

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	6	7	10	8	7	7	5	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf von der Universität gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Wellenpaket [6P]

Gegeben sei folgendes Wellenpaket im k-Raum:

$$\Psi(k) = \frac{Ab}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2}$$

- a) Bestimmen Sie den k-Wert mit der maximalen Aufenthaltswahrscheinlichkeit im k-Raum. (Rechnung oder Begründung erforderlich) [2P]

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit berechnet sich zu:

$$|\Psi(k)|^2 = \frac{b^2 A^2}{2\pi} e^{-b^2(k-k_0)^2}$$

Das Maximum wird durch die Berechnung des Nullpunkts der Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d|\Psi(k)|^2}{dk} &= \frac{b^2 A^2}{2\pi} 2b^2 (k - k_0) e^{-b^2(k-k_0)^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow k_{\max} = k_0 \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die Breite des Wellenpakets im k-Raum. Die Breite ist begrenzt durch die Punkte im k-Raum, bei denen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf $1/e$ des Maximalwerts abgefallen ist. [2,5P]

Maximale Aufenthaltswahrscheinlichkeit:

$$|\Psi(k_{\max})|^2 = \frac{b^2 A^2}{2\pi}$$

Bestimmung der k-Werte bei der die Wahrscheinlichkeit auf $1/e$ abgefallen ist:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 A^2}{2e\pi} &= \frac{b^2 A^2}{2\pi} e^{-b^2(k-k_0)^2} \\ 1 &= b^2 (k - k_0)^2 \\ \pm 1 &= b (k - k_0) \\ \Rightarrow k &= k_0 \pm \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Breite $\Delta k = 2/b$

- c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnis aus Aufgabenteil b) die Ortsunschärfe des Wellenpakets. Begründen Sie ihr Vorgehen. Falls Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit der allgemeinen Breite Δk . [1,5P] *Bestimmen der Impulsunschärfe:*

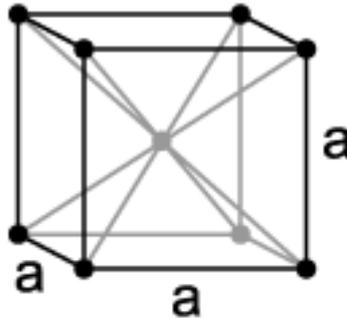
$$\Delta p = \hbar \Delta k = 2 \frac{\hbar}{b}$$

Mit Anwendung der Heisenberg'schen Unschärferelation ergibt sich:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{b}{4}$$

2. Kristall [7P]

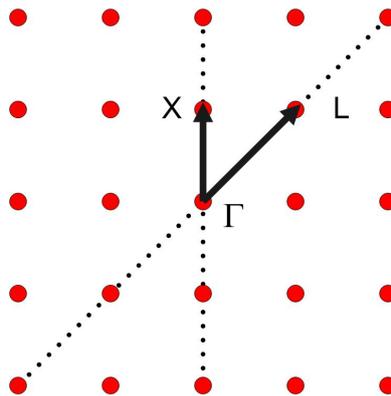
- a) Natrium kristallisiert in einem bcc-Gitter mit einatomiger Basis. Es hat eine Dichte von $\rho = 0,97 \text{ g/cm}^3$ und eine Molmasse von $22,99 \text{ g/mol}$. Zeichnen Sie eine Elementarzelle und berechnen Sie die Gitterkonstante des Gitters. [2P]



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = \frac{2 \cdot M}{a^3 \cdot N_A}$$

$$\rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 22,99 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{0,97 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}} = 429 \text{ pm}$$

- b) Erklären Sie anhand eines zweidimensionalen quadratischen Gitters, warum die Bandstruktur richtungsabhängig ist. Fertigen Sie dazu eine Skizze des Gitters an und zeichnen Sie zwei geeignete Kristallrichtungen ein. [2P]



Diesen Sachverhalt kann man sich für den 2D-Fall leicht veranschaulichen. In einem quadratischen Gitter liegen zum Beispiel die Gitterplätze entlang der Richtung $\vec{\Gamma X}$ enger als in Richtung $\vec{\Gamma L}$. Somit „sieht“ ein Elektron verschiedene Gitterabstände, je nachdem, in welche Richtung es sich im Kristall bewegt. Das führt zu unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften und folglich zu einer richtungsabhängigen Bandstruktur.

- c) Wie lässt sich die Kristallstruktur experimentell charakterisieren? [1P]

Bestrahlt man einen Kristall mit Licht der Wellenlänge λ , so treten entsprechend der Bragg'schen Streu-Bedingung

$$2d \sin(\alpha) = m\lambda$$

Reflexionen auf. Jede Kristallstruktur hat dabei ihr typisches Reflexions-Muster. Andere plausible Antworten (STM, AFM...) auch möglich

- d) Je nach Art der Herstellung können sich die Atome verschieden geordnet zu Festkörpern zusammenschliessen. Neben der kristallinen Ordnung gibt es noch zwei weitere gängige Ordnungstypen (Strukturen) in Festkörpern. Welche sind das? Beschreiben Sie diese kurz. [2P]
- *Polykristalline Festkörper: Kristalline Bereiche, aber keine Fernordnung*
 - *Amorphe Festkörper: nur Nahordnung, keine Periodizität, keine Fernordnung.*

3. Dotierte Halbleiter [10P]

Wir betrachten im Folgenden einen mit 10^{18} cm^{-3} stark phosphordotierten Silizium-Kristall bei einer Temperatur von 300 K.

- a) Bestimmen Sie die Fermi-Energie relativ zur Leitungsbandkante. Nehmen Sie für den vorliegenden Fall Störstellenerschöpfung an.

Verwenden Sie eine effektive Zustandsdichte von $N_{eff} = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ für das Leitungsband.

Wie ändert sich die Lage der Fermi-Energie mit zunehmender Temperatur? Begründen Sie ihre Antwort. [3,5P]

- negative Ladungsträgerdichte (freie Ladungsträger): $n_0 = n_i + n_D^+$
- positive Ladungsträgerdichte (freie Ladungsträger + ionisierte Störstellen): $p_i + n_D^+$

Fast alle Dotieratome sind ionisiert: $n_D^+ \approx n_D \Rightarrow n_D^+ \gg p_i$

Damit folgt für die freie negative Ladungsträgerdichte auf Grund der Ladungsneutralität:

$$n_0 = n_D^+ \approx n_D \quad (1)$$

Weiterhin gilt:

$$n_0 = N_{eff} \cdot e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}} \quad (2)$$

$$W_F = W_L + kT \cdot \ln\left(\frac{n_D}{N_{eff}}\right) \quad (3)$$

$$= W_L - 0,082 \text{ eV} \quad (4)$$

Die Fermi-Energie bewegt sich in Richtung der Bandlückenmitte ($W_F = 0,55 \text{ eV}$), da sich der HL zunehmends intrinsisch verhält bzw. die freien Ladungsträger des Leitungsbandes werden aus dem Valenzband generiert.

- b) Berechnen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeit für die Zustände an der Leitungsbandkante des Siliziums. [1P]

Die Besetzungswahrscheinlichkeit wird durch die Fermi-Verteilung bestimmt:

$$f(W_L) = \frac{1}{1 + e^{(W_L - W_F)/(k_B T)}} = \frac{1}{1 + e^{(0,082)/(8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300)}} = 0,04 \quad (5)$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeit liegt damit bei 4%.

- c) Der bislang behandelte Silizium-Kristall habe eine Länge von 10 cm und eine Querschnittsfläche von $0,4 \text{ cm}^2$. An den Enden wird ein Widerstand von $50 \text{ m}\Omega$ gemessen. Bestimmen Sie die Beweglichkeit der Leitungselektronen. [2P]

Für die Leitfähigkeit gilt:

$$\sigma = \frac{l}{R \cdot A} = e \cdot (\mu_n \cdot n + \mu_p \cdot p) \tag{6}$$

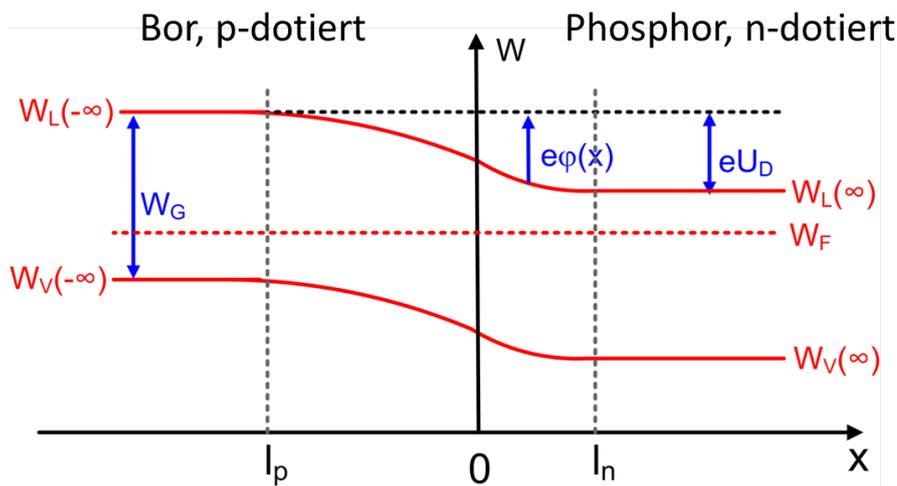
$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{stark n-dotiert}} = e \cdot N_D^+ \cdot \mu_n \tag{7}$$

Daraus folgt:

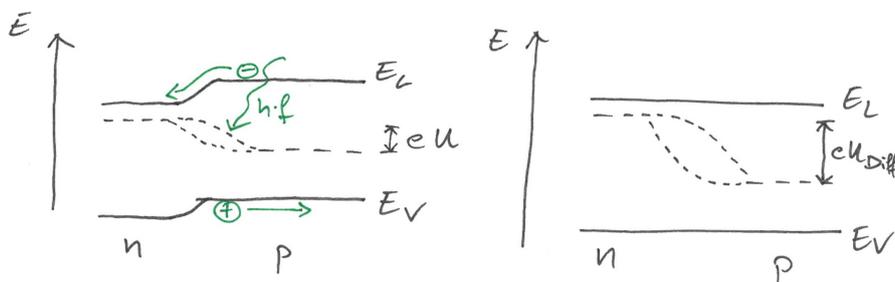
$$\mu_n = \frac{l}{R \cdot A \cdot e \cdot N_D^+} = 3121 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \tag{8}$$

- d) Das phosphordotierte Silizium wird mit bordotiertem Silizium in Kontakt gebracht, sodass sich ein p-n-Übergang ausbildet. Hierbei fällt die Bordotierung deutlich schwächer aus als die Phosphordotierung.

Zeichnen Sie den sich ausbildenden p-n-Übergang und kennzeichnen Sie die bor- und phosphordotierten Bereiche, sowie die Raumladungszone. Achten Sie auf eine präzise Zeichnung und beschriften Sie die einzelnen Elemente. [2P]



- e) Nehmen Sie an, dass der p-n-Übergang mit offenen Kontakten beleuchtet wird. Skizzieren Sie den p-n-Übergang und zeichnen sie die Fermienergie ein. Was ändert sich im Vergleich zu dem Fall in d)? [1,5P]



Die sich bildenden freien Ladungsträger können nicht über die Außenkontakte abfließen, folglich ist an diesen eine Spannung zu messen. Bei sehr hohen Bestrahlun-

gintensitäten kann diese Spannung, die Leerlaufspannung, der Diffusionsspannung entsprechen und es liegt der sog. Flachbandfall vor.

4. Generation und Rekombination [8P]

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an. Was besagt die Kontinuitätsgleichung? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - g_n + r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_n) und Generation (g_n) in einem Volumenelement.

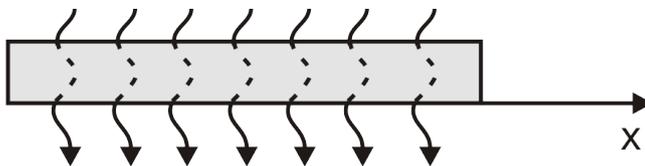


Abbildung 1: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- b) Gegeben sei ein unbeleuchteter, stark n-dotierter Halbleiter bei Raumtemperatur. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird der Halbleiter wie in Abbildung 7 gezeigt konstant beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Dichte der Löcher $p_n(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Geben Sie hierbei die Dichten der Löcher für die Grenzwerte $t \rightarrow \pm\infty$ an. [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = a + be^{-ct}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = p_{n0}$ lösen. Das Einsetzen des Ansatzes in die DGL führt zu:

$$-bce^{-ct} = g_L - \frac{1}{\tau_p} (a + be^{-ct})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{\tau_p} - bc \right) e^{-ct} + \left(\frac{a}{\tau_p} - g_L \right) = 0$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\frac{b}{\tau_p} - bc = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\tau_p}$$

$$\frac{a}{\tau_p} - g_L = 0 \Rightarrow a = g_L \tau_p$$

Zusammen mit der Randbedingung $\Delta p(0) = 0$ ergibt sich:

$$\Delta p(0) = g_L \tau_p + be^{-\frac{0}{\tau_p}} = 0$$

$$\Rightarrow b = -g_L \tau_p$$

Und somit bestimmt man den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ zu:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}})$$

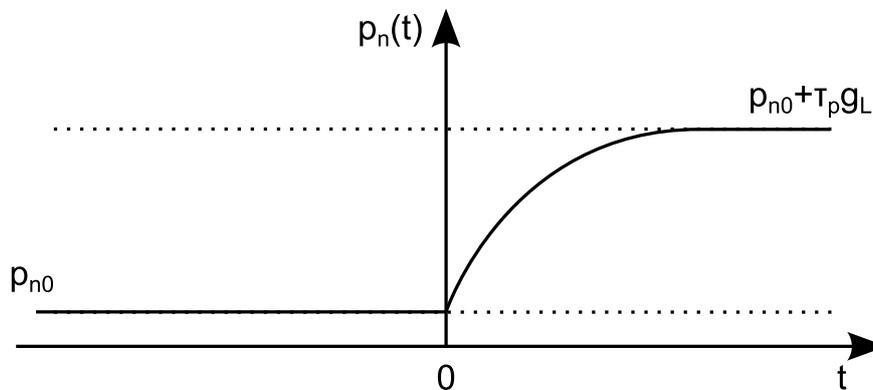


Abbildung 2: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p_n(t)$.

- c) Ein n-dotierter Halbleiter mit der Donatorendichte $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in b) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 800\text{ns}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p_n mit und ohne Beleuchtung. [2P] (Es gelte: $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$)

Ohne Beleuchtung:

$$p_{n0} = n_i^2/n_D = (1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3)^2/10^{16}/\text{cm}^3 \approx 2,3 \cdot 10^4/\text{cm}^3$$

Mit Beleuchtung:

$$p_n = p_{n0} + \tau_p g_L = 2,3 \cdot 10^4 / \text{cm}^3 + 0,8 \mu\text{s} \cdot \frac{10^{12} / \text{cm}^3}{\mu\text{s}} \approx 8 \cdot 10^{11} / \text{cm}^3$$

5. Potentialstufe [7P]

Folgendes Potential $V(x)$ sei gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ V_0 & : 0 \leq x \end{cases} \quad \text{mit } V_0 = 4 \text{ eV}$$

- a) Betrachten Sie ein von links ($x < 0$) einlaufendes Elektron mit dem Impuls $p = 1,3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Energie des Elektrons in Elektronenvolt und zeichnen Sie entsprechend den Potentialverlauf mit der sich ausbreitenden Elektronenwelle in den Bereichen $x < 0$ und $0 \leq x$.

Wie ändert sich der Impuls an der Stelle $x = 0$? [1,5P]

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1,3 \cdot 10^{-24})^2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6} \text{ eV} = 5,80 \text{ eV} \quad (9)$$

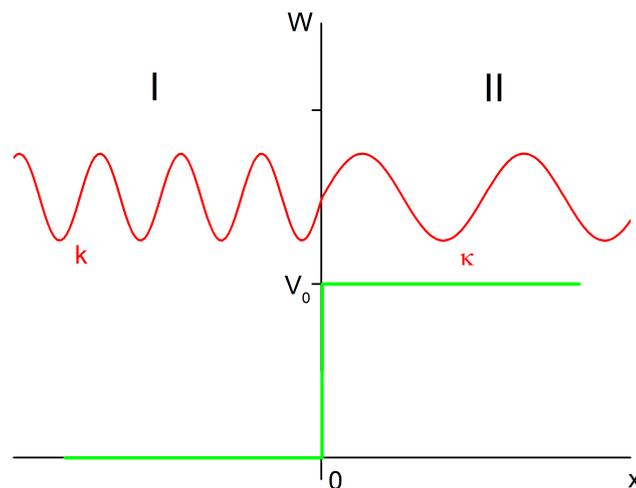


Abbildung 3: Potentialstufe mit Teilchenwelle

Der Impuls des Elektrons wird kleiner.

- b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Reflektionswahrscheinlichkeit des Elektrons an der Potentialstufe her und berechnen Sie diese für eine Energie des Elektrons $W = \frac{3}{2}V_0$. Wie groß wäre die Reflektionswahrscheinlichkeit bei einer klassischen Betrachtung des Elektrons? [4P]

Von links einlaufende Welle: $\psi_{\text{ein}}(x) = e^{jkx}$.

Geschicktes Aufstellen der Wellenfunktionen Mit $V_0 < W$:

$$\psi_{\text{I}}(x) = e^{jkx} + r e^{-jkx} \quad \psi_{\text{II}}(x) = t e^{j\kappa x} \quad (10)$$

Damit: Reflexionskoeffizient $R = r^2$.

Aus der Stetigkeit der Wellen an der Stelle $x = 0$ folgt:

$$(i) \quad \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (11)$$

$$(ii) \quad \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad (12)$$

$$(i) \quad 1 + r = t \quad (13)$$

$$(ii) \quad jk - jkr = j\kappa t \quad (14)$$

$$(i \rightarrow ii) \quad r = \frac{k - \kappa}{k + \kappa} \quad (15)$$

$$(16)$$

Für die Wellenzahlen k und κ gilt:

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{3mV_0} \quad (17)$$

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - V_0)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mV_0} \quad (18)$$

Damit ergibt sich folgender Reflexionskoeffizient:

$$R = r^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right)^2 = 0,27^2 = 0,07 \quad (19)$$

Das Elektron wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 7% reflektiert.

Im klassischen Fall wird das Elektron als Teilchen betrachtet, und die Wahrscheinlichkeit der Reflektion ist null solange die Energie des Elektrons größer ist als die Potentialstufe.

- c) Betrachten Sie nun ein von links ($x < 0$) einlaufendes Elektron mit der Energie $W = 0,99 \cdot V_0$. Wie groß ist die Eindringtiefe d des Teilchens in die Potentialstufe ($x \geq 0$), bei der die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an dem Ort d auf $1/e$ des maximalen Werts gesunken ist? [1,5P]

Wellenfunktion im Bereich $x \geq 0$:

$$\Psi(d) = C \cdot e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0 - W)} \cdot d}{\hbar}}$$

Es gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{e} &= |\Psi(d)|^2 \\ \frac{1}{e} &= e^{-2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - W)} \cdot d}{\hbar}} \\ 1 &= e^{-2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - W)} \cdot d}{\hbar} + 1} \\ d &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - 0,99V_0)}} \\ &= 4,88 \cdot 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

6. Potentialtöpfe [7P]

Ein dünner Halbleiterfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Halbleiterfilm. Das Potential kann als eindimensionaler Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt $W_1 = 14,9 \text{ meV}$. Wie dick ist der Halbleiterfilm? [1P] (Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)

Die Energieeigenwerte $W_n(x)$ im unendlichen Potentialtopf ergeben sich zu:

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

Umstellen nach L und für $n = 1$ folgt:

$$L = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2mW_1}} = 5 \text{ nm}$$

- b) Das Elektron wird durch Licht in den zweiten angeregten Zustand ($n=3$) angeregt. Welche Wellenlänge muss das Licht dazu besitzen? [1,5P]

Das Photon hat eine Energie von

$$W_3 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 = 135 \text{ meV}$$

$$\Delta W = 120,1 \text{ meV}$$

$$\Rightarrow \lambda = 10,3 \mu\text{m}$$

- c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes und geben Sie die normierten Wellenfunktionen an. Berechnen Sie hierzu explizit die Amplitude dieser beiden Zustände. [2P]

Die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ sind

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

mit der Normierung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \frac{A^2 L}{2}$$

folgt $A_n = \sqrt{2/L}$ und damit

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{1\pi}{L}x\right)$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

(Angabe der Wellenfunktionen reichte aus.)

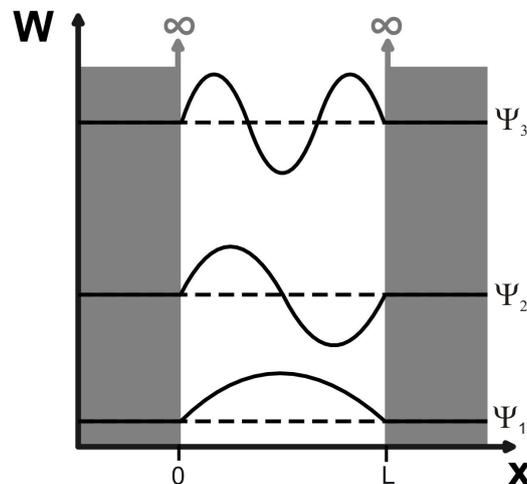


Abbildung 4: Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ für $n = 1, 2, 3$. Gefragt war nach $\psi_1(x)$ und $\psi_3(x)$.

- d) Der perfekte Isolator werde durch einen realen Isolator ausgetauscht. Auf dem an L angrenzenden Isolator werde nach einer Dicke d ein weiterer Halbleiterfilm der Dicke L aufgebracht an den wieder eine unendlich ausgedehnt gedachte Isolatorschicht anschließt. Die Dicke des Isolators wird auf wenige Nanometer begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke d des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in x -Richtung und die Wellenfunktion der beiden Zustände mit niedrigster Energie der Elektronen. [1,5P]

Ein realer Isolator führt zu einem endlich hohen Potentialtopf. Dadurch reichen die Wellenfunktionen in die Isolatorschichten hinein. Wird die Überlappung der Wellenfunktionen der Elektronen in den Halbleiterfilmen bei kleinen Isolatorschichtdicken d groß, können Elektronen die Barriere mit einer nicht vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeit „durchtunneln“. Die Wellenfunktionen der Elektronen der Halbleiterfilm Goldfilme können nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden, sondern sind gekoppelt bzw. spalten sich auf.

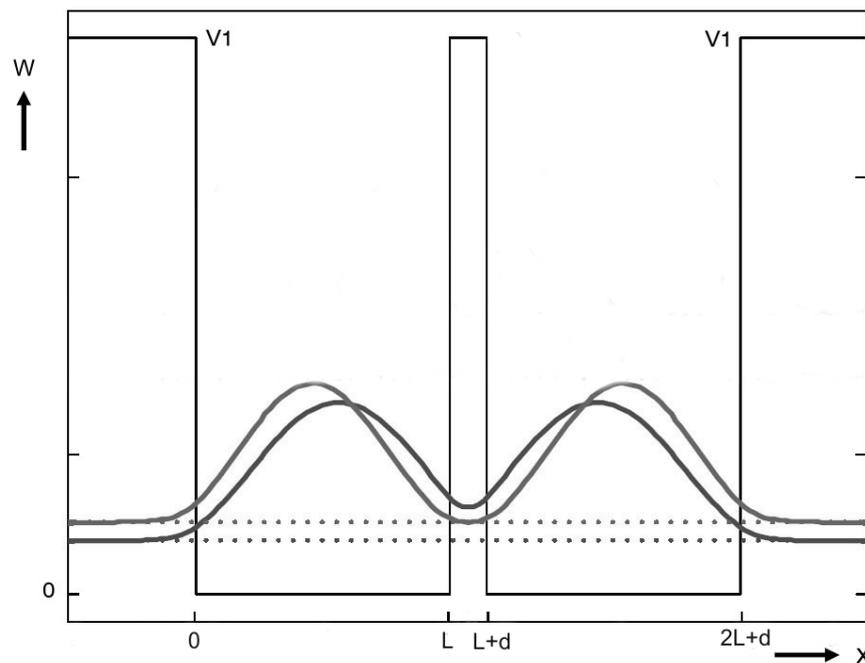


Abbildung 5: Nicht verschwindende Wellenfunktion in den Potentialbarrieren und Aufspaltung der Wellenfunktionen bei gekoppelten Potentialtöpfen.

- e) Die Schichten seien nun in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt. Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen x , y und z qualitativ? [1P]

Die Wellenfunktionen in x -Richtung sind diskret, während sie in y - und z -Richtung wegen der unendlichen Ausdehnung der Schichten kontinuierlich sind.

7. Bandstruktur [5P]

Wir betrachten eine Indium-Phosphid-Probe. Bei einer Temperatur von 293 K beträgt die Bandlücke in diesem Halbleiter $W_G = 1,34\text{eV}$.

- a) Die Bandstruktur von Indium-Phosphid ist in Abbildung 6 gegeben. Zeichnen Sie in diese Abbildung die parabolische Näherung für das Valenz- und das Leitungsband der Bandstruktur ein. Skizzieren Sie in einem separatem Bild grob die entscheidenden Bänder der Bandstruktur von Silizium. Welcher wichtige Unterschied besteht zwischen den beiden Materialien? [2P]

Silizium ist im Gegensatz zu Indium-Phosphid ein indirekter Halbleiter, das heißt das Maximum des Valenzbandes und das Minimum des Leitungsbandes liegen bei unterschiedlichen Kristallimpulsen.

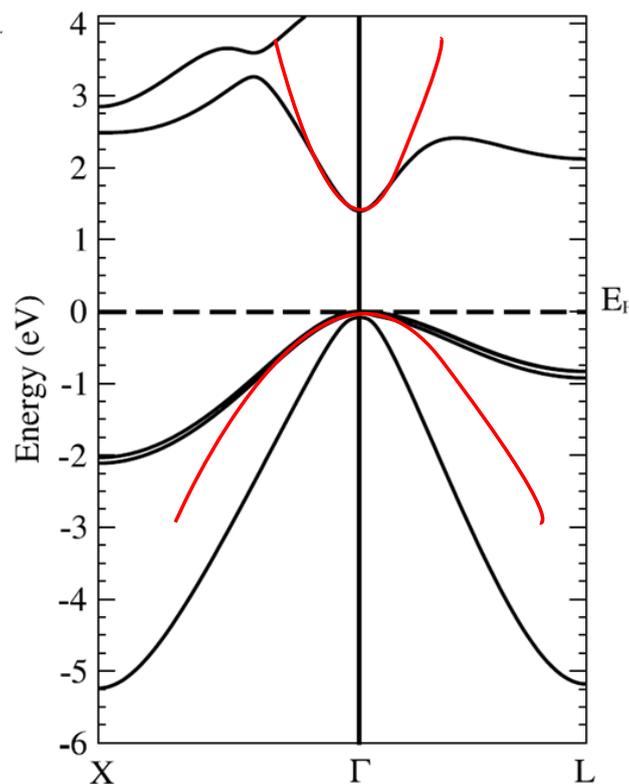


Abbildung 6: Bandstruktur Indium-Phosphid

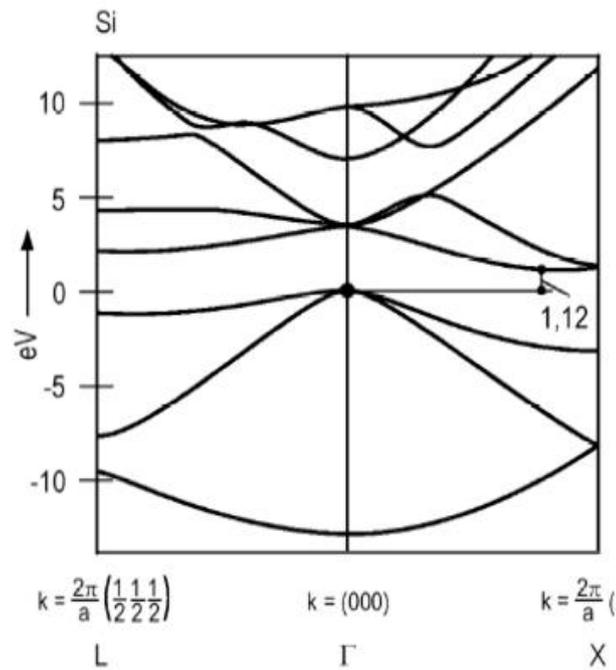


Abbildung 7: Bandstruktur Silizium (grobe Skizze war ausreichend!)

b) Betrachten Sie das niedrigste Leitungsband von Indium-Phosphid in Abbildung 6 im Γ - und im L -Punkt. An welchem Punkt erwarten Sie eine höhere Beweglichkeit bzw. eine größere Zustandsdichte? Begründen Sie Ihre Antwort! [2P]

- *Beweglichkeit: $\mu = |v|/E = |q\tau/m|$ Die Beweglichkeit ist antiproportional zur effektiven Masse. Im Γ -Punkt ist die Bandkrümmung stärker als im L -Punkt. Somit ist im Γ -Punkt die effektive Masse kleiner und die Beweglichkeit größer.*
- *Zustandsdichte: Am L -Punkt ist der Bandverlauf flacher. Somit „passen“ pro Energie mehr Zustände ins Band und die Zustandsdichte ist hier größer als im Γ -Punkt.*

c) Nun sei die parabolische Näherung für das Leitungsband gegeben als $W_L(k) = W_G + ak^2$, wobei $a = \hbar^2/(0,16 \cdot m_0)$. Berechnen Sie die effektive Masse der Elektronen im Leitungsband. [1P]

$$\begin{aligned}
 m_{eff} &= \hbar^2 \frac{1}{\partial^2 W / \partial k^2} \\
 &= \hbar^2 \frac{1}{2a} = 0,08m_0 \\
 &= 7,3 \cdot 10^{-32} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut