

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

Klausur

02. April 2013

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	9	7	7	7	8	8	8	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!). Verwenden Sie auch keinen Rotstift!
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Fragen zu den Grundlagen

Hinweis: Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was besagt die BORN-OPPENHEIMER-Näherung? [1P]
- b) Welche Beziehung wird in der Festkörperphysik über die *Dispersionsrelation* für Elektronen hergestellt? Warum unterscheidet sich die Dispersionsrelation des freien Elektrons von der Dispersionsrelation des Kristallelektrons? [2P]
- c) Die Wellenfunktion zur Beschreibung eines quantenmechanischen Teilchens darf komplexe Werte annehmen. Steht das im Widerspruch zu der physikalischen Tatsache, dass in der Natur nur reelle Messgrößen beobachtet werden können? (Begründung!) [1P]
- d) Was sind *Phononen*? [1P]
- e) Was sind *entartete* Halbleiter? [1P]
- f) Was ist die „effektive Masse“ eines Ladungsträgers? [1P]
- g) Was sind *Quasi-Fermi-niveaus*? [1P]
- h) Was besagt das *Pauli-Prinzip*? [1P]

2. Das freie Elektron

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11}$ m verwendet. Berechnen Sie die kinetische Energie eines einzelnen Elektrons. Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [2P]
- b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Photon}}(k) &= ck \\ \omega_{\text{Elektron}}(k) &= \frac{\hbar k^2}{2m_e}\end{aligned}$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_g in beiden Fällen. [2P]

- c) Freie Elektronen können beschrieben werden als ebene Welle,

$$\psi(x, t) = Ae^{j(kx - \omega t)}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert $\langle \hat{p} \rangle$ und das Impulserwartungswertquadrat $\langle \hat{p}^2 \rangle$ für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$. Was folgt daraus über die Unschärfere-lation für die Ortsunschärfe Δx ? [3P]

3. Potentialtöpfe

Ein dünner Silberfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Silberfilm. Das Potential kann als eindimensionaler Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt $W_1 = 0,149 \text{ meV}$. Berechnen Sie die Dicke L des Silberfilms. [1,5P] (Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)
- b) Das Elektron wird durch infrarotes Licht der Wellenlänge $\lambda_{ph} = 2000 \text{ nm}$ angeregt. Berechnen Sie die Energie W_n des höchsten Zustandes, den das Elektron erreichen kann. [1,5P]
- c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ des Grundzustandes und des zweiten angeregten Zustandes und geben Sie die normierten Wellenfunktionen an. [1,5P]
- d) Der perfekte Isolator werde durch einen realen Isolator ausgetauscht. Auf dem an L angrenzenden Isolator werde nach einer Dicke d ein weiterer Silberfilm der Dicke L aufgebracht an den wieder eine unendlich ausgedehnte gedachte Isolatorschicht anschließt. Die Dicke des Isolators wird auf wenige Nanometer begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke d des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in x-Richtung und die Grundzustands-Wellenfunktion der Elektronen. [1,5P]
- e) Die Schichten seien nun in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt. Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen x, y und z qualitativ? [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

4. Kristall

- Nickel kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von $8,91 \text{ g/cm}^3$ und eine molare Masse von $58,69 \text{ g/mol}$. Zeichnen Sie das Kristallgitter und berechnen Sie die Gitterkonstante a . [2P]
- Wie unterscheiden sich kristalline, polykristalline und amorphe Festkörper? Können Sie für amorphes Silizium bei $T = 300 \text{ K}$ dieselbe Bandlücke W_G annehmen, wie für kristallines Silizium? [2P]
- Sie haben Silizium und Galliumarsenid zur Auswahl. Welches Material würden Sie zum Bau einer effizienten Leuchtdiode bevorzugen? Begründen Sie Ihre Wahl. [1P]
- Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 1 die Wellenlänge des emittierten Lichtes von angeregtem Indiumphosphid (InP). [2P]

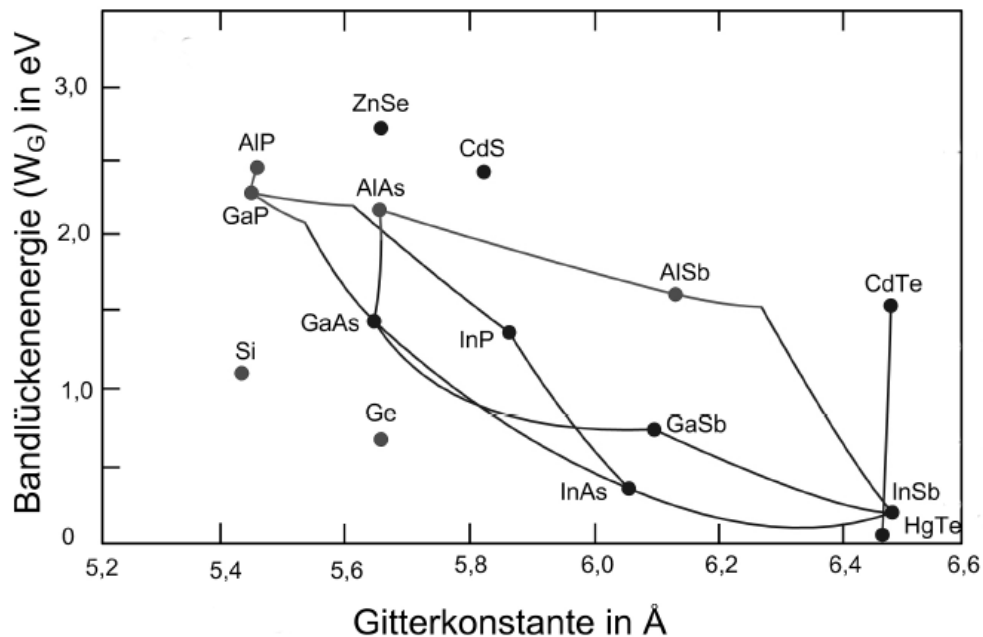


Abbildung 1: Bandlücken und Gitterkonstanten verschiedener Halbleitersysteme.

Name:

Matrikel-Nr.:

5. Ladungsträgerdichten

- a) In Abbildung 2 sind vier Halbleiterstrukturen mit unterschiedlicher dimensionaler Ausdehnung abgebildet. Ein Kristall (3-dimensional), ein Quantentopf (2-dimensional), ein Quantendraht (1-dimensional) und ein Quantenpunkt (0-dimensional). Die zu den Strukturen gehörigen Zustandsdichten $D(W)$ sind in falscher Reihenfolge unter den Strukturen dargestellt. Ordnen Sie die Zustandsdichten den jeweiligen Strukturen zu. [2P]

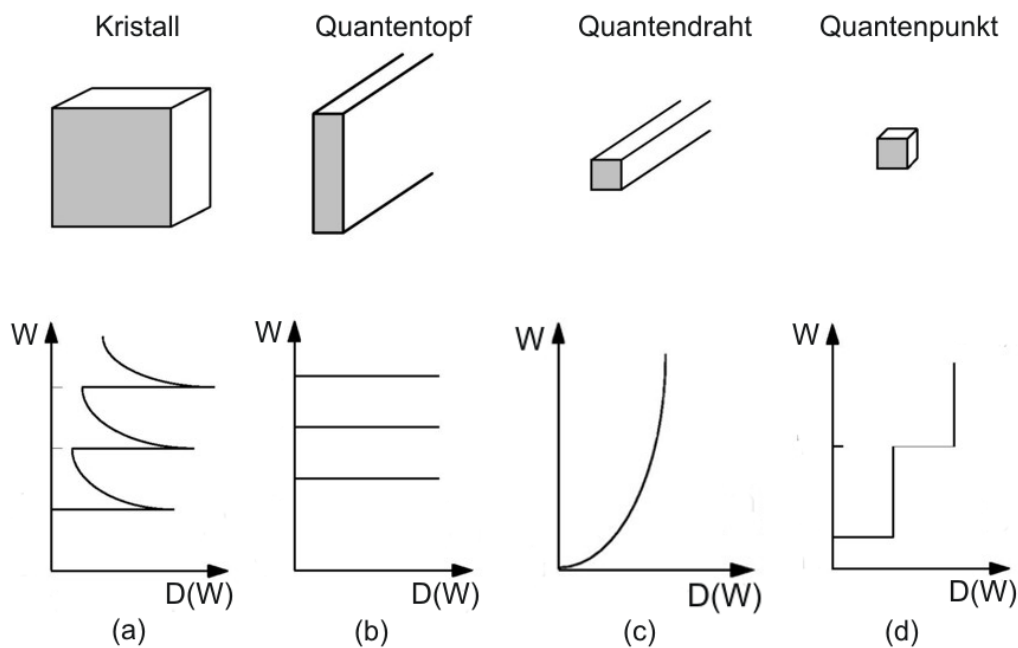


Abbildung 2: Quantenstrukturen mit zugehörigen Zustandsdichten $D(W)$.

- b) Skizzieren Sie die Majoritätsladungsträgerdichte $\log n(1/T)$ für n-dotiertes Germanium ($n_D = 1,5 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3$). Benennen Sie jeweils die einzelnen charakteristischen Bereiche der Kurve. [2P]
- c) Ab welcher Temperatur wird die Probe aus b) intrinsisch? Nehmen Sie als Bedingung für den Übergang $n = 2p$. Die intrinsische Ladungsträgerdichte bei 300 K sei $n_i = 2,4 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$, die äquivalenten Zustandsdichten $N_L = 10^{19}/\text{cm}^3$ und $N_V = 6 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$. Bandlücke und äquivalente Zustandsdichten seien nicht von der Temperatur abhängig. [4P]

Name:

Matrikel-Nr.:

6. Kontinuitätsgleichung

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt sie? [1P]

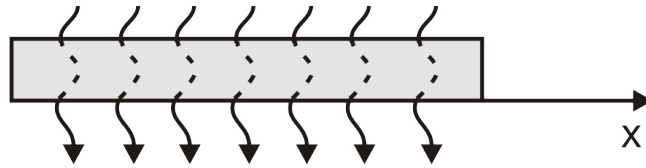


Abbildung 3: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- b) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 3 gezeigt konstant beleuchtet. Die Energie des Lichtes reicht aus, um homogen im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare mit der Generationsrate g_L zu erzeugen. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte über die Kontinuitätsgleichung die Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach Beleuchtung. Skizzieren Sie $p_n(t)$. [5P]
- c) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p_n ohne und mit Beleuchtung. [2P] (Es gelte: $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$)

Name:

Matrikel-Nr.:

7. Banddiagramm

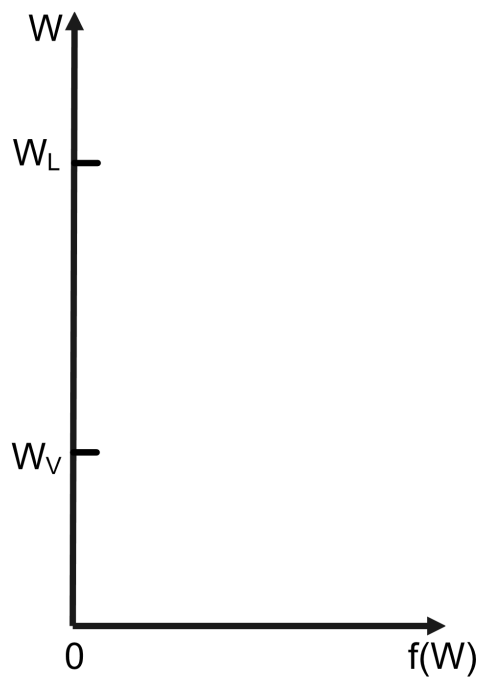
Wir betrachten intrinsisches und nicht entartet Phosphor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$) und bei $T = 400\text{ K}$.

- a) Zeichnen sie für beide Halbleiter die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder **auf der nächsten Seite**. Zur zeichnerischen Orientierung sind bereits jeweils die Energieniveaus der Valenz- und Leitungsbandkante angedeutet. Die Auswirkung der Temperatur auf die Bandlücke wird vernachlässigt. Die effektive Masse von Elektronen und Löchern sei identisch.

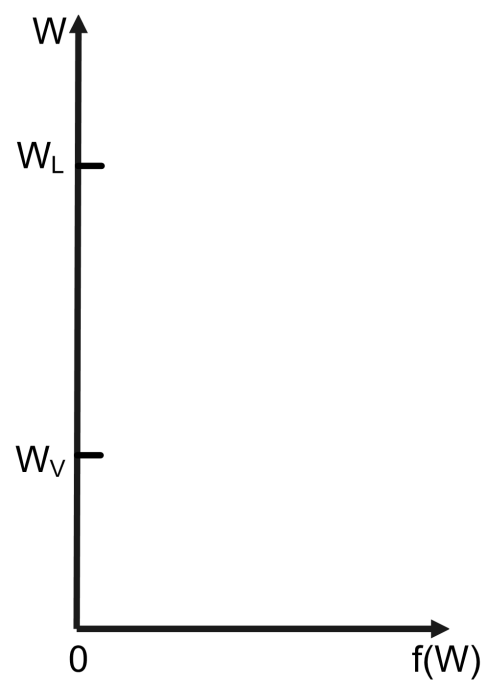
- intrinsisches Silizium: Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$) bei den genannten Temperaturen (je eine Kurve pro Temperatur). Zeichnen Sie das Ferminiveau ($W_{Fi(300K)}$) bei Raumtemperatur und bei $T = 400\text{ K}$ ($W_{Fi(400K)}$) ein. Beschriften Sie eindeutig! [2P]
- Phosphor-dotiertes Silizium: Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen (Fermi-Dirac-Verteilung, $f(W)$) bei den genannten Temperaturen (je eine Kurve pro Temperatur). Zeichnen Sie das Ferminiveau ($W_{F(300K)}$) bei Raumtemperatur und bei $T = 400\text{ K}$ ($W_{F(400K)}$) ein. Beschriften Sie eindeutig! [2P]

- b) Wir betrachten p-dotiertes Silizium und n-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Ferminiveaus, wenn die beiden unterschiedlich dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung. [2P]
- ...mit äußerer Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung) in Durchlassrichtung. [2P]



Intrinsisches Silizium



Phosphor-dotiertes Silizium

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6.02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3.14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2.72	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut