

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

E-Mail-Adresse: .....

Erreichte Punktzahl: .....

Note: .....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$
Punkte								
Max	9	7	7	7	8	8	8	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!). Verwenden Sie auch keinen Rotstift!
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.



## 1. Allgemeine Fragen zu den Grundlagen

**Hinweis:** Beschränken Sie Ihre Antwort pro Teilaufgabe auf maximal drei Sätze.

- a) Was besagt die BORN-OPPENHEIMER-Näherung? [1P]

*Aufgrund der viel größeren Masse des Kerns kann dessen Bewegungsenergie bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung vernachlässigt werden. Dadurch wird z.B. beim Wasserstoffatom eine verhältnismäßig einfache analytische Berechnung möglich.*

- b) Welche Beziehung wird in der Festkörperphysik über die Dispersionsrelation für Elektronen hergestellt? Warum unterscheidet sich die Dispersionsrelation des freien Elektrons von der Dispersionsrelation des Kristallelektrons? [2P]

*Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl  $k$  (in 3-D dem Wellenvektor  $\vec{k}$ ), die mit dem Impuls des Elektrons verknüpft ist, und der Kreisfrequenz  $\omega$ , die mit der Energie des Elektrons verknüpft ist, an. Sie wird über die Schrödingergleichung berechnet und berücksichtigt daher auch äußere Einflüsse, wie das periodische Potential der Kerne und das Mehrteilchensystem im Kristall. Aus dem parabolischen Zusammenhang des freien Elektrons entwickelt sich dadurch die kompliziertere Bandstruktur der Kristallelektronen.*

- c) Die Wellenfunktion zur Beschreibung eines quantenmechanischen Teilchens darf komplexe Werte annehmen. Steht das im Widerspruch zu der physikalischen Tatsache, dass in der Natur nur reelle Messgrößen beobachtet werden können? (Begründung!) [1P]

*Nein, denn die Wellenfunktion ist in der Natur nicht beobachtbar. Beobachtet werden kann nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, also das Quadrat der Wellenfunktion. Das Quadrat einer komplexen Größe ist aber immer reell.*

- d) Was sind Phononen? [1P]

*Die thermisch induzierte Bewegung von Rumpfatomen um ihre Ruhelage führt zu Gitterschwingungen, die wie Quasiteilchen behandelt werden können und als Phononen bezeichnet werden.*

- e) Was sind entartete Halbleiter? [1P]

*Bei sehr stark dotierten Halbleitern bilden die Energieniveaus der Dotieratome aufgrund ihrer Wechselwirkung ein Band, das sich mit dem Leitungs- bzw. Valenzband des Halbleiters überlappt. Bereits bei sehr geringen Temperaturen werden viele Dotanden ionisiert und steuern freie Ladungsträger bei. Der Halbleiter verhält sich näherungsweise metallisch. Das Fermi-niveau liegt je nach Art der Dotierung innerhalb des Valenz- oder Leitungsbandes.*

- f) Was ist die „effektive Masse“ eines Ladungsträgers? [1P]

*Sie bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem*

---

*Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.*

g) Was sind Quasi-Ferminiveaus? [1P]

*Das Ferminiveau bezeichnet das elektrochemische Potential des Halbleiters im Gleichgewichtszustand. Es bestimmt also die ortsabhängige Konzentration der Elektronen und gleichzeitig auch der Löcher im Halbleiter. Bei einer Störung des thermodynamischen Gleichgewichts (z.B. pn-Übergang unter Vorspannung) können die Konzentrationen der Elektronen und Löcher aber unabhängig voneinander am selben Ort von ihrer Gleichgewichtskonzentration abweichen. Es werden dann Ferminiveaus sowohl für die Löcher als auch die Elektronen benötigt, die Quasi-Ferminiveaus.*

h) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

*Das Pauli-Prinzip besagt, daß zwei Fermionen (z.B. Elektronen) nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen bzw. die gleichen Zustände besetzen können.*

## 2. Das freie Elektron

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von  $\lambda = 10^{-11}$  m verwendet. Berechnen Sie die kinetische Energie eines einzelnen Elektrons. Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [2P]

$$W = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_e} = 2.41 \text{ fJ} = 15.04 \text{ keV}$$

- b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Photon}}(k) &= ck \\ \omega_{\text{Elektron}}(k) &= \frac{\hbar k^2}{2m_e}\end{aligned}$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  und die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  in beiden Fällen. [2P]

Für Photonen ergibt sich

$$v_{\text{ph}} = v_g = c,$$

für Elektronen folgt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m_e} \quad \text{und} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m_e}$$

- c) Freie Elektronen können beschrieben werden als ebene Welle,

$$\psi(x, t) = Ae^{j(kx - \omega t)}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert  $\langle \hat{p} \rangle$  und das Impulserwartungswertquadrat  $\langle \hat{p}^2 \rangle$  für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses  $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ . Was folgt daraus über die Unschärfere-lation für die Ortsunschärfe  $\Delta x$ ? [3P]

$$\begin{aligned}\langle \hat{p} \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{p} \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) (-j\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) (-j^2 \hbar k) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\ &= \hbar k \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\ &= \hbar k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \hat{p}^2 \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-j(kx - \omega t)} \cdot \left(-j\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \cdot A e^{j(kx - \omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-j(kx - \omega t)} \cdot \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot A e^{j(kx - \omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^* e^{-j(kx - \omega t)} \cdot (-\hbar^2 (jk)^2) \cdot A e^{j(kx - \omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar^2 k^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar^2 k^2
\end{aligned}$$

Mit den angegebenen Werten folgt unmittelbar:

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = 0$$

Es gilt die Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Damit folgt

$$\Delta x \rightarrow \infty$$

Da der Impuls exakt bestimmt ist, ist der Ort also maximal unbestimmt.

### 3. Potentialtöpfe

Ein dünner Silberfilm der Dicke  $L$  ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Silberfilm. Das Potential kann als eindimensionaler Potentialtopf  $V(x)$  mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt  $W_1 = 0,149 \text{ meV}$ . Berechnen Sie die Dicke  $L$  des Silberfilms. [1,5P] (Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse  $m_e$ .)

Die Energieeigenwerte  $W_n(x)$  im unendlichen Potentialtopf ergeben sich zu:

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$$

Umstellen nach  $L$  und für  $n = 1$  folgt:

$$L = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2mW_1}} = 50 \text{ nm}$$

- b) Das Elektron wird durch infrarotes Licht der Wellenlänge  $\lambda_{ph} = 2000 \text{ nm}$  angeregt. Berechnen Sie die Energie  $W_n$  des höchsten Zustandes, den das Elektron erreichen kann. [1,5P]

Das Photon hat eine Energie von

$$W_{ph} = h\nu = h \frac{c_0}{\lambda_{ph}} = 9,95 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Die Formel für die Energieeigenwerte lässt sich nach  $n$  auflösen:

$$n = \frac{\sqrt{2m(W_{ph} + W_1)}L}{\hbar\pi} = 64,6$$

Damit kann das Elektron bis in  $n = 64$  angeregt werden. Daraus folgt

$$W_{64} = 9,77 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,61 \text{ eV}$$

- c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen  $\psi_n(x)$  des Grundzustandes und des zweiten angeregten Zustandes und geben Sie die normierten Wellenfunktionen an. [1,5P]

Die Wellenfunktionen  $\psi_n(x)$  sind

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

mit der Normierung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^L A^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = A^2 \left[ \frac{1}{2}x - \frac{L}{4n\pi} \sin \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) \right]_0^L = \frac{A^2 L}{2}$$

folgt  $A_n = \sqrt{2/L}$  und damit

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left( \frac{1\pi}{L} x \right)$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left( \frac{3\pi}{L} x \right)$$

(Angabe der Wellenfunktionen reichte aus.)

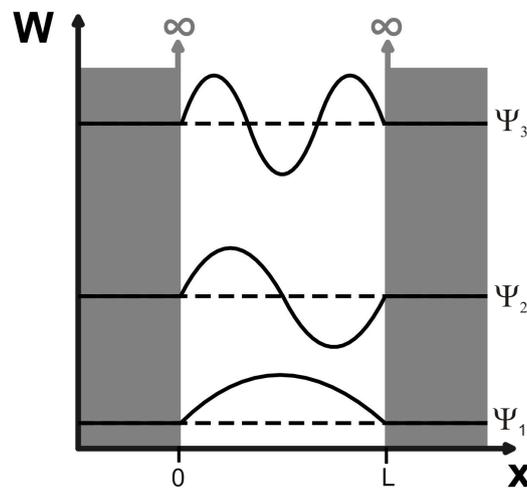


Abbildung 1: Wellenfunktionen  $\psi_n(x)$  für  $n = 1, 2, 3$ . Gefragt war nach  $\psi_1(x)$  und  $\psi_3(x)$ .

- d) Der perfekte Isolator werde durch einen realen Isolator ausgetauscht. Auf dem an  $L$  angrenzenden Isolator werde nach einer Dicke  $d$  ein weiterer Silberfilm der Dicke  $L$  aufgebracht an den wieder eine unendlich ausgedehnt gedachte Isolatorschicht anschließt. Die Dicke des Isolators wird auf wenige Nanometer begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke  $d$  des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in  $x$ -Richtung und die Grundzustands-Wellenfunktion der Elektronen. [1,5P]

*Ein realer Isolator führt zu einem endlich hohen Potentialtopf. Dadurch reichen die Wellenfunktionen in die Isolatorschichten hinein. Wird die Überlappung der Wellenfunktionen der Elektronen in den Silberfilmen bei kleinen Isolatorschichtdicken  $d$  groß, können Elektronen die Barriere mit einer nicht vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeit „durchtunneln“. Die Wellenfunktionen der Elektronen der einzelnen Silberfilme können nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden, sondern sind gekoppelt bzw. spalten sich auf.*

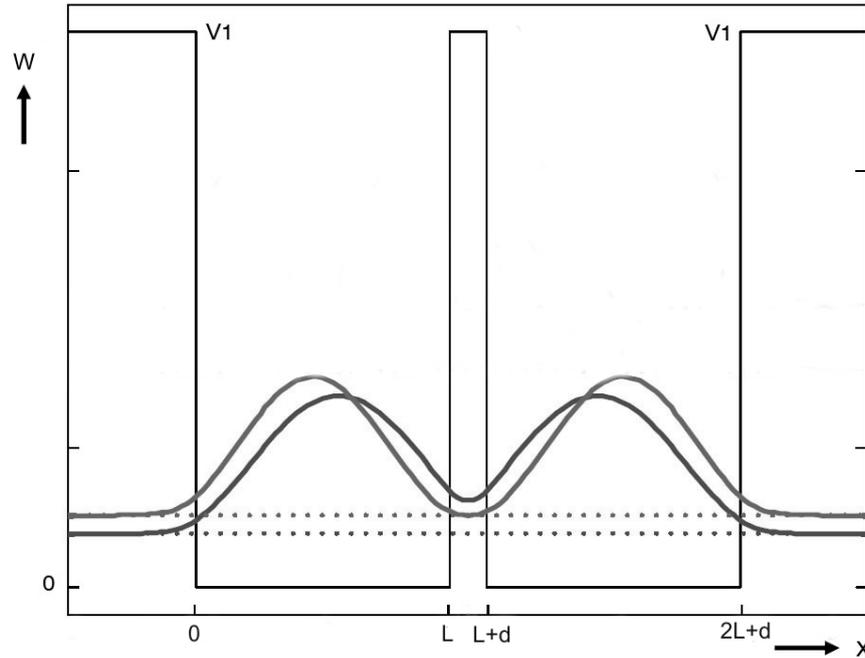


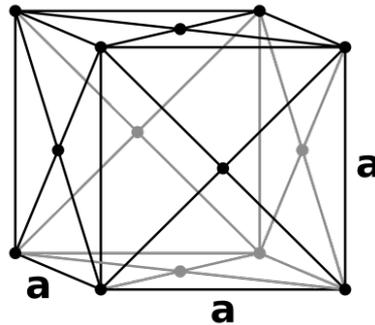
Abbildung 2: Nicht verschwindende Wellenfunktion in den Potentialbarrieren und Aufspaltung der Wellenfunktionen bei gekoppelten Potentialtöpfen.

- e) Die Schichten seien nun in  $y$ - und  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnt. Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  qualitativ? [1P]

*Die Wellenfunktionen in  $x$ -Richtung sind diskret, während sie in  $y$ - und  $z$ -Richtung wegen der unendlichen Ausdehnung ( $L \rightarrow \infty$ ) der Schichten quasi kontinuierlich sind.*

#### 4. Kristall

- a) Nickel kristallisiert in einem fcc-Gitter mit einatomiger Basis und hat eine Dichte von  $8,91 \text{ g/cm}^3$  und eine molare Masse von  $58,69 \text{ g/mol}$ . Zeichnen Sie das Kristallgitter und berechnen Sie die Gitterkonstante  $a$ . [2P]



Mit einer einatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante  $a$ :

$$a = \sqrt[3]{V} \underset{\rho=m/V}{=} \sqrt[3]{m/\rho} \underset{m=4 \cdot 58,69 \text{ u}}{=} \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 58,69 \text{ u}}{8,91 \text{ g/cm}^3}}$$

$$= 0,352 \text{ nm}$$

- b) Wie unterscheiden sich kristalline, polykristalline und amorphe Festkörper? Können Sie für amorphes Silizium bei  $T = 300 \text{ K}$  dieselbe Bandlücke  $W_G$  annehmen, wie für kristallines Silizium? [2P]

*In kristallinen Festkörpern sind die Atome oder Moleküle periodisch angeordnet. Nah- und Fernordnung sind im gesamten Festkörper gegeben. Polykristalline besitzen nur eine Nah- aber keine Fernordnung. Amorphe Festkörper besitzen weder ein Nah- noch eine Fernordnung (laut Skript zumindest eine geringe Nahordnung). Da eine definierte Bandlücke von gleichbleibenden periodischen Abständen der Atome abhängt, wird sich die Bandlücke für amorphes Silizium unterscheiden. Sie wird deutlich „verschmieren“. Es entsteht eine „Beweglichkeitslücke“, die mit  $W_G \approx 1,7 \text{ eV}$  sogar größer ist als bei kristallinem Silizium. Zusätzlich befinden sich in dieser Lücke aber auch lokalisierte Zustände.*

- c) Sie haben Silizium und Galliumarsenid zur Auswahl. Welches Material würden Sie zum Bau einer effizienten Leuchtdiode bevorzugen? Begründen Sie Ihre Wahl. [1P]

*Silizium ist ein indirekter Halbleiter und damit ist zur strahlenden Rekombination über die Bandlücke der Impuls eines Phonons nötig. Andere nichtstrahlende Rekombinationsarten werden damit wahrscheinlicher. Galliumarsenid ist ein direkter Halbleiter und damit ist die strahlende Rekombination weitaus wahrscheinlicher und damit effizienter.*

- d) Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 3 die Wellenlänge des emittierten Lichtes von angeregtem Indiumphosphid (InP). [2P]

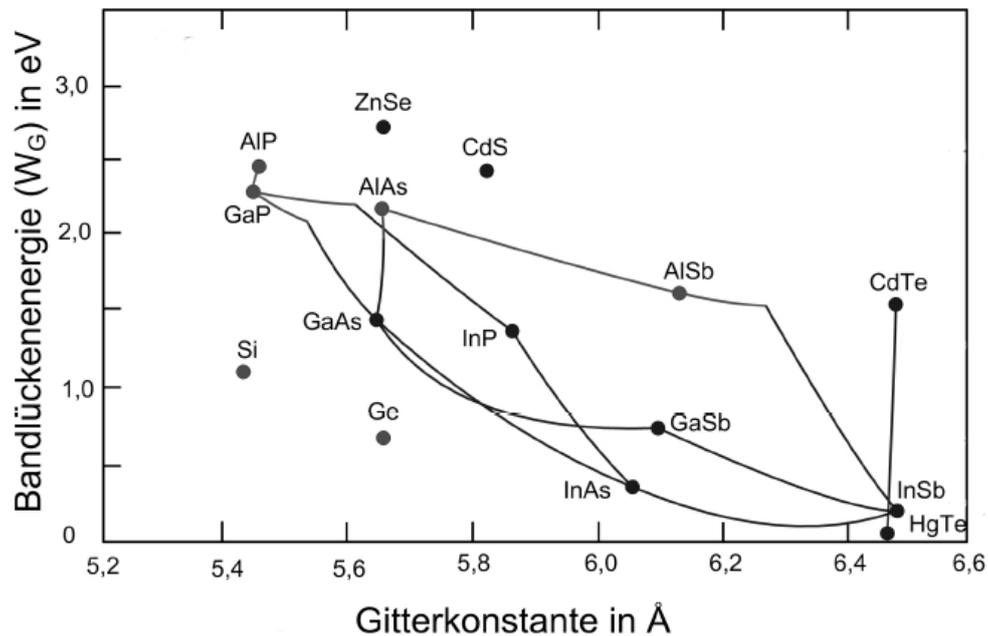


Abbildung 3: Bandlücken und Gitterkonstanten verschiedener Halbleitersysteme.

Halbleiter emittieren Photonen in der zugehörigen Wellenlänge zur Bandlückenenergie  $W_G$  mit der Frequenz:

$$\nu_{\text{Photon}} = \frac{W_G}{h}$$

Die Bandlücke von InP kann aus dem Diagramm zu  $W_G = 1,3 - 1,4 \text{ eV}$  abgelesen werden (genau:  $W_G = 1,34 \text{ eV}$  bei Raumtemperatur). Weiterhin gilt für die Wellenlänge von Photonen:

$$\lambda_{\text{Photon}} = \frac{c_0}{\nu_{\text{Photon}}} = \frac{c_0 h}{W_G}$$

Und damit:

$$\lambda_{\text{Photon}} = \begin{cases} 888 \text{ nm} & \text{mit } W_G = 1,4 \text{ eV} \\ 956 \text{ nm} & \text{mit } W_G = 1,3 \text{ eV} \end{cases}$$

## 5. Ladungsträgerdichten

- a) In Abbildung 4 sind vier Halbleiterstrukturen mit unterschiedlicher dimensionaler Ausdehnung abgebildet. Ein Kristall (3-dimensional), ein Quantentopf (2-dimensional), ein Quantendraht (1-dimensional) und ein Quantenpunkt (0-dimensional). Die zu den Strukturen gehörigen Zustandsdichten  $D(W)$  sind in falscher Reihenfolge unter den Strukturen dargestellt. Ordnen Sie die Zustandsdichten den jeweiligen Strukturen zu. [2P]

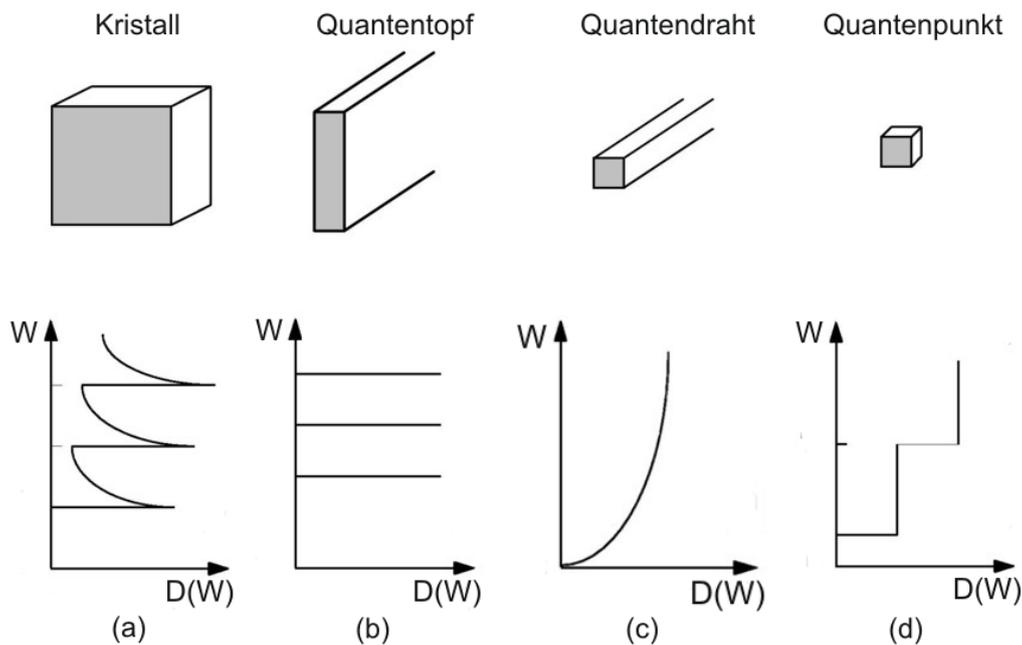


Abbildung 4: Quantenstrukturen mit zugehörigen Zustandsdichten  $D(W)$ .

*Kristall:* (c)

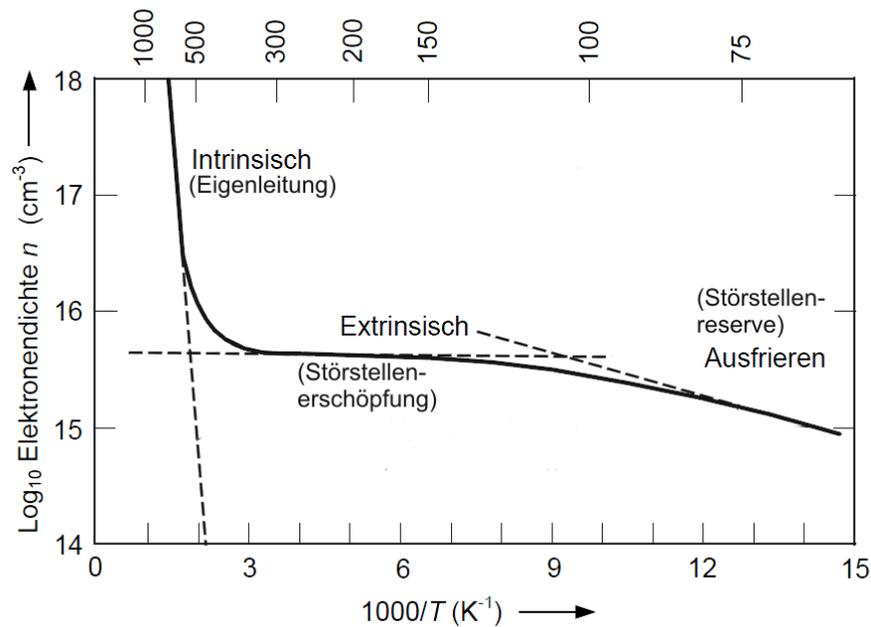
*Quantentopf:* (d)

*Quantendraht:* (a)

*Quantenpunkt:* (b)

- b) Skizzieren Sie die Majoritätsladungsträgerdichte  $\log n(1/T)$  für n-dotiertes Germanium ( $n_D = 1,5 \cdot 10^{15}/\text{cm}^3$ ). Benennen Sie jeweils die einzelnen charakteristischen Bereiche der Kurve. [2P]
- c) Ab welcher Temperatur wird die Probe aus b) intrinsisch? Nehmen Sie als Bedingung für den Übergang  $n = 2p$ . Die intrinsische Ladungsträgerdichte bei 300 K sei  $n_i = 2,4 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$ , die äquivalenten Zustandsdichten  $N_L = 10^{19}/\text{cm}^3$  und  $N_V = 6 \cdot 10^{18}/\text{cm}^3$ . Bandlücke und äquivalente Zustandsdichten seien nicht von der Temperatur abhängig. [4P]

*Aus der Ladungsneutralität folgt  $n = p + n_D^+$ . Da Störstellenerschöpfung gelten muss bevor sich das dotierte Germanium intrinsisch verhält, gilt in diesem Fall  $n = p + n_D$*

Abbildung 5: Majoritätsladungsträgerdichte  $\log n(1/T)$ .

und mit der Bedingung aus der Aufgabenstellung  $2p = p + n_D$ . Der Übergang wird also dann erreicht, wenn die thermisch erzeugten Elektronen-Loch-Paare der Donatordichte entsprechen ( $p = n_D$ ).

Das Massenwirkungsgesetz gilt auch für dotierte Halbleiter im thermischen Gleichgewicht:

$$np = 2p^2 = 2n_D^2 = N_L N_V e^{-W_G/k_B T}$$

Die Bandlückenenergie  $W_G$  lässt sich aufgrund der vorausgesetzten Temperaturabhängigkeit mit den angegebenen Werten für  $T = 300 \text{ K}$  berechnen:

$$W_G(300 \text{ K}) = -k_B T \ln \left( \frac{n_i^2}{N_L N_V} \right) \approx 0,66 \text{ eV}$$

Auflösen nach  $T$ :

$$\begin{aligned} 2n_D^2 &= N_L N_V e^{-W_G/k_B T} \\ \ln(2n_D^2) - \ln(N_V N_L) &= -\frac{W_G}{k_B T} \\ \Rightarrow T &= -\frac{W_G}{k_B \ln \left( \frac{2n_D^2}{N_L N_V} \right)} \approx 466 \text{ K} \end{aligned}$$

## 6. Kontinuitätsgleichung

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt sie? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - g_n + r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination und Generation in einem Volumenelement.

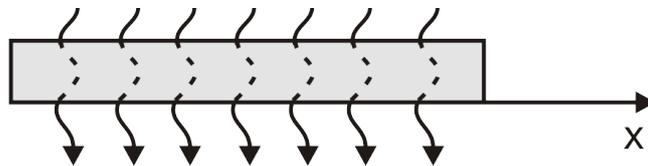


Abbildung 6: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- b) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 6 gezeigt konstant beleuchtet. Die Energie des Lichtes reicht aus, um homogen im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare mit der Generationsrate  $g_L$  zu erzeugen. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate  $r_p = \Delta p / \tau_p$  an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und  $\Delta p \ll n_D$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte über die Kontinuitätsgleichung die Überschussladungsträgerdichte  $\Delta p(t)$  vor und nach Beleuchtung. Skizzieren Sie  $p_n(t)$ . [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld  $E(x) = 0$  und  $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$ . Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$ :

Es gilt  $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$ , da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_L \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

$t > 0$ :

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt

$g_L = 0$ . Verbleibende Überschussladungsträger  $\Delta p$  rekombinieren mit Majoritätsladungsträgern und ändern sich zeitlich ( $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$ ). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = Ae^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen  $\Delta p(0) = g_L \tau_p$  und  $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$  lösen. Damit  $\Delta p$  für  $t \rightarrow \infty$  zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_L \tau_p = Ae^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_L \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von  $\Delta p(t)$  in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -bg_L \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_L \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_L \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p} d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_L \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln(\Delta p / g_L \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_L \tau_p e^{-t/\tau_p} \end{aligned}$$

- c) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit  $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$  wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde  $10^{12}/\text{cm}^3$  Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger  $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$  beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte  $p_n$  ohne und mit Beleuchtung. [2P] (Es gelte:  $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$ )

Ohne Beleuchtung:

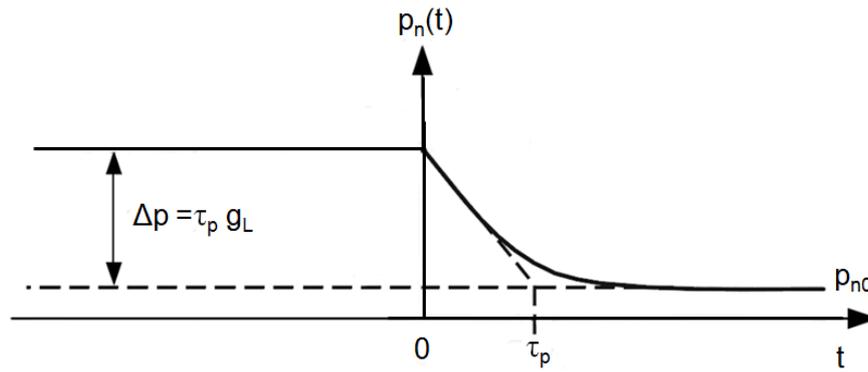


Abbildung 7: Skizze des zeitlichen Verlaufs von  $p_n(t)$ .

$$p_{n0} = n_i^2/n_D = (1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3)^2/10^{16}/\text{cm}^3 \approx 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3$$

Mit Beleuchtung:

$$p_n = p_{n0} + \tau_p g_L = 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3 + 2 \cdot 10^{-6} \mu\text{s} \cdot \frac{10^{12}/\text{cm}^3}{10^{-6} \mu\text{s}} \approx 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$$

## 7. Banddiagramm

Wir betrachten intrinsisches und nicht entartet Phosphor-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur ( $T = 300\text{ K}$ ) und bei  $T = 400\text{ K}$ .

- a) Zeichnen sie für beide Halbleiter die folgenden Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder **auf der nächsten Seite**. Zur zeichnerischen Orientierung sind bereits jeweils die Energieniveaus der Valenz- und Leitungsbandkante angedeutet. Die Auswirkung der Temperatur auf die Bandlücke wird vernachlässigt. Die effektive Masse von Elektronen und Löchern sei identisch.

- intrinsisches Silizium: Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen (Fermi-Dirac-Verteilung,  $f(W)$ ) bei den genannten Temperaturen (je eine Kurve pro Temperatur). Zeichnen Sie das Fermi-niveau ( $W_{F_i(300K)}$ ) bei Raumtemperatur und bei  $T = 400\text{ K}$  ( $W_{F_i(400K)}$ ) ein. Beschriften Sie eindeutig! [2P]
- Phosphor-dotiertes Silizium: Besetzungswahrscheinlichkeiten für Elektronen (Fermi-Dirac-Verteilung,  $f(W)$ ) bei den genannten Temperaturen (je eine Kurve pro Temperatur). Zeichnen Sie das Fermi-niveau ( $W_{F(300K)}$ ) bei Raumtemperatur und bei  $T = 400\text{ K}$  ( $W_{F(400K)}$ ) ein. Beschriften Sie eindeutig! [2P]

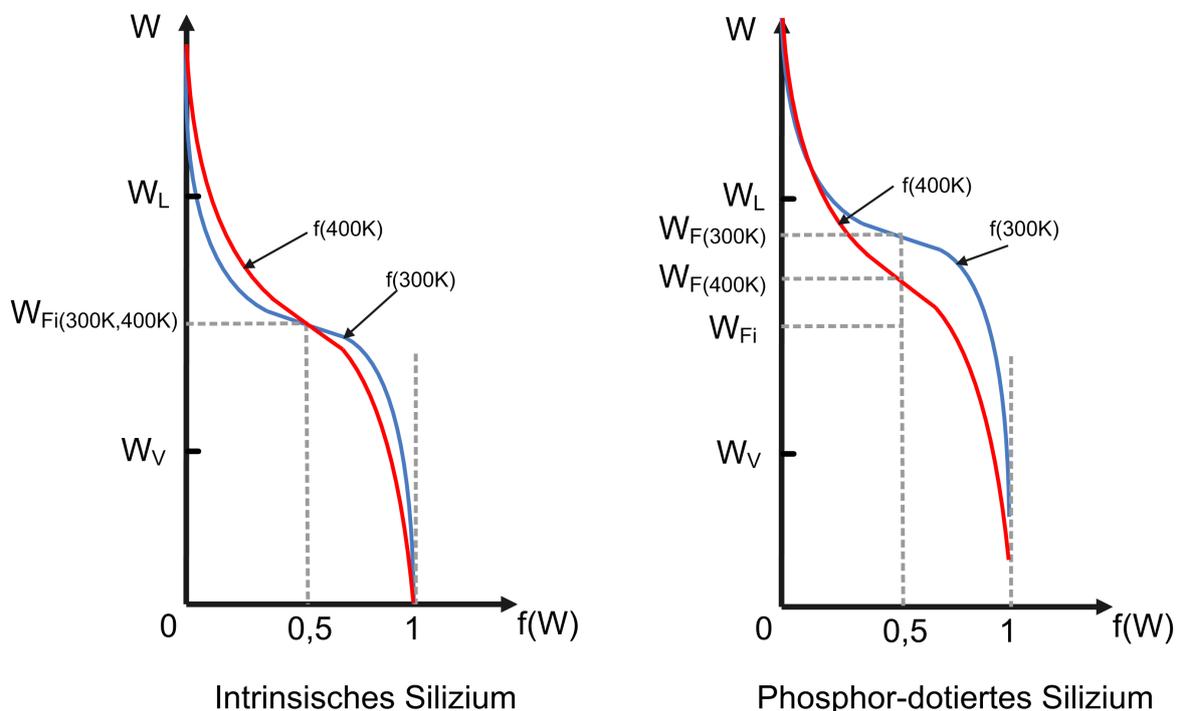


Abbildung 8: Fermi-Dirac-Verteilung von intrinsischem und Phosphor-dotierten Silizium bei verschiedenen Temperaturen.

- b) Wir betrachten p-dotiertes Silizium und n-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn die beiden unterschiedlich dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

- ...ohne äußere Vorspannung. [2P]

Solange kein äußeres elektrisches Feld am pn-Übergang anliegt, befindet er sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Das elektrochemische Potential (gleichbedeutend mit dem Ferminiveau, siehe Skript Kapitel 9.1) ist im gesamten Halbleiter identisch. Weiterhin sind die Energieniveaus weit entfernt von der Raumladungszone unverändert, da hier noch die gleichen Ladungsträgerdichten vorherrschen wie vor dem Kontakt. Als letztes müssen nur noch die Valenz- und Leitungsbandkanten in den unterschiedlich dotierten Bereichen des Siliziums über die Raumladungszone hinweg verbunden werden. Dazu wird eine quadratische Verlauf angenommen, der sich aus der Poisson-Gleichung unter Annahme der Schottky-Näherung für die Raumladungen ergibt. Man erhält das in Abbildung 9 gezeigte Banddiagramm für den pn-Übergang ohne Vorspannung.

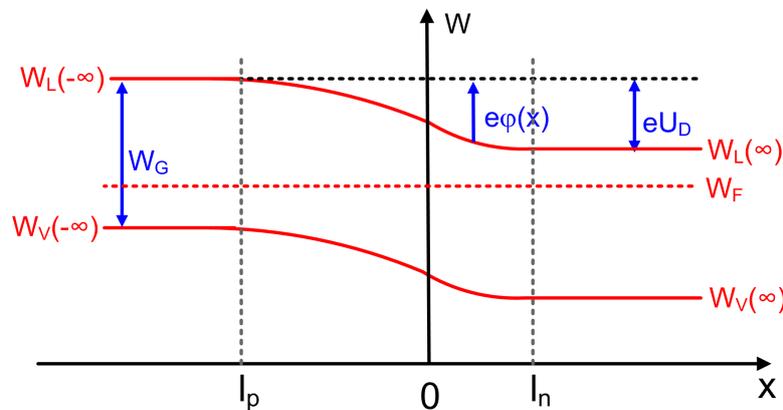


Abbildung 9: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

- ...mit äußerer Vorspannung  $+U_D$  (Diffusionsspannung) in Durchlassrichtung. [2P]

Sobald ein äußeres elektrisches Feld angelegt wird, befindet sich der pn-Übergang nicht mehr im Gleichgewicht. Ein einheitliches Fermi-Niveau für Löcher und Elektronen kann nicht mehr angegeben werden. Das Massenwirkungsgesetz gilt in der Raumladungszone nicht. Da die Raumladungszone in erster Näherung als frei von beweglichen Ladungsträgern angenommen wird, ist ihr ohmscher Widerstand im Vergleich zum Rest des Halbleiters sehr hoch. Deshalb fällt die gesamte angelegte äußere Spannung  $U$  über der Raumladungszone ab. Die Ladungsträgerdichten für Löcher und Elektronen werden getrennt voneinander über sogenannte Quasi-Fermi-Niveaus beschrieben. Die energetische Aufspaltung der Quasi-Fermi-Niveaus entspricht dabei genau der angelegten äußeren Spannung multipliziert mit der Elementarladung  $e$ . In Durchlassrichtung ( $U > 0$ ) führt dies zu einer Verringerung der Potentialbarriere  $e(U_D - U)$  und einer Verkleinerung der Raumladungszone. In Sperrichtung ( $U < 0$ ) verhält es sich genau umgekehrt. Entspricht die äußere Spannung genau der Diffusionsspannung

$U_D$  wird die Bandkrümmung genau ausgeglichen und man erhält den sogenannten Flachbandfall (Abbildung 10).

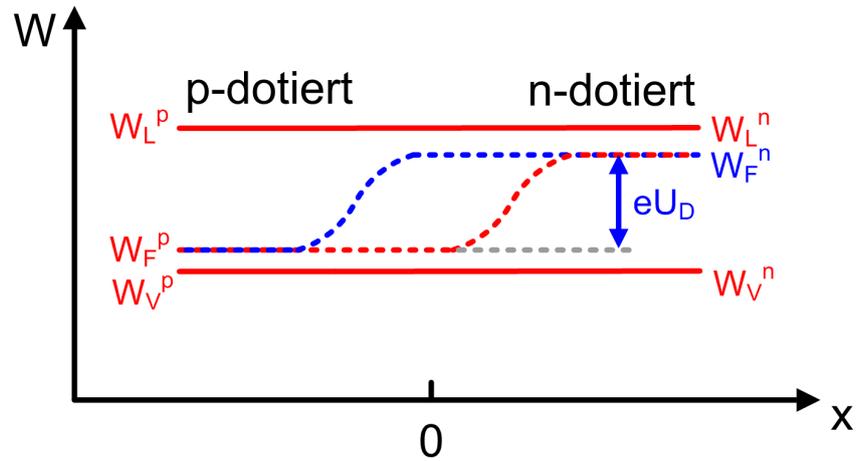


Abbildung 10: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung  $U_D$  (Flachbandfall) in Durchlassrichtung.

---

## Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	$h$	$= 6.63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	$N_A$	$= 6.02 \cdot 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
Bohr'scher Radius	$a_0$	$= 5.29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	$e$	$= 1.6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	$u$	$= 1.66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	$m_e$	$= 9.11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	$m_p$	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	$m_n$	$= 1.67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	$\epsilon_0$	$= 8.85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	$\mu_0$	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c$	$= 3.0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	$k_B$	$= 1.38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	$\pi$	$= 3.14$	
Euler'sche Zahl	$e$	$= 2.72$	

## Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

## Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
 \int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 <b>B</b> Bor	6 12,01 2,5 <b>C</b> Kohlenstoff	7 14,007 3,0 <b>N</b> Stickstoff
13 26,98 1,5 <b>Al</b> Aluminium	14 28,09 1,8 <b>Si</b> Silicium	15 30,97 2,1 <b>P</b> Phosphor
31 69,72 1,6 <b>Ga</b> Gallium	32 72,59 1,8 <b>Ge</b> Germanium	33 74,92 2,0 <b>As</b> Arsen
49 114,82 1,7 <b>In</b> Indium	50 118,69 1,8 <b>Sn</b> Zinn	51 121,75 1,9 <b>Sb</b> Antimon
81 204,38 1,8 <b>Tl</b> Thallium	82 207,2 1,8 <b>Pb</b> Blei	83 208,98 1,9 <b>Bi</b> Bismut