sei durch $W_L(k) = \frac{\Delta W}{2}(1 + \cos(ka))$ annähernd beschrieben. Berechnen Sie die die Gruppengeschwindigkeit und effektive Masse eines Elektrons im Leitungsband an der Stelle $k = \pi/a$! [2P]

Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist wie folgt definiert

$$v_g := \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k}$$

Damit ist $v_g = \frac{-a\Delta W}{2\hbar} \sin(ka) = 0$ an der Stelle $k = \pi/a$.

Die effektive Masse m_{eff} ist wie folgt definiert

$$m_{\text{eff}} := \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

Damit ist $m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{-a^2\Delta W}{2} \cos(ka) \right)^{-1} = \frac{2\hbar^2}{a^2\Delta W}$ an der Stelle $k = \pi/a$.

- c) Die Beweglichkeiten in Silizium seien $\mu_n = 1400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, die effektiven Massen seien $m_{\text{eff,e}} = 0,36 m_e$ (Elektronen) und $m_{\text{eff,h}} = 0,81 m_e$ (Löcher), die Bandlücke $W_G = 1,1 \text{ eV}$. Es herrsche Raumtemperatur (300 K). Berechnen Sie die Gesamt-Leitfähigkeit! [2P]

Die Gesamt-Leitfähigkeit ist definiert als

$$\sigma := e(p\mu_p + n\mu_n).$$

Hierbei ist e die Elementarladung, p bzw. n die Löcher- bzw. Elektronendichte und μ_p bzw. μ_n die Löcher- bzw. Elektronenbeweglichkeit. Das heißt wir müssen noch Werte für die Ladungsträgerdichten finden. Dazu verwenden wir

$$\begin{aligned}
 p = n = n_i &= \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) \\
 &= 2 \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} m_{\text{eff},e}^{3/4} m_{\text{eff},h}^{3/4} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 5,84 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Gesamtleitfähigkeit $\sigma = 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ S/cm}$.

- d) Wie groß ist die Gesamt-Leitfähigkeit, wenn das Silizium-Plättchen nun mit $n_D = 10^{16}$ Atomen pro Kubikzentimeter n-dotiert wird? Gehen Sie bei Ihrer Rechnung von Störstellenerschöpfung aus. [1P]

Aufgrund der Störstellenerschöpfung ist $n_D \gg n, p$. Daher vereinfacht sich die Berechnung der Leitfähigkeit zu $\sigma = e \cdot n_D \cdot \mu_n = 2,24 \text{ S/cm}$.

- e) Wie verhält sich die Beweglichkeit der Elektronen in einem Halbleiter qualitativ mit steigender Temperatur? Fangen Sie mit Ihrer Begründung beim absoluten Tiefpunkt $T = 0$ an! (Maximal 5 Sätze) [2P]

Bei geringen Temperaturen werden die Ladungsträger hauptsächlich an geladenen Störstellen gestreut. Bei niedrigen Temperaturen bedeutet dies, dass sich die Beweglichkeit aufgrund der thermischen Bewegung insgesamt wie $\mu \propto T^{3/2}$ verhält. Steigt die Temperatur, so überwiegt irgendwann die Streuung an Phononen, da das Atom-Gitter auch immer stärker in Bewegung gerät. Dann gilt $\mu \propto T^{-3/2}$.

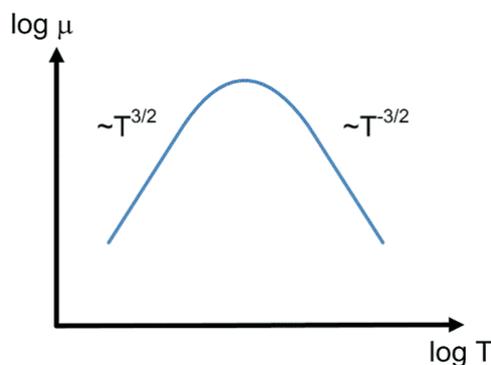


Abbildung 1: Qualitativer Temperaturverlauf der Beweglichkeit μ .

6. Zustandsdichte

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! [2P]

Der Begriff Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit «Zustände pro Energie und pro Volumen» zu tun. Meistens meint man im Rahmen der Vorlesung die Zustandsdichte von Elektronen, man kann aber auch für andere (Quasi-) Teilchen Zustandsdichten bestimmen, z.B. für die Quanten der Gitterschwingungen, die sogenannten Phononen.

- b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $g_{2D}(W)$ für eine zweidimensionale Quantenstruktur mit der Kantenlänge L her. Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. Gehen Sie von einem zweidimensionalen k -Raum aus! [4P]
- Gemäß der parabolischen Näherung gilt zwischen Eigenenergie W , Leitungsbandkante W_L und Wellenzahl k im zweidimensionalen Fall folgende Beziehung*

$$W - W_L = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m}. \quad (5)$$

Die Fläche eines Zustands im zweidimensionalen k -Raum ist

$$L_{\text{Zustand}} = \frac{4\pi^2}{L^2}. \quad (6)$$

Alle Zustände mit einer Energie kleiner W liegen maximal $k_R = \sqrt{\frac{2m(W-W_L)}{\hbar^2}}$ vom Ursprung entfernt. So erhalten wir für die Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{A_{\text{alle Zustände}}}{A_{\text{ein Zustand}}} = \frac{\pi k_R^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{L^2 m (W - W_L)}{2\pi \hbar^2} \quad (7)$$

Der Zuwachs wird

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{L^2 m}{2\pi \hbar^2} \quad (8)$$

und für die Zustandsdichte folgt

$$g(W)_{2D} = 2 \frac{1}{L^2} D(W) = \frac{m}{\pi \hbar^2} \quad (9)$$

- c) Die Zustandsdichte im Leitungsband eines dreidimensionalen Halbleiterquaders lautet $g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}$. Wie viele Zustände gibt es im Energieintervall $[W_L, W_L + 0,01 \text{ eV}]$, wenn der Festkörperblock ein Volumen von 1 mm^3 hat? Es gelte $m_{\text{eff}} = m_e$. [2P] (Anmerkung: Einige Taschenrechner können nur bedingt mit großen

Zehnerpotenzen umgehen. In diesem Fall sollte man die Zehnerpotenzen per Hand kürzen.)

Durch Integration der Zustandsdichte über das Energieintervall erhält man die Anzahl der Zustände pro Volumen:

$$\begin{aligned}
 n(W) &= \int_{W_L}^{W_L+0.01eV} g_{3D}(W) dW \\
 &= \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (0.01eV \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J/eV)^{3/2} \\
 &= 4.53 \cdot 10^{24} m^{-3}
 \end{aligned}$$

Mit dem Volumen von $V = 1 \text{ mm}^3$ erhält man

$$N = 4,53 \cdot 10^{15}$$

Zustände in diesem Halbleiterwürfel.

- d) Wie groß ist die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes $k_B T$ unterhalb bzw. oberhalb der Fermi-Energie? Ist eine Näherung dieser Besetzungswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Boltzmann-Verteilung gerechtfertigt? Begründen Sie dies! [2P]

Oberhalb ist die Besetzungswahrscheinlichkeit gemäß der Fermi-Dirac-Verteilung $f(W = W_F + k_B T, T) = 0,27$, unterhalb $f(W = W_F - k_B T, T) = 0,73$. Die Näherung durch eine Boltzmann-Verteilung ist nicht gerechtfertigt, da diese nur dann gilt, wenn $W - W_F \gg k_B T$.

- e) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf der Fermi-Energie W_F eines p-dotierten Siliziumchips in einem Banddiagramm! Es sei $m_{\text{eff,h}} > m_{\text{eff,e}}$. Wo liegt die Fermi-Energie bei der Temperatur $T = 0$, wo bei sehr großen Temperaturen ($T = 1000 \text{ K}$)? Skizzieren Sie zum Vergleich den Temperaturverlauf der Fermi-Energie $W_{F,i}$ ohne Dotierung ebenfalls. Beschriften Sie die Achsen und Energieniveaus eindeutig! [2P]

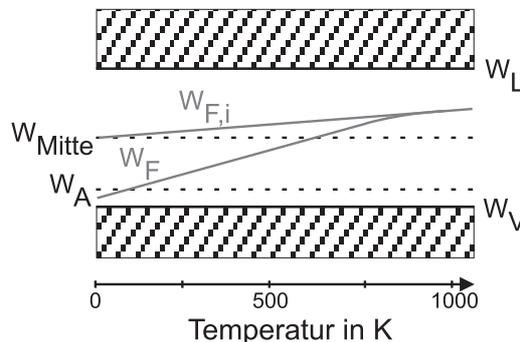


Abbildung 2: Temperaturverlauf des Fermi-Niveaus in einem p-dotierten Halbleiter.

Die Fermi-Energie W_F ist bei $T = 0$ zwischen Valenzband und Akzeptorniveau und nähert sich dann linear dem intrinsischen Fermi-Niveau $W_{F,i}$. Hierbei ist nicht wichtig, wo genau die beiden Niveaus konvergieren, sondern nur, dass beide Niveaus linear verlaufen und am Ende oberhalb von W_{Mitte} konvergieren.

7. Kontinuitätsgleichung

- a) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung zur Beschreibung der Entwicklung der freien Elektronendichte in drei Dimensionen an. Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Gleichung? [3P]

Zur Berechnung der Entwicklung der Elektronendichte benutzen wir die Kontinuitätsgleichung für Elektronen:

$$\frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + g_n(\vec{x}, t) - r_n(\vec{x}, t)$$

Sie beschreibt die zeitliche Änderung der Elektronendichte (linke Seite), welche sich zusammensetzt aus der Divergenz (also der räumlichen Änderung) der Stromdichte (erster Summand), sowie der Generationsrate (zweiter Summand) und der subtrahierten Rekombinationsrate.

- b) Wir betrachten nun einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d . An der Oberseite wird er homogen mit Licht bestrahlt. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

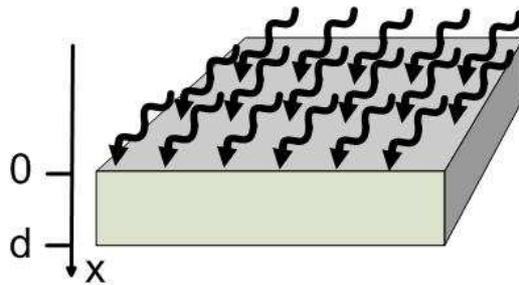


Abbildung 3: Absorption in einem Halbleiter der Dicke d

Vereinfachen Sie die Kontinuitätsgleichung für die Überschusselektronen Δn für diesen eindimensionalen Fall soweit wie möglich und erklären Sie Ihr Vorgehen. Geben Sie weiterhin die Randbedingungen für diesen Fall an. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussladungsträgerdichte Δn_0 aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus. (Das Lösen der Gleichung ist nicht verlangt.) [3P]

Wir können uns auf die Überschussladungsträgerdichte beschränken, stellen also die Kontinuitätsgleichung für Δn auf. Da Ladungsneutralität herrscht, betrachten wir nur einen Diffusionsstrom. Außerhalb der Randzone gibt es keine Generation, für die Rekombination verwenden wir nach Aufgabenstellung $r = \Delta n / \tau_n$. Insgesamt gilt also:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (10)$$

Da die Bestrahlung stationär ist, erwarten wir zudem keine zeitliche Änderung, d.h. $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$. Somit gilt:

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (11)$$

Auf der oberen Seite des Quaders legt die Injektion der Ladungsträger durch Bestrahlung die Randbedingung fest.

$$\Delta n(x = 0) = \Delta n_0 \quad (12)$$

Alle Elektronen, die die Unterseite erreichen, werden sofort weggesaugt.

$$\Delta n(x = d) = 0 \quad (13)$$

8. pin-Diode

Um beispielsweise die Ansprechempfindlichkeit einer Photodiode zu verbessern, werden sogenannte pin-Dioden anstelle gewöhnlicher pn-Dioden verwendet. Dabei wird zwischen p-dotierter Schicht (links) und n-dotierter Schicht (rechts) eine zusätzliche intrinsische Schicht belassen.

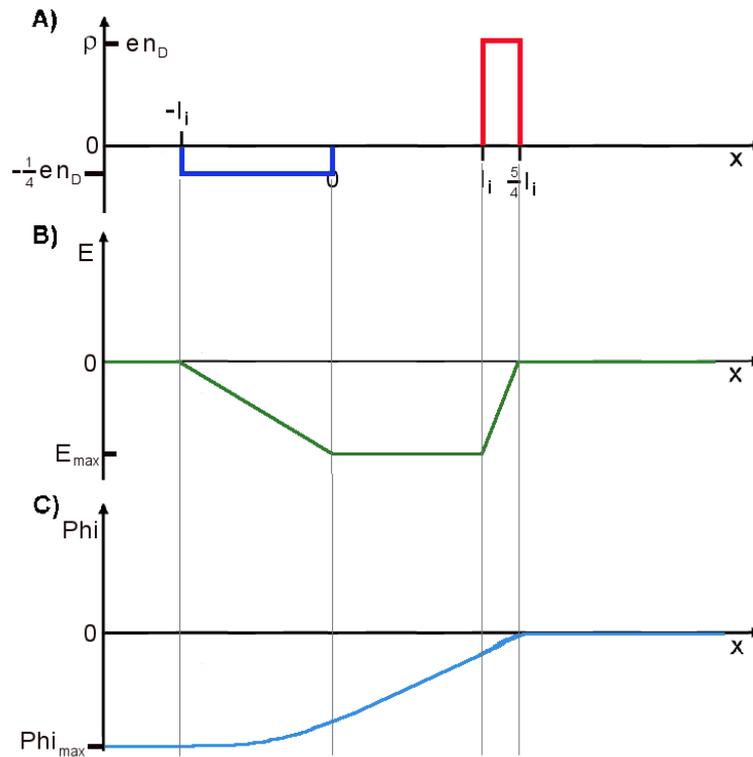


Abbildung 4: pin-Diode

- a) n_D beschreibe die Anzahl der Donatoren im n-dotierten Bereich, n_A die Anzahl der Akzeptoren im p-dotierten Bereich. Die beiden Schichten seien so dotiert, dass $n_D = C \cdot n_A$ gilt. Welcher Zusammenhang gilt dann zwischen l_n und l_p , den Ausdehnungen der Raumladungszone im n- bzw. p-Bereich? Gehen Sie von Störstellenerschöpfung und der Gültigkeit der Schottky-Näherung aus. [2P]

Wie im Skript vorgestellt kann man von der Ladungsneutralität des Halbleiters ausgehen, also gilt

$$n_D l_n = n_A l_p. \quad (14)$$

Mit $n_D = C \cdot n_A$ folgt daher direkt

$$C \cdot n_A l_n = n_A l_p \quad (15)$$

und damit die Beziehung

$$C \cdot l_n = l_p. \quad (16)$$

- b) Zeichnen Sie mit Hilfe des von Ihnen ermittelten Zusammenhangs aus a) den Raumladungsdichteverlauf in Abbildung 4 A) ein. Dabei erstrecke sich der intrinsische Bereich von 0 bis l_i . Es gelte $l_p = l_i$, $C = 4$, $n_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Falls Sie a) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\sqrt{C} \cdot l_n = l_p$. [2P]

Skizze bereits in Abbildung 1 A) eingetragen.

- c) Zeichnen Sie qualitativ (keine Rechnung notwendig) den Verlauf des elektrischen Feldes sowie des Potentials Φ in Abbildung 4 B) bzw. C) ein. Gehen Sie für das Potential davon aus, dass $\Phi(x \rightarrow \infty) = 0$. [4P]

Skizzen bereits in Abbildung 1 B) bzw. C) eingetragen.

- d) Nun wird die Breite der intrinsischen Schicht auf $l_i = 0$ reduziert, l_n und l_p behalten ihre jeweilige Größe. Berechnen Sie die Diffusionsspannung U_D des entstandenen Bauteils. Verwenden Sie die Dotierwerte aus Teilaufgaben a) und b) und gehen Sie außerdem davon aus, dass die Diode aus Silizium ist ($W_G = 1,1 \text{ eV}$), Raumtemperatur herrscht ($T = 300 \text{ K}$) und dass die effektiven Massen der Elektronen sowie der Löcher im intrinsischen Halbleiter der freien Elektronenmasse entsprechen. [3P]

Da $l_i = 0$ gesetzt wurde, ist einfach die Diffusionsspannung einer pn-Diode gefragt. Zunächst gilt daher:

$$U_D = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_A n_D}{n_i^2}\right) = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{\frac{1}{4} n_D^2}{n_i^2}\right). \quad (17)$$

Um diesen Ausdruck auszuwerten, muss noch n_i berechnet werden:

$$n_i = \frac{2}{h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_G}{2kT}\right) \approx 1,47 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}. \quad (18)$$

Setzt man nun auch die übrigen Werte in die erste Gleichung ein, erhält man schließlich

$$U_D \approx 0,66 \text{ V}. \quad (19)$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6.63 \cdot 10^{-34}$	J s
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3.14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2.72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	1 u	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
Elektronenvolt → Joule	1 eV	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2}\end{aligned}$$