

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	11	7	11	9	11	9	58

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 58, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 29.
- In Klammern angegebene Zahlen am Aufgabenende sind die erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Bitte schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT gestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Bitte nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie bitte jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Teilchen und Wellen [11P]

Teil I:

- a) Erklären Sie stichwortartig den Photoeffekt! Zeigt dieser Effekt eher den Teilchen- oder Wellencharakter von elektromagnetischer Strahlung? [1P]

Photoeffekt: Elektronen eines Halbleiters werden durch Bestrahlung (z.B. mit kurzwelliger elektromagnetischer Strahlung) aus der Oberfläche herausgelöst

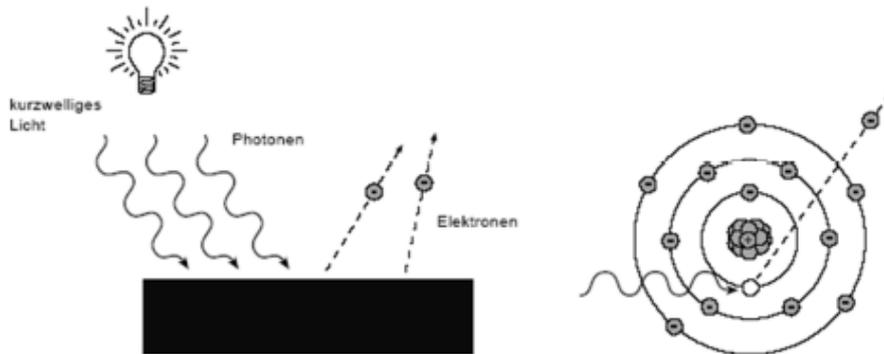


Abbildung 1: Photoeffekt: elektromagnetische Strahlung zeigt Teilchencharakter.

- b) Erklären Sie stichwortartig das Doppelspalt-Gedankenexperiment für Elektronen! Zeigt dieses Experiment eher den Teilchen- oder Wellencharakter von Elektronen? [1P]

Doppelspalt-Experiment: Aus einer Elektronenkanone werden Elektronen auf zwei sehr kleine Spalte geschossen. Dabei kann hinter den Spalten auf einem Schirm ein Interferenzmuster beobachtet werden, das nur mithilfe einer Wellenvorstellung der Elektronen erklärt werden kann, da insbesondere das Hauptmaximum dieser Interferenz genau zwischen beiden Spalten liegt.

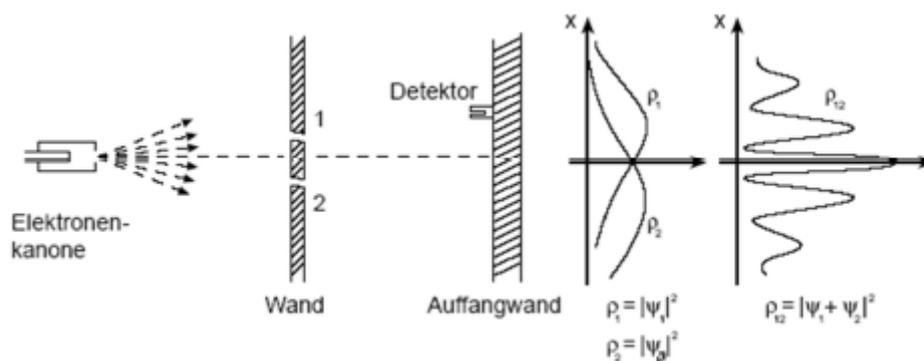


Abbildung 2: Doppelspalt-Gedankenexperiment: Elektronen zeigen Wellencharakter.

Teil II:

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

mit $A \neq 0$

- c) Leiten Sie mit Hilfe der gegebenen Wellenfunktion die Dispersionsrelation für ein freies Teilchen im Vakuum her! Betrachten Sie dafür die zeitabhängige Schrödingergleichung. [1,5P]

Zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right) \psi(x,t)$$

freies Teilchen im Vakuum:

$$V(x,t) = 0$$

Einsetzen und Kürzen liefert

$$\left(\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) Ae^{j(kx-\omega t)} = 0$$

Da $Ae^{j(kx-\omega t)} \neq 0$ folgt:

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

- d) Leiten Sie die Phasengeschwindigkeit für ein freies Teilchen im Vakuum her! Beginnen Sie mit der Betrachtung eines Punktes konstanter Phase und setzen Sie am Ende der Rechnung Ihr Ergebnis aus c) ein. [1,5P]

Phasengeschwindigkeit: Fortbewegung eines Punktes mit konstanter Phase, d.h. $(kx - \omega t) = \text{const.}$ Damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (kx - \omega t) = 0$$

$$k \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) - \omega = 0$$

$$kv - \omega = 0$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

- e) Wie berechnet sich die Gruppengeschwindigkeit für das freie Teilchen im Vakuum? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Phasengeschwindigkeit! [1P]

$$v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k_0}{m} = 2 \frac{\hbar k_0}{2m} = 2v_P$$

- f) Bestimmen Sie die räumlich abhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die oben gegebene Wellenfunktion! An welchem Ort ist das Teilchen demnach am wahrscheinlichsten anzutreffen? [1P]

$$P = |\psi(x,t)|^2 = |A|^2$$

Das Teilchen ist an allen Orten mit derselben Wahrscheinlichkeit anzutreffen. Somit ist es vollständig delokalisiert.

Teil III:

Betrachten Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Wellenpaket mit der normierten Funktion

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} e^{jk_0x}$$

- g) Wie nennt sich die mathematische Form dieses Wellenpakets? [0,5P]

Gauss'sches Wellenpaket

- h) Berechnen Sie den Orts-Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$ für das Wellenpaket unter Angabe aller Rechenschritte! [2P]

Da die Wellenfunktion laut Aufgabenstellung bereits normiert ist, reicht es folgendes Problem zu lösen:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} e^{-jk_0x} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} e^{jk_0x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \cdot e^{-\frac{x^2}{a_0^2}}}_{=0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a_0\sqrt{\pi}}} \right)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

- i) Wie verändert sich qualitativ die Halbwertsbreite des Wellenpakets im Ortsraum mit zunehmender Zeit unter dem Einfluss der Dispersion? [0,5P]

Das Wellenpaket zerfließt mit der Zeit, d.h. seine Halbwertsbreite im Ortsraum wird mit zunehmender Zeit immer größer.

- j) Wie groß ist die Unsicherheit in der Impulsbestimmung, falls der Ort x des Wellenpakets mit einer Genauigkeit von $\frac{a_0}{\sqrt{2}} > 0$ gemessen werden kann? [1P]

Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Daraus folgt:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{2a_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}a_0}$$

2. Bandstruktur [7P]

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters.

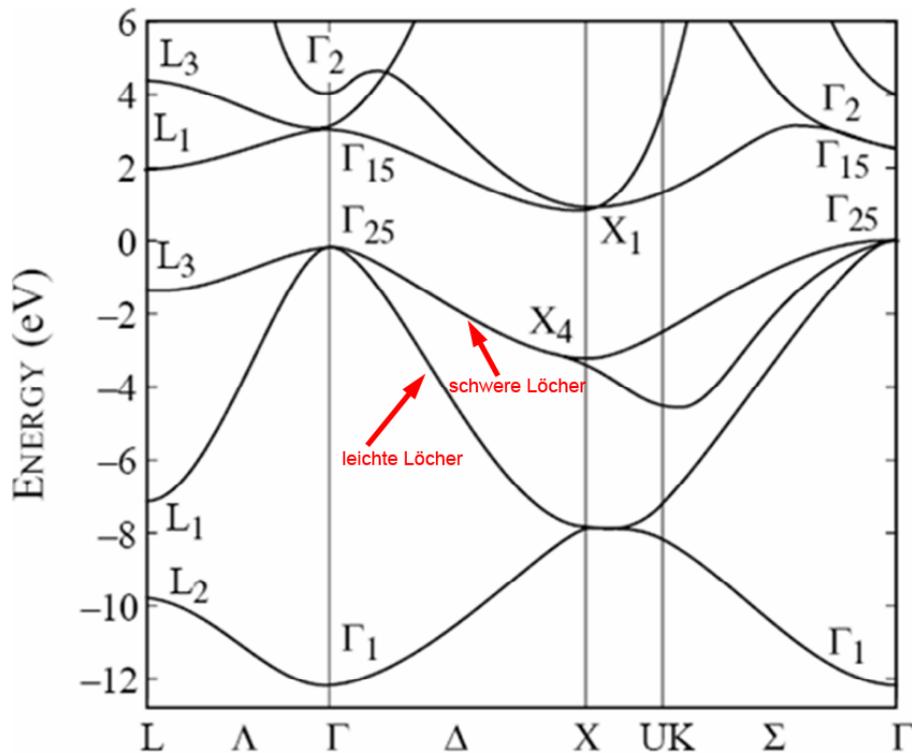


Abbildung 3: Bandstruktur des Halbleiters.

- a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

Da das Minimum des Leitungsbandes nicht beim gleichen k -Vektor wie das Maximum des Valenzbandes liegt, handelt es sich um einen indirekten Halbleiter.

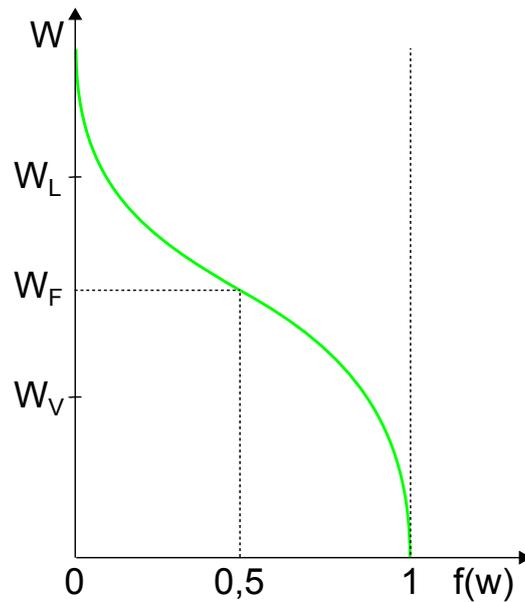
- b) Erklären Sie anhand der Bandkrümmung den Begriff schwere und leichte Löcher! Welche Kurve gehört demnach zu welchen Löchern? Beschriften Sie entsprechend die Pfeile in der obigen Abbildung! [1,5P]

Die effektive Masse berechnet sich zu

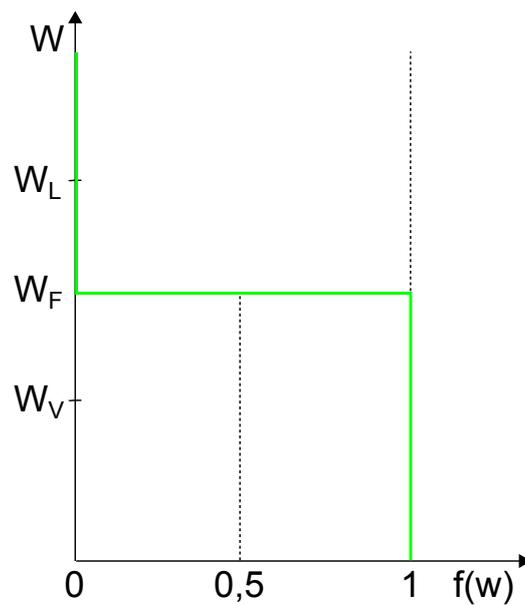
$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

und ist somit proportional zu dem Kehrwert der Bandkrümmung. Anhand der Bandstruktur ist zu erkennen, dass es im Valenzband zwei Kurven unterschiedlicher Krümmung gibt. Das stärker gekrümmte gehört zu den leichten Löchern, das schwächer gekrümmte zu den schweren Löchern.

- c) Skizzieren Sie die energieabhängige Besetzungswahrscheinlichkeit für Elektronen in einem intrinsischen Halbleiter bei Raumtemperatur! Zeichnen Sie hierbei die Fermi-Energie sowie die Valenz- und die Leitungsbandkante ein! [1P]



- d) Wie verändert sich diese Besetzungswahrscheinlichkeit bei $T = 0\text{ K}$? Was hat das für Folgen für die Elektronendichte im Leitungsband? [1P]



Die Elektronendichte im Leitungsband sinkt auf den Wert 0.

- e) Der intrinsische Halbleiter habe eine Bandlücke von $1,2\text{ eV}$ und die effektive Masse der Elektronen und Löcher sei gleich der freien Elektronenmasse. Wie groß ist die Elektronendichte bei $T = 300\text{ K}$? [1P]

$$p = n_i = \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right)$$

$$N_L = N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow p = 2 \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 2,1 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{cm}^3}$$

- f) Welche Wellenlänge hat die emittierte Strahlung bei dem Übergang eines Elektrons vom Leitungsband in das Valenzband in diesem Halbleiter? Handelt es sich hierbei um Ultraviolett- oder Infrarotstrahlung? [1,5P]

$$\lambda = \frac{hc}{W_G} = 1034 \text{ nm}$$

Es handelt sich hierbei um Infrarotstrahlung.

3. Leitfähigkeit und Dotierung [11P]

- a) Erklären Sie stichwortartig das Czochralski-Verfahren zur Herstellung eines Silizium-Einkristalls! [1P]

Der Einkristall wird durch langsames Heben aus der hochreinen Schmelze gezogen, die mit Heizspulen verflüssigt wird. Den Startpunkt bildet ein kristalliner Keimling.

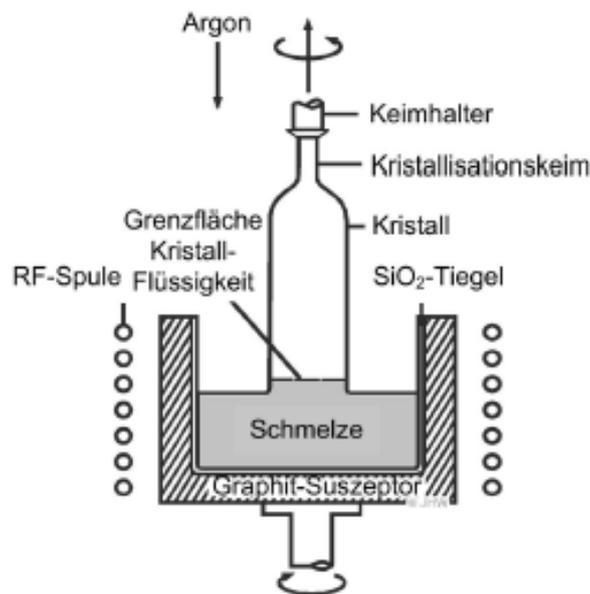


Abbildung 4: Czochralski-Verfahren zur Einkristallherstellung.

Der hergestellte Silizium-Einkristall habe bei Raumtemperatur ($T = 300 \text{ K}$) eine Bandlücke von $1,1 \text{ eV}$. Gehen Sie zudem davon aus, dass die Elektronen im Leitungsband eine kleinere effektive Masse als die Löcher im Valenzband haben. Die intrinsische Ladungsträgerdichte sei $1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$.

- b) Wie groß ist die intrinsische Leitfähigkeit bei einer Elektronenbeweglichkeit von $1400 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ und einer Löcherbeweglichkeit von $450 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$? [1P]

$$\sigma = en_i(\mu_n + \mu_p) = 4,45 \cdot 10^{-6} \text{ AV}^{-1} \text{ cm}^{-1} = 4,45 \cdot 10^{-4} \text{ AV}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

- c) Berechnen Sie die Driftstromdichte, die sich bei einer angelegten Spannung von 5 V über eine 5 mm dicke Probe einstellt! [1P]

$$j = \sigma E = \sigma \frac{U}{d} = 0,445 \text{ A/m}^2 = 44,5 \mu\text{A/cm}^2$$

- d) Die Lage des Ferminiveaus im gegebenen intrinsischen Silizium-Halbleiter kann allgemein über die Gleichung

$$W_F = \frac{1}{2}(W_L + W_V) + \frac{1}{2}k_B T \ln \left(\frac{N_V}{N_L} \right)$$

berechnet werden. Liegt das Fermi-niveau näher am Leitungs- oder näher am Valenzband? Begründen Sie Ihre Aussage mithilfe der angegebenen Formel! [1,5P]

Es gilt

$$W_F = \frac{1}{2}(W_L + W_V) + \frac{1}{2}k_B T \ln \left(\frac{N_V}{N_L} \right) = \frac{1}{2}(W_L + W_V) + \frac{3}{4}k_B T \ln \left(\frac{m_{\text{eff,h}}}{m_{\text{eff,e}}} \right)$$

Laut Aufgabenstellung gilt zudem, dass die Elektronen im Leitungsband gegenüber den Löchern im Valenzband eine kleinere effektive Masse haben. Somit wird der natürliche Logarithmus größer Null, wodurch sich die Fermi-Energie zu größeren Energien - also zum Leitungsband - verschiebt.

Das Silizium wird nun mit 10^{18} Phosphor-Atomen pro Kubikzentimeter nach dem Verfahren der Ionenimplantation dotiert.

- e) Handelt es sich hierbei um eine n- oder um eine p-Dotierung? Begründen Sie ihre Aussage! [1P]

Es handelt sich um eine n-Dotierung, da Phosphor ein Valenzelektron mehr als Silizium besitzt.

- f) Erklären Sie das Verfahren der Ionenimplantation und nennen Sie ein alternatives Verfahren zur Dotierung! [1,5P]

Ionisierte Dotieratome werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und auf die zu dotierende Oberfläche geschossen. Je nach Energie dringen die Teilchen verschieden tief in den Halbleiter ein.

Alternatives Dotierverfahren: z.B. Eindiffusion oder dotiertes Czochralski-Verfahren

- g) Auf welchen Wert ändert sich durch die Dotierung die Ladungsträgerkonzentration der Löcher? Sie können von Störstellenschöpfung ausgehen. [1P]

Massenwirkungsgesetz:

$$n_i^2 = np$$

Daraus folgt:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{n_i + n_D} = 225 \text{cm}^{-3}$$

Wegen Störstellenschöpfung kann n_i im Nenner auch direkt vernachlässigt werden. Aufgrund der hohen Dotierung ändert die Berücksichtigung von n_i das Ergebnis allerdings eh nicht.

- h) Sie messen nun die Elektronendichte über der Temperatur und erhalten als Ergebnis den folgenden qualitativen Verlauf. Kennzeichnen Sie in dem in Abbildung 5 dargestellten Graph die Bereiche für Störstellenschöpfung und Störstellenreserve sowie den intrinsischen Bereich! Erläutern Sie darüber hinaus die Bedeutung dieser drei Bereiche! [3P]

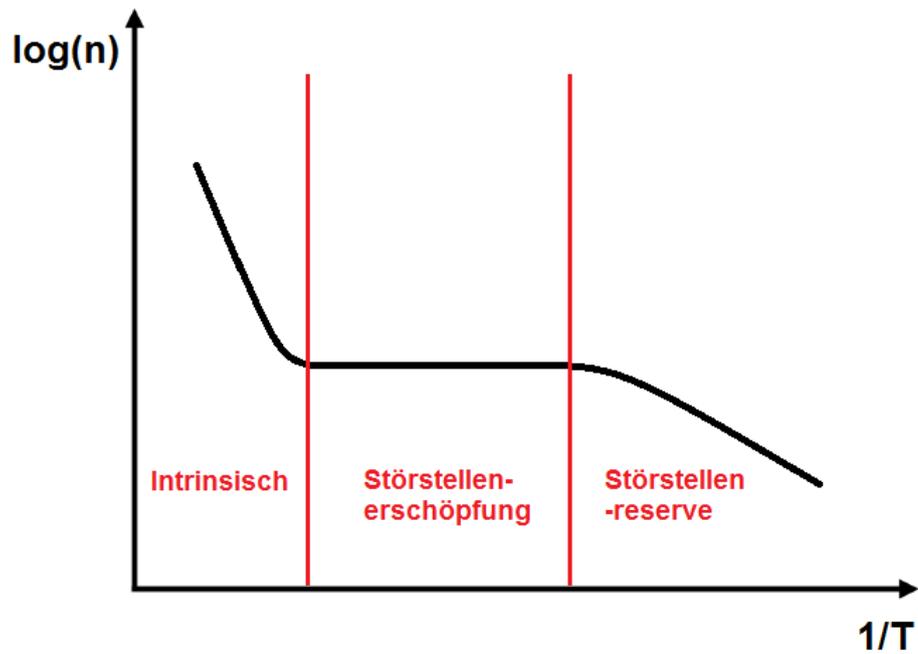


Abbildung 5: Verlauf der Elektronendichte über der Temperatur.

Störstellenerschöpfung: alle Dotierstellen sind ionisiert und thermisch aktivierte Ladungsträger können vernachlässigt werden

Störstellenreserve: mit zunehmender Temperatur werden Störstellen ionisiert

Intrinsisch: überwiegender Anteil der Ladungsträger thermisch aus Band-Band-Übergänge erzeugt

4. Potentialtopf mit endlich hohen Wänden [9P]

- a) Skizzieren Sie einen Potentialtopf der Höhe V_0 und Breite L für Elektronen (im Topf ist $V = 0$ und außerhalb $V = V_0$)! Zeichnen Sie die Wellenfunktionen (Realteil) von zwei Eigenfunktionen für Energien $W > V_0$ und die der niedrigenergetischsten drei Lösungen mit $W < V_0$ ein! [2P]

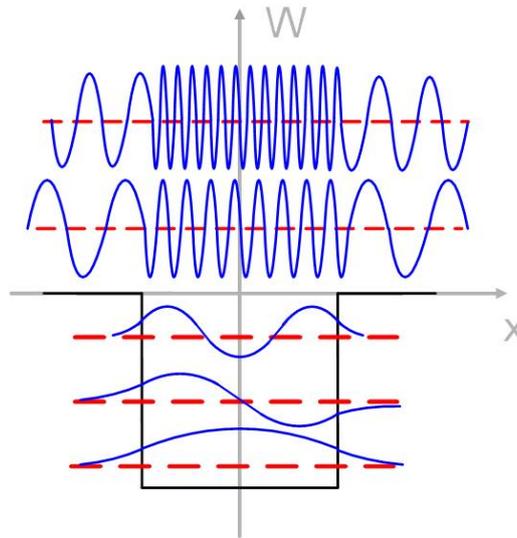


Abbildung L2

- b) Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W > V_0$ und $W < V_0$? [1P]

Die Lösungen mit $W > V_0$ haben die Form von ebenen Wellen und sind daher unendlich ausgedehnt. Außerdem gibt es hier zu jeder Energie eine Lösung. Die gebundenen Lösungen dagegen fallen im Außenbereich exponentiell ab, sind also im Quantentopf lokalisiert. Zudem ist ihr Energiespektrum diskret.

- c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf, sodass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist! Das explizite Ausrechnen der Lösung ist **nicht** verlangt. [3P]

Die stationäre Schroedingergleichung liefert die Energieeigenwerte dieses Problems. In unserem Fall zerfällt das Problem in drei Einzelprobleme mit jeweils konstantem Potential. Daher können wir für alle drei Bereiche zwei ebene Wellen überlagern und erhalten:

$$\text{Gebiet1 : } \psi_1(x) = A \exp(-\kappa_1 x) + B \exp(\kappa_1 x)$$

$$\text{Gebiet2 : } \psi_2(x) = C \exp(-jk_2 x) + D \exp(jk_2 x)$$

$$\text{Gebiet3 : } \psi_3(x) = E \exp(-\kappa_3 x) + F \exp(\kappa_3 x)$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die Wellenvektoren in der Barriere für $W < V_0$ imaginär sind und so die oszillierenden komplexen Exponentialfunktion in reelle Exponentialfunktionen verwandeln. Daran knüpft die Forderung an, dass in den Gebieten 1 und 3 die Lösungen exponentiell abfallen müssen, weil sonst die Wellenfunktionen weit weg vom Topf divergieren ($\kappa_{1,3} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - W)}$ und $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}W}$). Wir folgern $A = F = 0$. Die restlichen vier Variablen ergeben sich mit den Stetigkeitsbedingungen an den Übergängen 1-2 und 2-3. Wir nehmen an, der Potentialtopf reiche von $x = 0$ bis $x = L$.

$$\begin{aligned} \text{Nebenbedingung 1: } & \psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \\ \text{Nebenbedingung 2: } & \psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \\ \text{Nebenbedingung 3: } & \psi_2(x=L) = \psi_3(x=L) \\ \text{Nebenbedingung 4: } & \psi_2'(x=L) = \psi_3'(x=L) \end{aligned}$$

Damit haben wir vier unabhängige Nebenbedingungen, um vier Konstanten zu bestimmen, das Problem ist lösbar.

- d) Zeigen Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \rightarrow \infty$. [1P]

Mit unendlich hohen Wänden wird der endliche zum unendlichen Potentialtopf. Dann ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Barrieren Null, die Wellenfunktion hat an der Grenze einen Knoten. Natürlich gibt es im unendlichen Potentialtopf auch keine ungebundenen Lösungen.

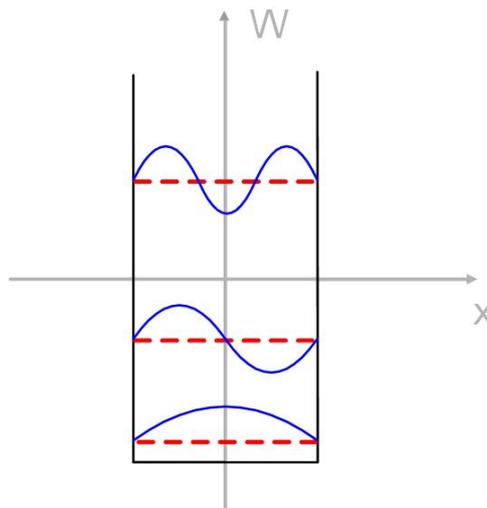


Abbildung L3

- e) Gehen Sie nun von Elektronen in einem parabolischen Potential aus:

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Skizzieren Sie das Potential und die ersten drei Eigenfunktionen! Nennen Sie jeweils einen wesentlichen Unterschied der Eigenfunktionen und der Energie-Eigenwerte in diesem Potential im Vergleich zu denjenigen in einem unendlichen Potentialtopf! [2P]

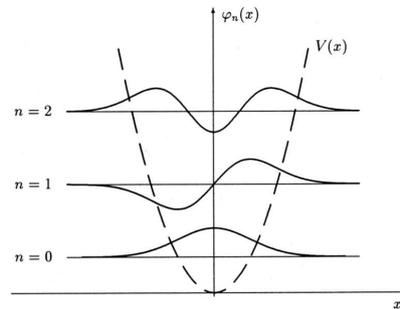


Abbildung L3

- *Eigenfunktionen:* Im unendlichen Potentialtopf sinken die Eigenfunktionen an den Rändern auf den Wert 0 (Es existieren Knoten an den Rändern). Im parabolischen Potential weisen die Eigenfunktionen an den Rändern keine Knoten auf, sondern dringen exponentiell in die Barriere ein.
- *Energie-Eigenwerte:* Im unendlichen Potentialtopf steigen die Abstände zwischen den Energiewerten bei steigender Energie an

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2,$$

während die Energie-Eigenwerte im parabolischen Potential äquidistant verteilt sind

$$W_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

5. pn-Übergang [11P]

- a) Was versteht man unter einer Raumladungszone? Erklären Sie zudem stichwortartig ihre Entstehung in einem pn-Übergang unter Berücksichtigung der wesentlichen Effekte! [2,5P]

Die Raumladungszone ist eine Grenzfläche am Übergang zwischen einem p- und einem n-dotierten Halbleiter, die aufgrund von Raumladungen nicht mehr neutral ist. Sie entsteht, wenn zwei unterschiedlich dotierte Halbleiter in Kontakt gebracht werden, da an der Grenzfläche beider Halbleiter ein großer Gradient der Löcherdichte auf der n-Seite und ein großer Gradient der Elektronendichte p-Seite vorliegt. Der dadurch hervorgerufene Diffusionsstrom sorgt für eine Ladungstrennung, da grenzflächennahe Elektronen auf die p-Seite wandern und damit positiv geladene Atomrümpfe zurücklassen. Entsprechend wandern grenzflächennahe Löcher auf die n-Seite und lassen negativ geladene Dotieratome. Es entsteht ein elektrisches Feld, das auf die Ladungsträger entgegengesetzt zur Diffusion wirkt. Die Raumladungszone ist voll ausgebildet, wenn beide Kräfte im Gleichgewicht sind.

Gegeben sei folgende x-abhängige Raumladungsdichte als Schottky-Näherung:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -l_p \\ -en_A & -l_p < x \leq 0 \\ +en_D & 0 < x \leq +l_n \\ 0 & x > l_n \end{cases}$$

Berücksichtigen Sie, dass $n_A > n_D$ gilt.

- b) Skizzieren Sie die gegebene Raumladungsdichte! Deuten Sie darüber hinaus in Ihrer Skizze den realen Verlauf der Raumladungsdichte an! [2P]

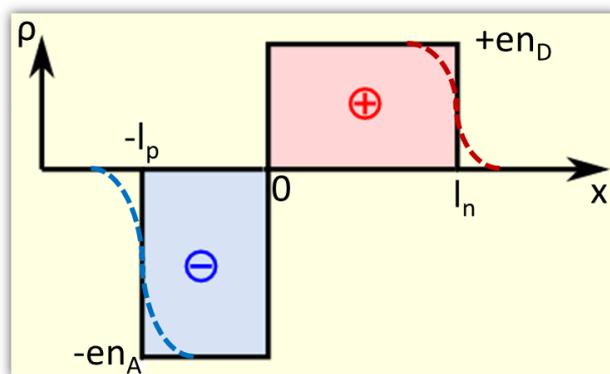


Abbildung 6: Raumladungsdichte

- c) Berechnen Sie jeweils für den p- und n-Bereich das elektrische Feld! [3P]

Es gilt:

$$E = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx$$

Zudem muss der Übergang zwischen den unterschiedlich dotierten Bereichen stetig sein und das Feld außerhalb der Raumladungszone verschwinden. Daraus folgt:

p-Bereich ($-l_p < x < 0$):

$$E(x) = -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (x + l_p)$$

n-Bereich ($0 < x < +l_n$):

$$E(x) = +\frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - l_n)$$

- d) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Leitungs- und Valenzbandes sowie der Fermienergie für oben angegebenen pn-Übergang ohne Vorspannung und markieren Sie die Diffusionsspannung! [2P]

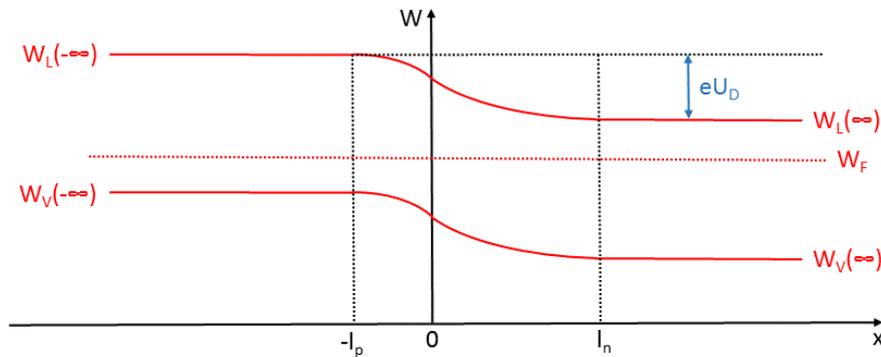


Abbildung 7: pn-Übergang ohne Vorspannung

- e) Beschreiben Sie wie sich das Fermienergie und die Bandkanten ändern, wenn eine Spannung über dem pn-Übergang angelegt wird! Unterscheiden Sie je nach Polarität der Spannung. [1,5P]

Die Fermienergie spaltet unter Vorspannung in zwei Quasi-Fermienergie auf. In Durchlassrichtung wird die Diffusionsspannung um die angelegte Spannung reduziert, in Sperrichtung entsprechend erhöht.

6. Generation und Rekombination [9P]

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Elektronen an! Was besagt die Kontinuitätsgleichung? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} + g_n - r_n$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_n) und Generation (g_n) in einem Volumenelement.

- b) Gehen Sie von einem Elektron im Leitungsband eines intrinsischen Halbleiters aus. Auf welche Weise kann das Elektron rekombinieren? Nennen Sie drei verschiedene Prozesse und erklären Sie diese kurz! [3P]

z.B.:

- *Optische Rekombination: Direkter Übergang ins Valenzband unter Aussendung eines Photons.*
- *Störstellenprozess: Das Elektron geht zunächst in ein energetisch tiefer liegendes Störstellen-Niveau über, bevor es ins Valenzband übergeht. Die dabei entstehende Energie geht meistens in Wärmeenergie (Phononen) des Gitters über.*
- *Auger-Rekombination: Abgabe der Energie an ein weiteres Elektron im Leitungsband. Dieses Elektron verliert diese Energie anschließend durch thermische Relaxation zur Leitungsbandkante.*
- *Oberflächen-Rekombination: Tritt an Oberflächen des Halbleiters auf. Rekombination an durch Oberflächeneffekte in die Bandlücke eingebrachten Zuständen.*

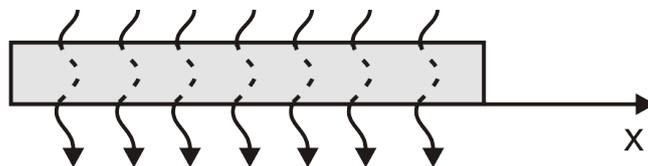


Abbildung 8: Beleuchteter n-dotierter Halbleiter.

- c) Ein stark n-dotierter Halbleiter wird bei Raumtemperatur wie in Abbildung 8 gezeigt konstant beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und $\Delta p \ll n_D$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter

Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p(t)$. [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$:

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_L - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_L \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

$t > 0$:

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt $g_L = 0$. Verbleibende Überschussladungsträger Δp rekombinieren mit Majoritätsladungsträgern und ändern sich zeitlich ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = A e^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_L \tau_p$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$ lösen. Damit Δp für $t \rightarrow \infty$ zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_L \tau_p = A e^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_L \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -b g_L \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_L \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_L \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p} d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_L \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln (\Delta p / g_L \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_L \tau_p e^{-t/\tau_p}\end{aligned}$$

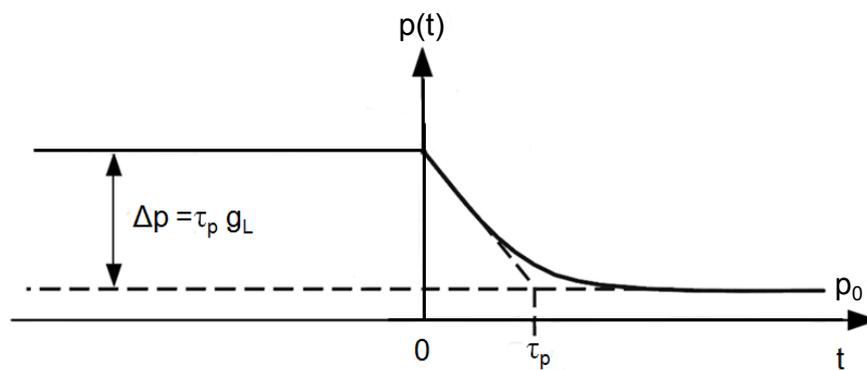


Abbildung 9: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p(t)$.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut