

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	8	8	8	12	8	8	52

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Grundlagen [8P]

- a) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik? [0,5P]
- b) Was ist die „effektive Masse“ eines Ladungsträgers? [1P]
- c) Wie ist die Fermi-Energie definiert? [1P]
- d) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]
- e) Was versteht man unter einer Raumladungszone in einem pn-Übergang? [1P]
- f) Wie ist die Temperaturspannung U_T definiert? [0,5P]
- g) Nennen Sie zwei verschiedene Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters! [1P]
- h) Kalium hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Geben Sie die Quantenzahlen n, l, m, s des energetisch höchsten Elektrons an! [2P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

2. Potentialbarriere [8P]

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \text{ (Bereich I)} \\ V_0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich II)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. Von $x = +\infty$ kommend laufe eine ebene Welle mit der Energie $W < V_0$ ein. Für die Welle kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\text{Bereich I: } \psi_{\text{I}}(x) = e^{-jk_{\text{I}}x} + re^{jk_{\text{I}}x}$$

$$\text{Bereich II: } \psi_{\text{II}}(x) = te^{-jk_{\text{II}}x}$$

Demnach hat der einlaufende Anteil der Welle die Amplitude 1. Entsprechend bezeichnet r die Reflexions- und t die Transmissionsamplitude.

- a) Skizzieren Sie das Potential und achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]
- b) Beschreiben Sie stichwortartig das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wenn man die Welle entweder als (i) klassisches Teilchen oder als (ii) quantenmechanisches Teilchen interpretiert! [1P]
- c) Geben Sie die Wellenzahlen in den Bereichen I und II in Abhängigkeit von V_0 und W an! [1P]
- d) Berechnen Sie mithilfe der Stetigkeitsbedingungen die Reflexions- und Transmissionsamplituden in Abhängigkeit der Wellenzahlen! [2P]
- e) In der Übung wurde gezeigt, dass der Term $\frac{\hbar}{j2m} (\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi)$ als eine Teilchenstromdichte $\vec{J}$ interpretiert werden kann. Berechnen Sie diese für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I in Abhängigkeit von W ! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

-
- f) Es sei $V_0 = 1,0 \text{ eV}$. Betrachten Sie ein Elektron mit der Energie $W = 0,9 \text{ eV}$! Für die Masse des Elektrons können Sie die freie Elektronenmasse annehmen. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{P_1}{P_{\text{Rest}}}$, wobei P_1 die Wahrscheinlichkeit ist, mit der das Elektron im ersten Angström der Barriere anzutreffen ist! P_{Rest} ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das Elektron im Rest der Barriere anzutreffen ist. Das Ergebnis ist als Zahlenwert anzugeben! (Hinweis: Integrieren Sie geeignet über das Betragsquadrat der Wellenfunktion!) [2,5P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

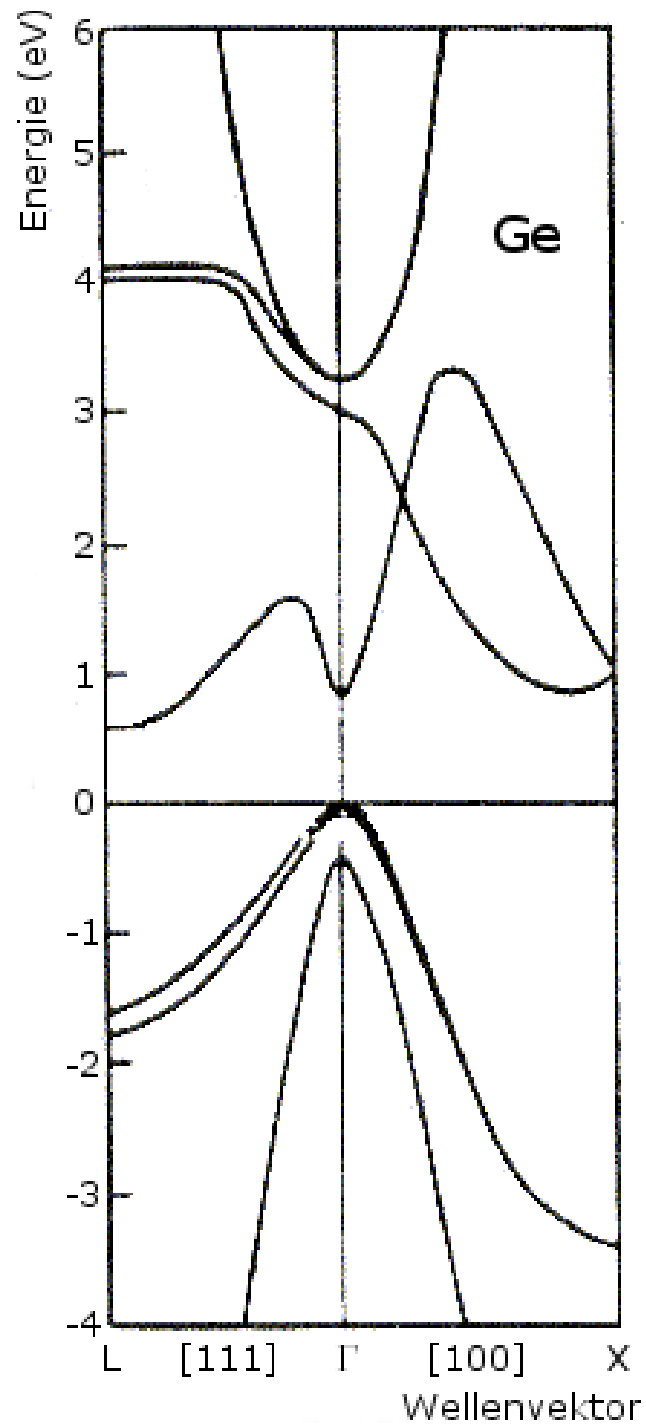
Matrikel-Nr.:

3. Kristalle [8P]

- a) Beschreiben Sie stichwortartig das Czochralski-Verfahren zur Herstellung von hochreinen Einkristallen! [1P]
- b) Beschreiben Sie stichwortartig, wie sich eine Kristallstruktur experimentell charakterisieren lässt! [1P]
- c) Sie charakterisieren eine Kristallprobe bei Raumtemperatur und schließen auf eine Diamantstruktur mit einer Gitterkonstante von 543 pm. Darüber hinaus haben Sie die Dichte des Kristalls zu $2,331 \text{ g/cm}^3$ bestimmt. Berechnen Sie die Atommasse und schließen Sie daraus auf das Kristallmaterial! [2P]
- d) Nennen Sie ein Verfahren zur Herstellung von Mischhalbleitern und jeweils ein Beispiel für einen ternären und einen quaternären Halbleiter! [1,5P]
- e) Skizzieren Sie ein zweidimensionales quadratisches Kristallgitter und erklären Sie anhand der Skizze stichwortartig, wieso eine Bandstruktur in Halbleitern richtungsabhängig ist! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

- f) Die folgende Abbildung zeigt die Bandstruktur von Germanium. Schätzen Sie aus der Skizze die Bandlücke in eV ab! Bei welcher Wellenlänge würde demnach eine Germanium-LED hauptsächlich emittieren und warum wäre diese im Vergleich zu einer Galliumarsenid-LED ziemlich ineffizient? [1,5P]



Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

4. Dirac-Potential [12P]

Die Vorgänge im Kristall, wie sie in der vorhergehenden Aufgabe erarbeitet wurden, sollen nun mathematisch gründlicher untersucht werden. Diese Aufgabe kann aber unabhängig von der vorhergehenden Aufgabe bearbeitet werden!

Anmerkung: Auch einzelne Teilaufgaben können teilweise unabhängig voneinander bearbeitet werden!

Dazu sei folgendes Potential bestehend aus Dirac-Potentialen der Höhe D mit dem Abstand $x = d$ gegeben:

$$U(x) = D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) \text{ mit } D > 0 \text{ und } d > 0$$

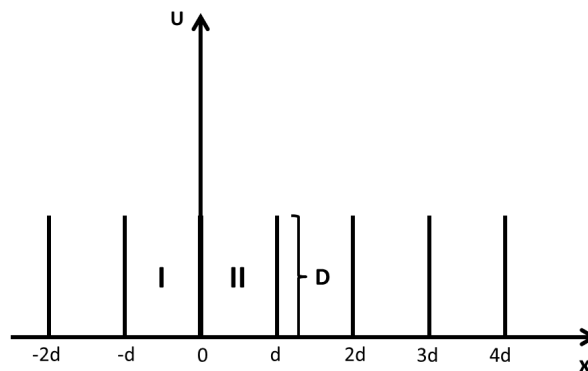


Abbildung 1: Dirac-Potential

- a) Stellen Sie zunächst die stationäre Schrödingergleichung mit dem genannten Potential $U(x)$ auf! [1P]

Betrachten Sie die beiden Abschnitte I ($-d < x < 0$) und II ($0 < x < d$)! In diesen Abschnitten ist $U(x) = 0$. Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ist folglich eine Linearkombination zweier ebener Wellen.

$$\text{Abschnitt I: } \Psi_I(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

$$\text{Abschnitt II: } \Psi_{II}(x) = Fe^{jkx} + Ge^{-jkx}$$

Außerdem besagt das Bloch-Theorem, dass

$$\Psi(x) = e^{jKd}\Psi(x - d)$$

Fortsetzung auf Rückseite!

- b) Welche Bedeutung hat K in der Definition des Bloch-Theorems? Fassen Sie das Bloch-Theorem kurz in Worten zusammen! [1P]

Aus dem Bloch-Theorem und dem gegebenen Ansatz für die Wellenfunktion des freien Elektrons ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} F &= A e^{jkd} e^{-jKd} \\ G &= B e^{jkd} e^{jKd} \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion $\Psi(x)$ an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit der Koeffizienten A , B , k , K und d ! [1,5P]
- d) Die erste Ableitung der Wellenfunktion erfährt einen endlichen Sprung beim δ -Potential an der Stelle $x = 0$. Zur quantitativen Bestimmung dieser Randbedingung gehen Sie folgendermaßen vor: Integrieren Sie die stationäre Schrödingergleichung aus Teilaufgabe a) von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$ ($\epsilon > 0$)! Dann führen Sie die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ durch! Damit erhalten Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt $x = 0$. [2,5 P]

Die Stetigkeitsbedingungen aus den Teilaufgaben c) und d) lassen sich in Form einer Matrix folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{j(K-k)d} & 1 - e^{j(K+k)d} \\ -1 + e^{j(K-k)d} - \frac{2mD}{j\hbar^2} & 1 - e^{j(K+k)d} - \frac{2mD}{j\hbar^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- e) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit für das Gleichungssystem (1) eine nichttriviale Lösung gefunden werden kann? [1P]

Die Bedingung für die Lösbarkeit des Gleichungssystems aus Teilaufgabe e) kann mithilfe trigonometrischer Zusammenhänge folgendermaßen umgeformt werden:

$$\cos(Kd) = \cos(kd) + \frac{dmD}{\hbar^2} \frac{\sin(kd)}{kd} \quad (2)$$

Fortsetzung auf nächster Seite!

Diese Bedingung ist in der folgenden Abbildung graphisch dargestellt.

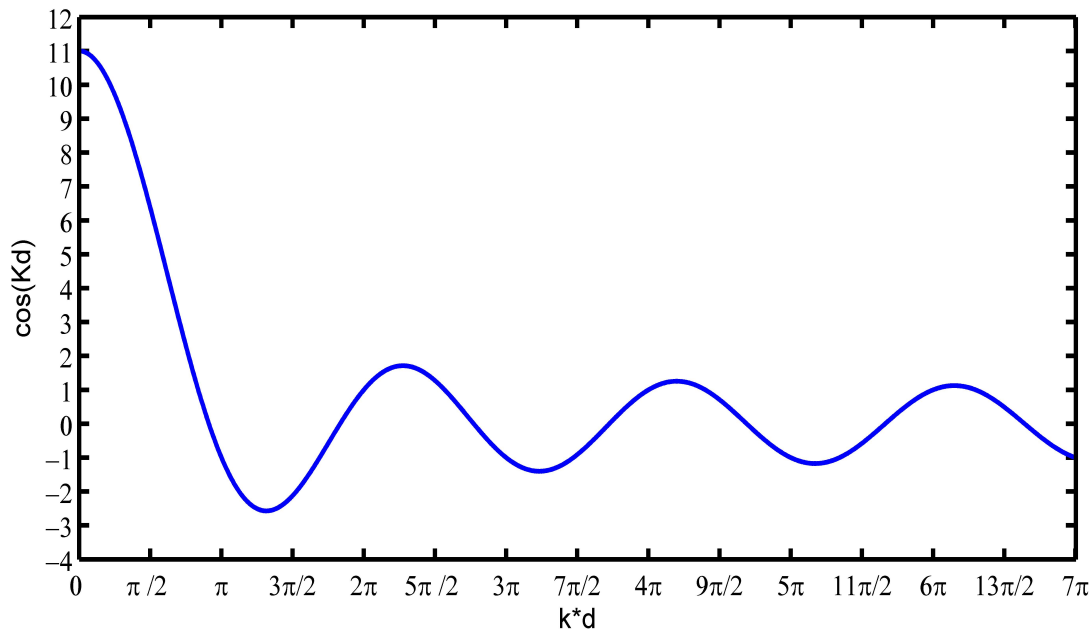


Abbildung 2: $\cos(Kd) = \cos(kd) + \frac{dmD}{\hbar^2} \frac{\sin(kd)}{kd}$ für $\frac{dmD}{\hbar^2} = 10$

- f) Kennzeichnen Sie im Graphen in Abbildung 2 die Bereiche für kd , in denen Gleichung (2) analytisch gelöst werden kann und somit eine Lösung für das Gleichungssystem (1) existiert! [2P]
- g) Wie werden die Bereiche, in denen eine Lösung existiert, und die Bereiche, in denen keine Lösung existiert, genannt? [1P]
- h) Bei welchen Werten für kd beginnt jeweils der Bereich, in dem keine Lösung existiert? Welchen Energiewerten entsprechen diese Werte? Gehen Sie für die Bestimmung der Energiewerte zunächst von der Dispersionsrelation des freien Elektrons aus! [2P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

5. Dotierung [8P]

Gegeben sei ein n-Typ Silizium-Halbleiter, dessen Donatorniveau W_D 0,05 eV unter der Leitungsbandkante W_L liegt. Gehen Sie zunächst von folgendem Regime aus: Alle Donatoren sind ionisiert. Thermisch generierte Ladungsträger können vernachlässigt werden. Die Anzahl der freien Ladungsträger n_0 entspricht der Anzahl an Dotieratomen N_D , d.h. es gilt $n_0 = N_D$.

- a) Wie nennt man dieses Regime eines dotierten Halbleiters? [0,5P]
- b) Berechnen Sie das Fermi-niveau W_F bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$) relativ zum Leitungsband W_L (d.h. $W_L - W_F$) und relativ zum Dotierniveau W_D (d.h. $W_D - W_F$) für den Fall $n_0 = N_D = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$! Die effektive Masse des Elektrons sei $m_{eff} = 0,5 m_e$. [3P]
- c) Überprüfen Sie nun die Annahme vom Beginn der Aufgabe, dass vollständige Ionisation der Donatoren vorliegt, indem Sie für die gegebenen Dotierungsmengen die Anzahl der tatsächlich ionisierten Donatoren N_D^+ berechnen! Vollständige Ionisation sei dann erreicht, wenn **mindestens 98 %** der Donatoren ionisiert sind. Füllen Sie dazu die unten stehende Tabelle 1 aus!
Welche Aussage lässt sich über den tatsächlichen Grad der Ionisation treffen? [3P]

$n_0 = N_D [\text{cm}^{-3}]$	$W_D - W_F [\text{eV}]$	$N_D^+ [\text{cm}^{-3}]$
$N_D = 10^{15}$	0,23	
$N_D = 10^{16}$	0,17	
$N_D = 10^{17}$	0,11	
$N_D = 10^{18}$	0,05	

Tabelle 1: Berechnung von N_D^+

- d) Wie ändert sich das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei unterschiedlich starken Dotierungen bei Raumtemperatur? [0,5P]

Fortsetzung auf Rückseite!

-
- e) Wo liegt das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei der Temperatur $T = 0\text{ K}$?
[0,5P]
- f) Wie verhält sich das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei steigender Temperatur ($T \gg 300\text{ K}$)? [0,5P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

6. Halbleiter im Nichtgleichgewicht [8P]**TEIL I: Drift und Diffusion**

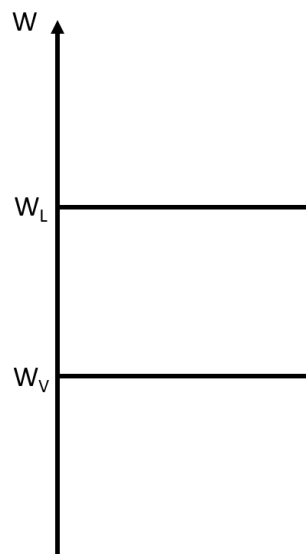
- a) Beschreiben Sie allgemein die Ursache für einen Drift- und Diffusionsstrom in Worten und Formeln! [2P]
- b) Betrachten Sie die stationäre Elektronenverteilung

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{x}{L_D}}$$

in einem stark p-dotierten Halbleiter bei Raumtemperatur. Leiten Sie für die Elektronen die Beziehung zwischen Diffusionskonstante D_n , Lebensdauer τ_n und Diffusionslänge L_D unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung her. Die Rekombinationsrate sei $r_n = \frac{n}{\tau_n}$. Generationsprozesse können im betrachteten Raumbereich vernachlässigt werden. Zudem sei kein elektrisches Feld angelegt. [3P]

TEIL II: Rekombination

- c) Skizzieren Sie den Ablauf einer Auger-Rekombination in das gegebene Energiediagramm und beschreiben Sie den Prozess mit Stichworten! [1P]



Fortsetzung auf Rückseite!

-
- d) Die Rekombinationsrate eines stark p-dotierten Halbleiters werde unter Beleuchtung durch Shockley-Read-Hall-Rekombination dominiert und gehorche dem Ausdruck

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

Die Löcheranzahl p und die Elektronenanzahl n seien aufgrund der Beleuchtung gegenüber der Gleichgewichtsanzahl n_{dot} bzw. p_{dot} um Δn bzw. Δp erhöht. Darüber hinaus gelte $n \ll p_{\text{dot}}$ und $p \approx p_{\text{dot}}$. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen den Ausdruck für die Shockley-Read-Hall-Rekombination so weit wie möglich! [2P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	
Imaginäre Einheit	j	$= \sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut