

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	5	7	7	8	8	10	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was besagt die BORN-OPPENHEIMER-Näherung? [1P]

Aufgrund der viel größeren Masse des Kerns kann dessen Bewegungsenergie bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung vernachlässigt werden. Dadurch wird z.B. beim Wasserstoffatom eine verhältnismäßig einfache analytische Berechnung möglich.

- b) Welche Beziehung wird in der Festkörperphysik über die Dispersionsrelation für Elektronen hergestellt? Warum unterscheidet sich die Dispersionsrelation des freien Elektrons von der Dispersionsrelation des Kristallelektrons? [2P]

Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl k (in 3-D dem Wellenvektor \vec{k}), die mit dem Impuls des Elektrons verknüpft ist, und der Kreisfrequenz ω , die mit der Energie des Elektrons verknüpft ist, an. Sie wird über die Schrödingergleichung berechnet und berücksichtigt daher auch äußere Einflüsse, wie das periodische Potential der Kerne und das Mehrteilchensystem im Kristall. Aus dem parabolischen Zusammenhang des freien Elektrons entwickelt sich dadurch die kompliziertere Bandstruktur der Kristallelektronen.

- c) Was sind Phononen? [1P]

Die thermisch induzierte Bewegung von Rumpfatomen um ihre Ruhelage führt zu Gitterschwingungen, die wie Quasiteilchen behandelt werden können und als Phononen bezeichnet werden.

- d) Was sind entartete Halbleiter? [1P]

Bei sehr stark dotierten Halbleitern bilden die Energieniveaus der Dotieratome aufgrund ihrer Wechselwirkung ein Band, das sich mit dem Leitungs- bzw. Valenzband des Halbleiters überlappt. Bereits bei sehr geringen Temperaturen werden viele Dotanden ionisiert und steuern freie Ladungsträger bei. Der Halbleiter verhält sich näherungsweise metallisch. Das Fermi-niveau liegt je nach Art der Dotierung innerhalb des Valenz- oder Leitungsbandes.

- e) Wie ist die Temperaturspannung U_T laut Formel im Skript definiert? Wie groß ist sie bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$)? [1P]

$$U_T = \frac{k_B T}{e}$$

$$\Rightarrow U_T(T = 300\text{ K}) \approx 26\text{ meV}$$

- f) Was sind Quasi-Fermi-niveaus? [1P]

Das Fermi-niveau bezeichnet das elektrochemische Potential des Halbleiters im Gleichgewichtszustand. Es bestimmt also die ortsabhängige Konzentration der Elektronen und gleichzeitig auch der Löcher im Halbleiter. Bei einer Störung des ther-

modynamischen Gleichgewichts (z.B. pn-Übergang unter Vorspannung) können die Konzentrationen der Elektronen und Löcher aber unabhängig voneinander am selben Ort von ihrer Gleichgewichtskonzentration abweichen. Es werden dann Fermi-niveaus sowohl für die Löcher als auch die Elektronen benötigt, die Quasi-Fermi-niveaus.

g) Was ist ein amphoterer Dotand? [1P]

Dotanden, die einen Halbleiter sowohl p- als auch n-dotieren können, werden als amphoter bezeichnet.

h) Was besagt die Kugelpackungsdichte eines Raumgitters? Ist Sie in einem fcc- oder bcc-Gitter größer? [1P]

Sie gibt an, wie viel Raum des Gitters durch gleich große Kugeln maximal ausgefüllt werden kann. Die Kugelpackungsdichte des fcc-Gitters (0,74) ist maximal und größer als die Kugelpackungsdichte des bcc-Gitters (0,68).

2. Das Wasserstoffatom

Die normierte radialsymmetrische Wellenfunktion eines Elektrons im Grundzustand im Wasserstoffatom ist gegeben durch

$$\Psi(r, \phi, \theta) = N \cdot e^{-r/a_0}$$

mit dem Bohr'schen Radius a_0 .

- a) Zeigen Sie, dass $N = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0^{-3/2}$ sein muss. [2P]
(Hinweis: Bei Kugelkoordinaten gilt $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$.)

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |\Psi(r, \phi, \theta)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} N^2 \cdot e^{-2r/a_0} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= 4\pi N^2 \cdot \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr}_{\text{siehe FS: } \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-ax} dx = n!/a^{n+1}} \\ &= 4\pi N^2 \frac{2!}{(2/a_0)^3} = \pi N^2 a_0^3 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow N &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_0^{-3/2} \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie nun den Erwartungswert $\langle r \rangle$ für den mittleren Abstand des Elektrons vom Kern. [1,5P]

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r |\Psi(r, \phi, \theta)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r \frac{1}{\pi} a_0^{-3} e^{-2r/a_0} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \frac{4\pi}{\pi a_0^3} r^3 e^{-2r/a_0} dr \\ &= \frac{4}{a_0^3} \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} r^3 e^{-2r/a_0} dr}_{\text{siehe FS: } \int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-ax} dx = n!/a^{n+1}} \\ &= \frac{4}{a_0^3} \frac{3!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^4} \\ &= \frac{3}{2} a_0 \end{aligned}$$

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Elektron innerhalb eines Radius von $\frac{3}{2} a_0$ um den Kern antreffen? [1,5P]

$$\begin{aligned}
P\left(r \leq \frac{3}{2}a_0\right) &= \int_{r=0}^{\frac{3}{2}a_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |\Psi(r, \phi, \theta)|^2 r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\
&= \int_{r=0}^{\frac{3}{2}a_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{\pi} a_0^{-3} e^{-2r/a_0} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr \\
&= \frac{4}{a_0^3} \int_{r=0}^{\frac{3}{2}a_0} r^2 e^{-2r/a_0} \, dr \\
&= \frac{4}{a_0^3} \left[e^{-2r/a_0} \left(-\frac{r^2}{2/a_0} - \frac{2r}{4/a_0^2} + \frac{2}{8/a_0^3} \right) \right]_0^{\frac{3}{2}a_0} \\
&= 4 \left(e^{-3} \left(-\frac{9}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right) \\
&\approx 0,58
\end{aligned}$$

3. Potentialtöpfe

Ein dünner Silberfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Silberfilm. Das Potential kann als Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden. Die Schichten seien in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt $W_1 = 0,149 \text{ meV}$. Wie dick ist der Silberfilm? [1,5P] (Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)

Die Energieeigenwerte $W_n(x)$ im unendlichen Potentialtopf ergeben sich zu:

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

Umstellen nach L und für $n = 1$ folgt:

$$L = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2mW_1}} = 50 \text{ nm}$$

- b) Das Elektron wird durch infrarotes Licht der Wellenlänge $\lambda_{ph} = 2000 \text{ nm}$ angeregt. Berechnen Sie die Energie W_n des höchsten Zustandes, den das Elektron erreichen kann. [1,5P]

Das Photon hat eine Energie von

$$W_{ph} = h\nu = h \frac{c_0}{\lambda_{ph}} = 9,95 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Die Formel für die Energieeigenwerte lässt sich nach n auflösen:

$$n = \frac{\sqrt{2m(W_{ph} + W_1)}L}{\hbar\pi} = 64,6$$

Damit kann das Elektron bis in $n = 64$ angeregt werden. Daraus folgt

$$W_{64} = 9,77 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,61 \text{ eV}$$

- c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ des Grundzustandes und des zweiten angeregten Zustandes und geben Sie die normierten Wellenfunktionen an. [1,5P]

Die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ sind

$$\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

mit der Normierung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^L A^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = A^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{L}{4n\pi} \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right]_0^L = \frac{A^2 L}{2}$$

folgt $A_n = \sqrt{2/L}$ und damit

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{1\pi}{L} x \right)$$

$$\Psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{3\pi}{L} x \right)$$

(Angabe der Wellenfunktionen reichte aus.)

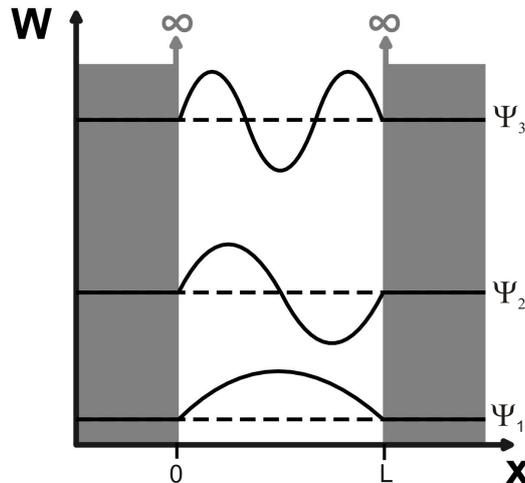


Abbildung 1: Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ für $n = 1, 2, 3$. Gefragt war nach $\Psi_1(x)$ und $\Psi_3(x)$.

- d) Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen x , y und z qualitativ? [1P]

Die Wellenfunktionen in x -Richtung sind diskret, während sie in y - und z -Richtung wegen der unendlichen Ausdehnung der Schichten kontinuierlich sind.

- e) Der perfekte Isolator werde durch einen realen Isolator ausgetauscht. Auf dem an L angrenzenden Isolator werde nach einer Dicke d ein weiterer Silberfilm der Dicke L aufgebracht an den wieder eine unendlich ausgedehnt gedachte Isolatorschicht anschließt. Die Dicke des Isolators wird auf wenige nm begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke d des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in x -Richtung und die Grundzustands-Wellenfunktion der Elektronen. [1,5P]

Ein realer Isolator führt zu einem endlich hohen Potentialtopf. Dadurch reichen die Wellenfunktionen in die Isolatorschichten hinein. Wird die Überlappung der Wellenfunktionen der Elektronen in den Silberfilmen bei kleinen Isolatorschichtdicken d groß, können Elektronen die Barriere „durchtunneln“. Die Wellenfunktionen der Elektronen der einzelnen Silberfilme können nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden, sondern sind gekoppelt bzw. spalten sich auf.

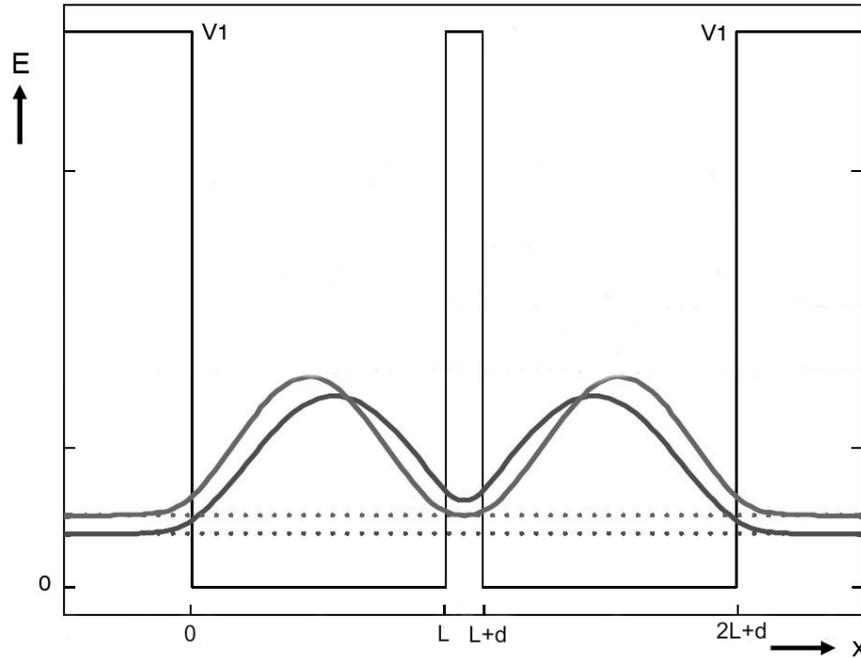
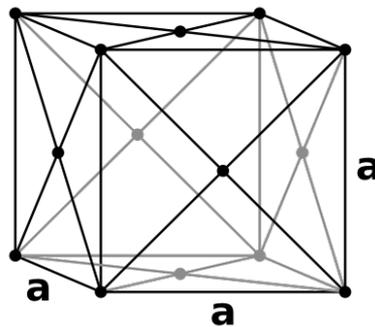


Abbildung 2: Der Grundzustand der Elektronen der gekoppelten Potentialtöpfe dringt in die Barriere ein und führt zu einer Aufspaltung des Grundzustandes bei sehr geringen Schichtdicken d . (Aufspaltung für Skizze nicht unbedingt nötig, aber nicht verschwindende Wellenfunktion in den Barrieren muss deutlich sichtbar sein.)

4. Kristall

- a) Nickel kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von $8,91 \text{ g/cm}^3$ und eine molare Masse von $58,69 \text{ g/mol}$. Zeichnen Sie das Kristallgitter und berechnen Sie die Gitterkonstante a . [2P]



Mit einer einatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante a :

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt[3]{V} \underset{\rho=m/V}{=} \sqrt[3]{m/\rho} \underset{m=4 \cdot 58,69 \text{ u}}{=} \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 58,69 \text{ u}}{8,91 \text{ g/cm}^3}} \\
 &= 0,352 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

- b) Wie unterscheiden sich kristalline, polykristalline und amorphe Festkörper? Können Sie für amorphes Silizium bei $T = 300\text{ K}$ dieselbe Bandlücke W_G annehmen, wie für kristallines Silizium? [2P]

In kristallinen Festkörpern sind die Atome oder Moleküle periodisch angeordnet. Nah- und Fernordnung sind im gesamten Festkörper gegeben. Polykristalline besitzen nur eine Nah- aber keine Fernordnung. Amorphe Festkörper besitzen weder ein Nah- noch eine Fernordnung. Da eine definierte Bandlücke von gleichbleibenden periodischen Abständen der Atome abhängt, wird sich die Bandlücke für amorphes Silizium unterscheiden. Sie wird deutlich „verschmieren“. Es entsteht eine „Beweglichkeitslücke“, die mit $W_G \approx 1,7\text{ eV}$ sogar größer ist als bei kristallinem Silizium. Zusätzlich befinden sich in dieser Lücke aber auch lokalisierte Zustände.

- c) Sie haben Silizium und Galliumarsenid zur Auswahl. Welches Material würden Sie zum Bau einer effizienten Leuchtdiode bevorzugen? Begründen Sie Ihre Wahl. [1P]

Silizium ist ein indirekter Halbleiter und damit ist zur strahlenden Rekombination über die Bandlücke der Impuls eines Phonons nötig. Andere nichtstrahlende Rekombinationsarten werden damit wahrscheinlicher. Galliumarsenid ist ein direkter Halbleiter und damit ist die strahlende Rekombination weitaus wahrscheinlicher und damit effizienter.

- d) Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 3 die Wellenlänge des emittierten Lichtes von angeregtem Galliumphosphid (GaP). [2P]

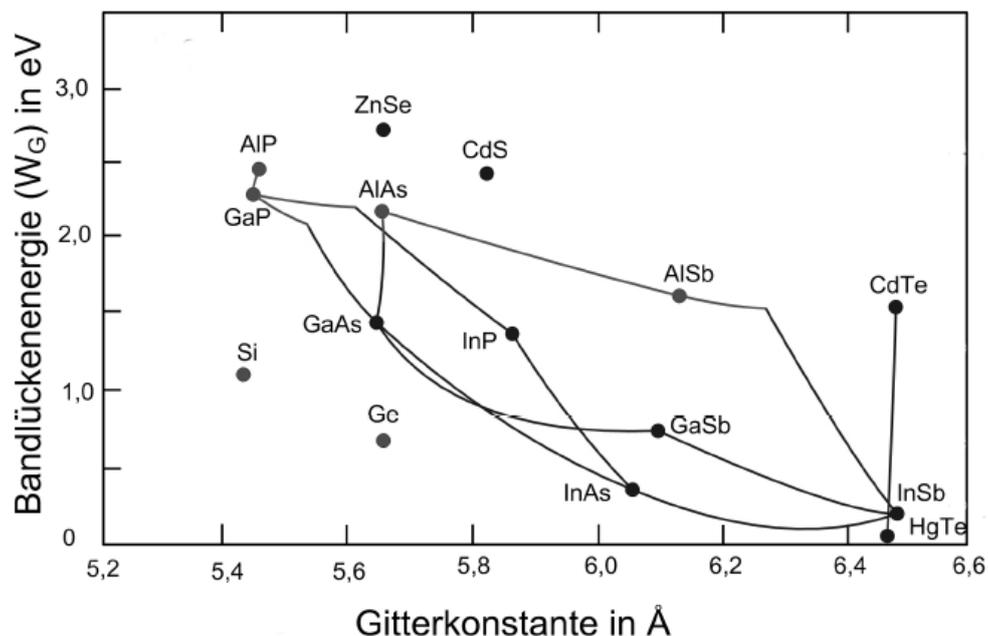


Abbildung 3: Bandlücken und Gitterkonstanten verschiedener Halbleitersysteme.

Halbleiter emittieren Photonen in der zugehörigen Wellenlänge zur Bandlückenenergie W_G mit der Frequenz:

$$\nu_{\text{Photon}} = \frac{W_G}{h}$$

Die Bandlücke von GaP kann aus dem Diagramm zu $W_G = 2,2 - 2,3 \text{ eV}$ abgelesen werden (genau: $W_G = 2,26 \text{ eV}$ bei Raumtemperatur). Weiterhin gilt für die Wellenlänge von Photonen:

$$\lambda_{\text{Photon}} = \frac{c_0}{\nu_{\text{Photon}}} = \frac{c_0 h}{W_G}$$

Und damit:

$$\lambda_{\text{Photon}} = \begin{array}{l} 565 \text{ nm}, W_G = 2,2 \text{ eV} \\ 540 \text{ nm}, W_G = 2,3 \text{ eV} \end{array}$$

5. Ladungsträgerdichten

- a) In Abbildung 4 sind vier Halbleiterstrukturen mit unterschiedlicher dimensionaler Ausdehnung abgebildet. Ein Kristall (3-dimensional), ein Quantentopf (2-dimensional), ein Quantendraht (1-dimensional) und ein Quantenpunkt (0-dimensional). Die zu den Strukturen gehörigen Zustandsdichten $D(W)$ sind in falscher Reihenfolge unter den Strukturen dargestellt. Ordnen Sie die Zustandsdichten den jeweiligen Strukturen zu. [2P]

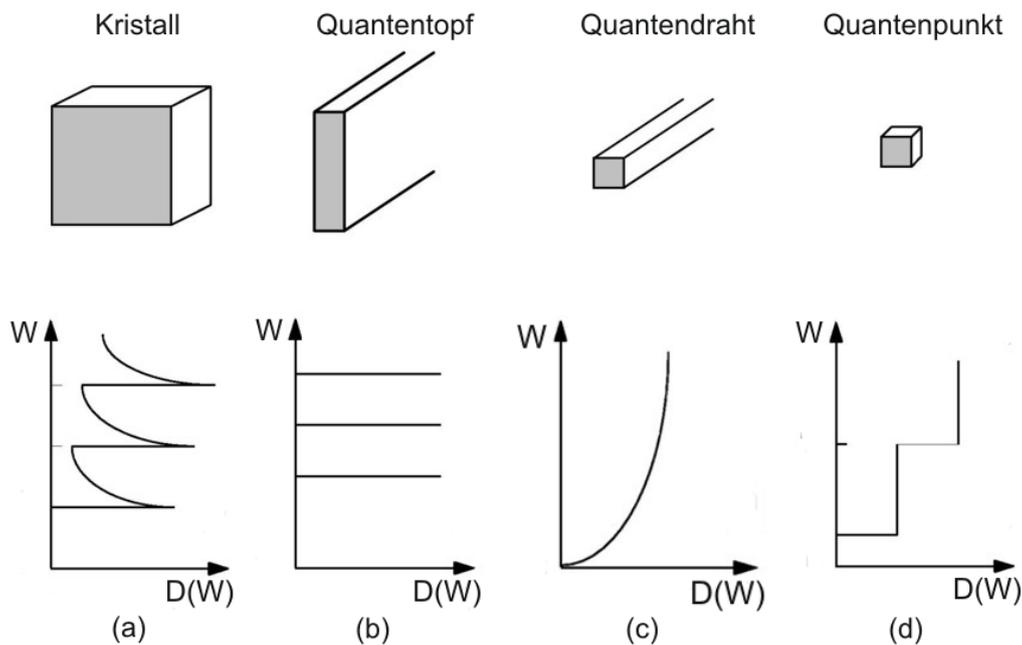


Abbildung 4: Quantenstrukturen mit zugehörigen Zustandsdichten $D(W)$.

Kristall: (c)

Quantentopf: (d)

Quantendraht: (a)

Quantenpunkt: (b)

- b) Skizzieren Sie die Majoritätsladungsträgerdichte $n(1/T)$ für $n_D = 1,5 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3$ dotiertes Germanium. Benennen Sie jeweils die einzelnen charakteristischen Bereiche der Kennlinie. [2P]
- c) Ab welcher Temperatur wird die Probe aus b) intrinsisch? Nehmen Sie als Bedingung für den Übergang $n = 2p$. Die intrinsische Ladungsträgerdichte bei 300 K sei $n_i = 2,4 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$, die äquivalenten Zustandsdichten $N_L = 10^{19}/\text{cm}^3$ und $N_V = 6 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$. Bandlücke und äquivalente Zustandsdichten seien nicht von der Temperatur abhängig. [4P]

Aus der Ladungsneutralität folgt $n = p + n_D^+$. Da Störstellenerschöpfung gelten muss bevor sich das dotierte Germanium intrinsisch verhält, gilt in diesem Fall $n = p + n_D$

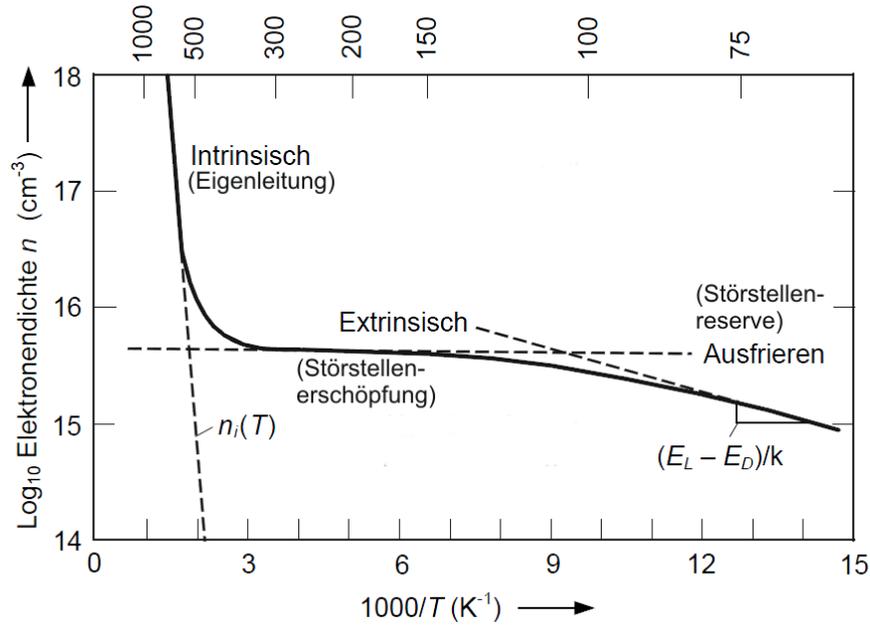


Abbildung 5: Majoritätsladungsträgerdichte $n(1/T)$ (Steigungen sind in der Skizze nicht verlangt)

und mit der Bedingung aus der Aufgabenstellung $2p = p + n_D$. Der Übergang wird also dann erreicht, wenn die thermisch erzeugten Elektronen-Loch-Paare der Donatordichte entsprechen ($p = n_D$).

Das Massenwirkungsgesetz gilt auch für dotierte Halbleiter im thermischen Gleichgewicht:

$$np = 2p^2 = 2n_D^2 = N_L N_V e^{-W_G/k_B T}$$

Die Bandlückenenergie W_G lässt sich aufgrund der vorausgesetzten Temperaturabhängigkeit mit den angegebenen Werten für $T = 300 \text{ K}$ berechnen:

$$W_G(300 \text{ K}) = -k_B T \ln \left(\frac{n_i^2}{N_L N_V} \right) \approx 0,66 \text{ eV}$$

Auflösen nach T :

$$\begin{aligned} 2n_D^2 &= N_L N_V e^{-W_G/k_B T} \\ \ln(2n_D^2) - \ln(N_V N_L) &= -\frac{W_G}{k_B T} \\ \Rightarrow T &= -\frac{W_G}{k_B \ln \left(\frac{2n_D^2}{N_L N_V} \right)} \approx 466 \text{ K} \end{aligned}$$

6. Kontinuitätsgleichung

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt sie? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - g_n + r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination und Generation in einem Volumenelement.

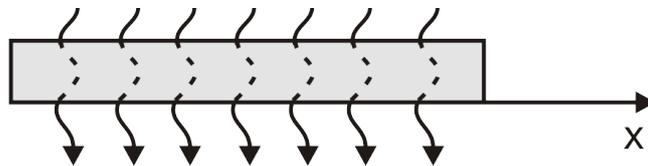


Abbildung 6: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- b) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 6 gezeigt konstant beleuchtet. Die Energie des Lichtes reicht aus, um homogen im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare mit der Generationsrate g_L zu erzeugen. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte über die Kontinuitätsgleichung die Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach Beleuchtung. Skizzieren Sie $p_n(t)$. [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$:

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_L \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

$t > 0$:

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt

$g_L = 0$. Verbleibende Überschussladungsträger Δp rekombinieren mit Majoritätsladungsträgern und ändern sich zeitlich ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = Ae^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_L \tau_p$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$ lösen. Damit Δp für $t \rightarrow \infty$ zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_L \tau_p = Ae^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_L \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -bg_L \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_L \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_L \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p} d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_L \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln (\Delta p / g_L \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_L \tau_p e^{-t/\tau_p} \end{aligned}$$

- c) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p_n ohne und mit Beleuchtung. [2P] (Es gelte: $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$)

Ohne Beleuchtung:

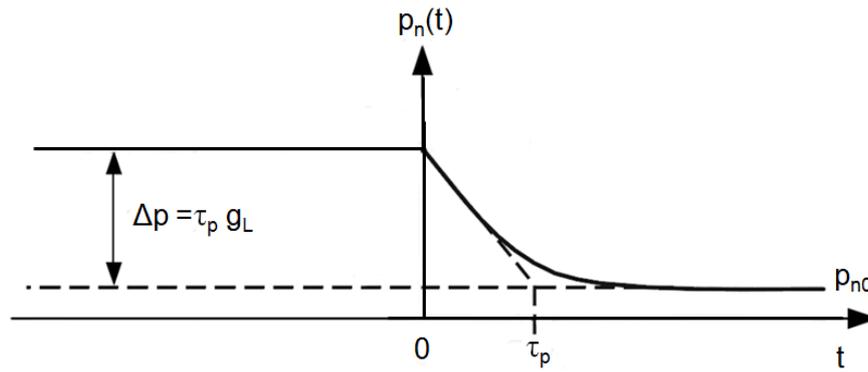


Abbildung 7: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p_n(t)$.

$$p_{n0} = n_i^2/n_D = (1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3)^2/10^{16}/\text{cm}^3 \approx 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3$$

Mit Beleuchtung:

$$p_n = p_{n0} + \tau_p g_L = 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3 + 2 \cdot 10^{-6} \mu\text{s} \cdot \frac{10^{12}/\text{cm}^3}{10^{-6} \mu\text{s}} \approx 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$$

7. Banddiagramm

Wir betrachten Phosphor-dotiertes Silizium und Bor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur.

a) Zeichnen sie für beide Halbleiter je folgende Diagramme:

- Das Banddiagramm. Zeichnen Sie Fermi-niveau, Störstellenniveau, Leitungs- und Valenzband ein. [2P]
- Energie über der Zustandsdichte ($g(W)$). [2P]
- Energie über der Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$). [2P]
- Energie über Ladungsträgerdichte ($n(W)$ und $p(W)$). [2P]

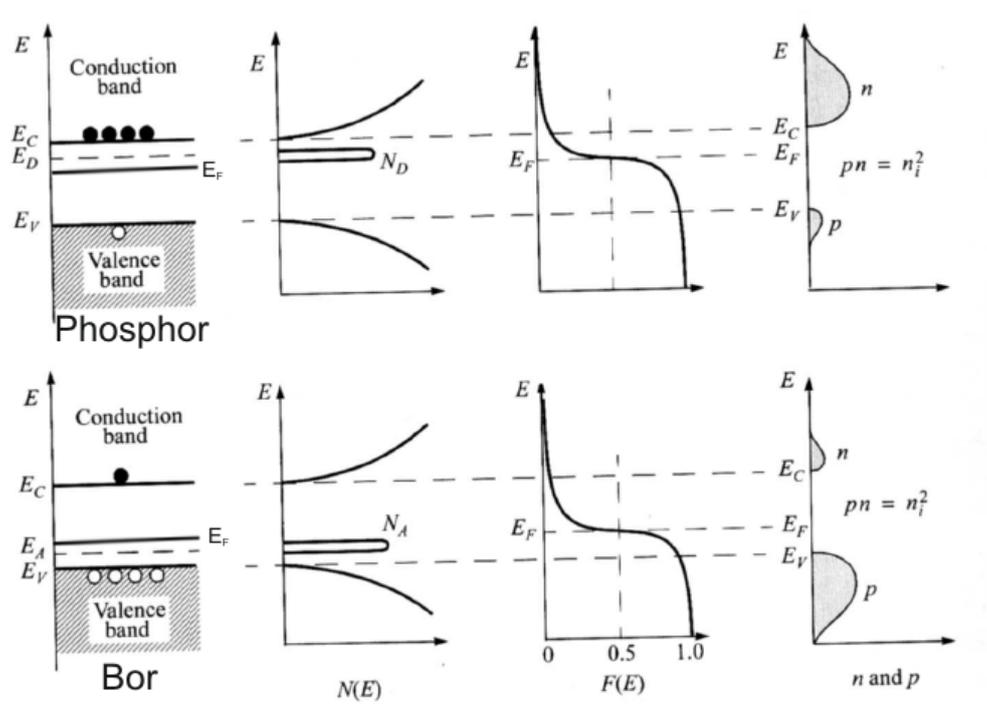


Abbildung 8: Banddiagramm, Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte für Phosphor- und Bor-dotiertes Silizium.

b) Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung. [1P]
- ...mit einer äußeren Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung) in Durchlassrichtung. [1P]

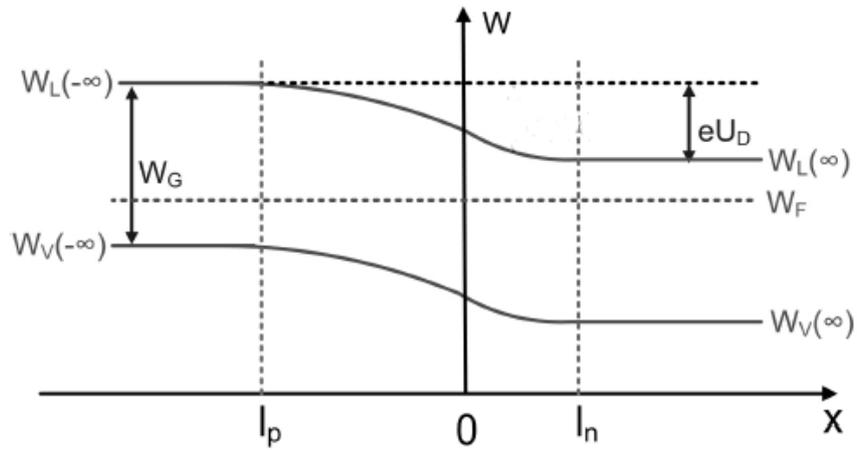


Abbildung 9: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

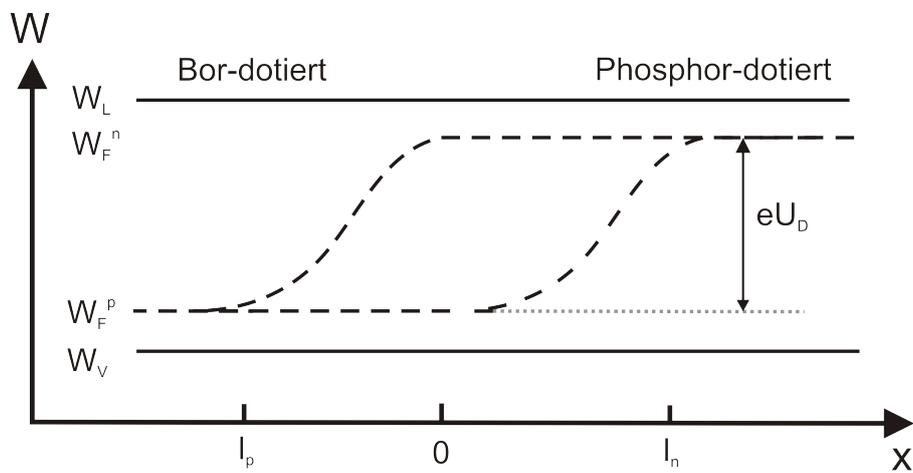


Abbildung 10: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung U_D (Flachbandfall).

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6.02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3.14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2.72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut