

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	8	8	8	12	8	8	52

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Allgemeine Grundlagen [8P]

- a) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik? [0,5P]

Der Gesamtzustand eines quantenmechanischen Systems lässt sich als lineare Überlagerung der Einzelzustände beschreiben oder anders formuliert: Die Summe von Wellenfunktionen, die die Schrödingergleichung eines Systems lösen, löst ebenfalls die Schrödingergleichung.

- b) Was ist die „effektive Masse“ eines Ladungsträgers? [1P]

Sie bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.

Formel: $m^ = \hbar^2 \left[\frac{d^2 E(k)}{dk^2} \right]^{-1}$*

- c) Wie ist die Fermi-Energie definiert? [1P]

Die Besetzungswahrscheinlichkeit bei der Fermi-Energie beträgt 0,5 (mathematisch: Die Fermi-Verteilungsfunktion nimmt bei der Fermi-Energie den Wert 0,5 an).

Formel: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$.

(Behelfsweise: Bei $T=0K$ sind alle Zustände bis zur Fermi-Energie besetzt)

- d) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

Das Pauli-Prinzip besagt, dass zwei Fermionen (z.B. Elektronen) nicht den gleichen Quantenzustand (inkl. Spin) besetzen dürfen.

- e) Was versteht man unter einer Raumladungszone in einem pn-Übergang? [1P]

Bringt man einen n- und einen p-dotierten Halbleiter in Kontakt, so diffundieren Elektronen aus dem grenznahen Bereich des n-dotierten Halbleiters in den p-dotierten Kristall. Löcher im p-dotierten Halbleiter verhalten sich entsprechend. Die nun unkompensierten Atomrümpfe (Störstellen) sind unbeweglich. Es entsteht eine positive bzw. eine negative Gesamtladung auf je einer Seite der Grenzfläche. Die der Grenzfläche benachbarten Bereiche, in denen der Halbleiter nicht mehr neutral

ist, heißen Raumladungszone.

- f) Wie ist die Temperaturspannung U_T definiert? [0,5 P]

Die Spannung U_T ist ein wichtiger Parameter in der Halbleiterphysik, $U_T = \frac{kT}{e}$. Bei Raumtemperatur beträgt sie etwa 25 mV.

- g) Nennen Sie zwei verschiedene Verfahren zur Dotierung eines Halbleiters! [1P]

Dotiertes Czochralski-Verfahren, Zonen-Zieh-Verfahren, Ionenbeschuss, Eindiffusion, ...

- h) Kalium hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Geben Sie die Quantenzahlen n, l, m, s des energetisch höchsten Elektrons an! [2P]

Die gefragten Quantenzahlen sind $\{n, l, m, s\} = \{4, 0, 0, \pm \frac{1}{2}\}$.

2. Potentialbarriere [8P]

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \text{ (Bereich I)} \\ V_0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich II)} \end{cases}$$

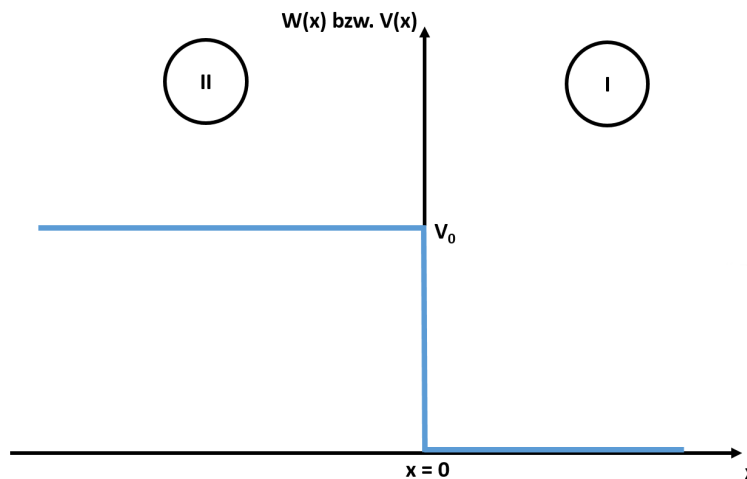
mit $V_0 > 0$. Von $x = +\infty$ kommend laufe eine ebene Welle mit der Energie $W < V_0$ ein. Für die Welle kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\text{Bereich I: } \psi_{\text{I}}(x) = e^{-jk_1x} + re^{jk_1x}$$

$$\text{Bereich II: } \psi_{\text{II}}(x) = te^{-jk_{\text{II}}x}$$

Demnach hat der einlaufende Anteil der Welle die Amplitude 1. Entsprechend bezeichnet r die Reflexions- und t die Transmissionsamplitude.

- a) Skizzieren Sie das Potential und achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]



- b) Beschreiben Sie stichwortartig das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wenn man die Welle entweder als (i) klassisches Teilchen oder als (ii) quantenmechanisches Teilchen interpretiert! [1P]

- (i) Das klassische Teilchen wird vollständig an der Barriere reflektiert.
 (ii) Das quantenmechanische Teilchen kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in die Barriere eindringen.

- c) Geben Sie die Wellenzahlen in den Bereichen I und II in Abhängigkeit von V_0 und W an! [1P]

$$\text{Bereich I: } k_I = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW}$$

$$\text{Bereich II: } k_{II} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(W - V_0)} = j \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - W)} =: j\kappa_{II}$$

- d) Berechnen Sie mithilfe der Stetigkeitsbedingungen die Reflexions- und Transmissionsamplituden in Abhängigkeit der Wellenzahlen! [2P]

Stetigkeit der Welle in $x = 0$ liefert die Randbedingungen:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0)$$

Somit ergibt sich:

$$1 + r = t$$

$$-jk_I + jk_I r = -jk_{II} t$$

Schließlich folgt:

$$r = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}$$

$$t = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}}$$

- e) In der Übung wurde gezeigt, dass der Term $\frac{\hbar}{j2m} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi)$ als eine Teilchenstromdichte $\vec{J}$ interpretiert werden kann. Berechnen Sie diese für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I in Abhängigkeit von W ! [1P]

Für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I gilt:

$$\psi(x) = e^{-jk_I x}$$

Somit ergibt sich:

$$J = \frac{\hbar}{j2m} \left(\psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \psi \right)$$

$$J = \frac{\hbar}{j2m} (e^{jk_I x} (-jk_I e^{-jk_I x}) - (jk_I e^{jk_I x}) e^{-jk_I x})$$

$$\frac{\hbar}{j2m} (-jk_I - jk_I) = -\frac{\hbar k_I}{m} = -\frac{\sqrt{2mW}}{m}$$

- f) Es sei $V_0 = 1,0 \text{ eV}$. Betrachten Sie ein Elektron mit der Energie $W = 0,9 \text{ eV}$! Für die Masse des Elektrons können Sie die freie Elektronenmasse annehmen. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{P_1}{P_{\text{Rest}}}$, wobei P_1 die Wahrscheinlichkeit ist, mit der das Elektron im ersten Angström der Barriere anzutreffen ist! P_{Rest} ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das Elektron im Rest der Barriere anzutreffen ist. Das Ergebnis ist als Zahlenwert anzugeben! (Hinweis: Integrieren Sie geeignet über das Betragsquadrat der Wellenfunktion!) [2,5P]

Laut Aufgabenstellung sind für den Bereich II Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, da wir uns in der Barriere befinden. Die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen des Elektrons im ersten Angström der Barriere ergibt sich mit $x_0 = -1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ zu:

$$P_1 = \int_{x_0}^0 |\psi_{\text{II}}(x)|^2 dx = \int_{x_0}^0 |t|^2 e^{-2jk_{\text{II}}x} dx = \int_{x_0}^0 |t|^2 e^{2\kappa_{\text{II}}x} dx = \frac{|t|^2}{2\kappa_{\text{II}}} (1 - e^{2\kappa_{\text{II}}x_0})$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen des Elektrons im Rest der Barriere ergibt sich analog zu:

$$P_{\text{Rest}} = \int_{-\infty}^{x_0} |\psi_{\text{II}}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{x_0} |t|^2 e^{-2jk_{\text{II}}x} dx = \int_{-\infty}^{x_0} |t|^2 e^{2\kappa_{\text{II}}x} dx = \frac{|t|^2}{2\kappa_{\text{II}}} (e^{2\kappa_{\text{II}}x_0})$$

Daraus ergibt sich mit $x_0 = -1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ das folgende Verhältnis:

$$\frac{P_1}{P_{\text{Rest}}} = \frac{1 - e^{2\kappa_{\text{II}}x_0}}{e^{2\kappa_{\text{II}}x_0}} = e^{-2\kappa_{\text{II}}x_0} - 1 = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V_0-W)}x_0} - 1 \approx 0,38$$

3. Kristalle [8P]

- a) Beschreiben Sie stichwortartig das Czochralski-Verfahren zur Herstellung von hochreinen Einkristallen! [1P]

Der Einkristall wird durch langsames Heben aus der hochreinen Schmelze gezogen, die mit Heizspulen verflüssigt wird. Den Startpunkt bildet ein kristalliner Keimling.

- b) Beschreiben Sie stichwortartig wie sich eine Kristallstruktur experimentell charakterisieren lässt! [1P]

Bestrahlt man einen Kristall mit Strahlung der Wellenlänge λ , so treten entsprechend der Bragg'schen Streubedingung

$$2d\sin(\alpha) = m\lambda$$

Reflexionen auf. Jede Kristallstruktur hat dabei ihr typisches Reflexionsmuster. Andere plausible Antworten (STM, AFM,...) auch möglich.

- c) Sie charakterisieren eine Kristallprobe bei Raumtemperatur und schließen auf eine Diamantstruktur mit einer Gitterkonstante von 543 pm. Darüber hinaus haben Sie die Dichte des Kristalls zu 2,331 g/cm³ bestimmt. Berechnen Sie die Atommasse und schließen Sie daraus auf das Kristallmaterial! [2P]

Aufgrund des Diamantgitters befinden sich $N = 8$ Atome in der Einheitszelle des Kristalls. Die Atommasse ergibt sich aus $\rho = \frac{m}{V} = \frac{NM}{a^3}$ zu:

$$M = \frac{\rho a^3}{N} \approx 4,665 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \approx 28,09 \text{ u}$$

Die Atommasse entspricht der von Silizium, was durch Vergleich mit dem Auszug des Periodensystems der Elemente auf der letzten Klausurseite festgestellt werden kann.

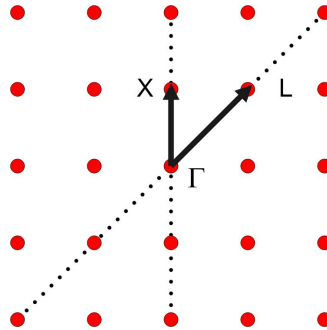
- d) Nennen Sie ein Verfahren zur Herstellung von Mischhalbleitern und jeweils ein Beispiel für einen ternären und einen quaternären Halbleiter! [1,5P]

Herstellung von Mischhalbleitern: Molekularstrahlepitaxie (MBE) oder Metallorganische Gasphasenepitaxie (MOVPE), ...

Ternärer Halbleiter: AlGaAs oder InGaP oder InGaAs ...

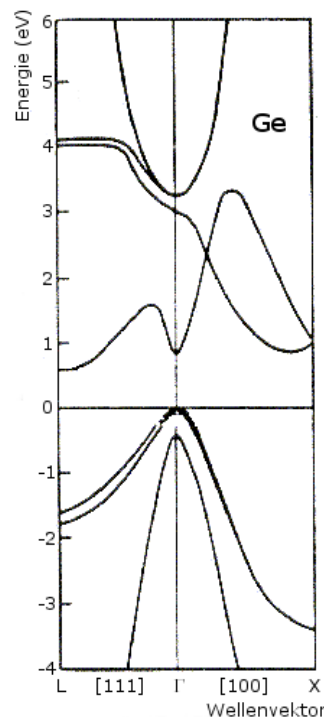
Quaternäre Halbleiter: GaInAsP, ...

- e) Skizzieren Sie ein zweidimensionales quadratisches Kristallgitter und erklären Sie anhand der Skizze stichwortartig, wieso eine Bandstruktur in Halbleitern richtungsabhängig ist! [1P]



In einem quadratischen Gitter liegen z. B. die Gitterplätze entlang der Richtung $\vec{\Gamma X}$ enger als in Richtung $\vec{\Gamma L}$. Somit sieht ein Elektron verschiedene Gitterabstände, je nachdem in welche Richtung es sich im Kristall bewegt. Das führt zu unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften und folglich zu einer richtungsabhängigen Bandstruktur.

- f) Die folgende Abbildung zeigt die Bandstruktur von Germanium. Schätzen Sie aus der Skizze die Bandlücke in eV ab! Bei welcher Wellenlänge würde demnach eine Germanium-LED hauptsächlich emittieren und warum wäre diese im Vergleich zu einer Galliumarsenid-LED ziemlich ineffizient? [1,5P]



Ablesen der Bandlücke ergibt einen Wert von etwa 0,66 eV. Ein optischer Übergang von der Leitungsband- zur Valenzbandkante hätte damit eine Wellenlänge von $\lambda = \frac{ch}{W_G} \approx 1,88 \mu\text{m}$. Da es sich bei Germanium um einen indirekten Halbleiter handelt, ist ein sehr unwahrscheinlicher Dreiteilchenprozess für die Aussendung von optischer Strahlung notwendig. Galliumarsenid hingegen ist ein direkter Halbleiter, wodurch leichter optische Strahlung emittiert werden kann.

4. Dirac-Potential [12P]

Die Vorgänge im Kristall, wie sie in der vorhergehenden Aufgabe erarbeitet wurden, sollen nun mathematisch gründlicher untersucht werden. Diese Aufgabe kann aber unabhängig von der vorhergehenden Aufgabe bearbeitet werden!

Anmerkung: Auch einzelne Teilaufgaben können teilweise unabhängig voneinander bearbeitet werden!

Dazu sei folgendes Potential bestehend aus Dirac-Potentialen der Höhe D mit dem Abstand $x = d$ gegeben:

$$U(x) = D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) \text{ mit } D > 0 \text{ und } d > 0$$

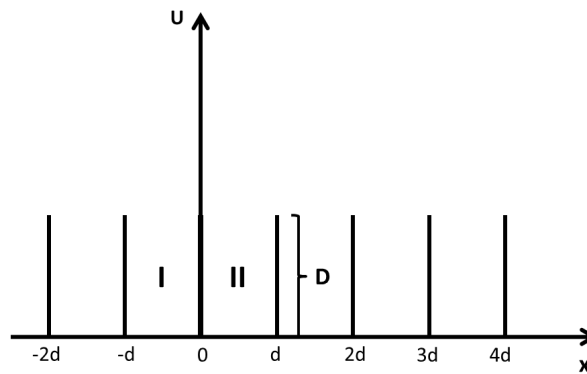


Abbildung 1: Dirac-Potential

- a) Stellen Sie zunächst die stationäre Schrödingergleichung mit dem genannten Potential $U(x)$ auf! [1P]

$$\text{stationäre SG: } -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd)\psi = W\psi$$

Betrachten Sie die beiden Abschnitte I ($-d < x < 0$) und II ($0 < x < d$)! In diesen Abschnitten ist $U(x) = 0$. Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ist folglich eine Linearkombination zweier ebener Wellen.

$$\text{Abschnitt I: } \Psi_I(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

$$\text{Abschnitt II: } \Psi_{II}(x) = Fe^{jkx} + Ge^{-jkx}$$

Außerdem besagt das Bloch-Theorem, dass

$$\Psi(x) = e^{jKd}\Psi(x - d)$$

- b) Welche Bedeutung hat K in der Definition des Bloch-Theorems? Fassen Sie das Bloch-Theorem kurz in Worten zusammen! [1P]

K ist der reziproke Gittervektor eines periodischen Potentials. Das Bloch-Theorem legt die Form der Wellenfunktion als Lösung der stationären SG in einem periodischen Potential fest. Die Periodizität des Potentials überträgt sich auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des betrachteten Teilchens.

Aus dem Bloch-Theorem und dem gegebenen Ansatz für die Wellenfunktion des freien Elektrons ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} F &= A e^{jkd} e^{-jKd} \\ G &= B e^{jkd} e^{jKd} \end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion $\Psi(x)$ an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit der Koeffizienten A , B , k , K und d ! [1,5P]

$$\begin{aligned} \Psi_I(0) &= \Psi_{II}(0) \\ A e^{j k x} + B e^{-j k x} &= A e^{j k d} e^{-j K d} e^{j k x} + B e^{j k d} e^{j K d} e^{-j k x} \quad \text{mit } x=0 \\ x=0 \text{ einsetzen: } A + B &= A e^{j(k-K)d} + B e^{j(k+K)d} \end{aligned}$$

- d) Die erste Ableitung der Wellenfunktion erfährt einen endlichen Sprung beim δ -Potential an der Stelle $x = 0$. Zur quantitativen Bestimmung dieser Randbedingung gehen Sie folgendermaßen vor: Integrieren Sie die stationäre Schrödingergleichung aus Teilaufgabe a) von $x = -\epsilon$ bis $x = +\epsilon$ ($\epsilon > 0$)! Dann führen Sie die Grenzwertbildung $\epsilon \rightarrow 0$ durch! Damit erhalten Sie eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung der Wellenfunktion am Punkt $x = 0$. [2,5 P]

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} D \delta(x) \psi(x) dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} W \psi(x) dx \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0)) + D \psi(0) &= 0 \\ \psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) &= \frac{2mD}{\hbar^2} \psi(0) \end{aligned}$$

auch richtig:

$$\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = \frac{2mD}{\hbar^2} \psi_I(0) = \frac{2mD}{\hbar^2} \psi_{II}(0)$$

Die Stetigkeitsbedingungen aus den Teilaufgaben c) und d) lassen sich in Form einer Matrix folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{j(K-k)d} & 1 - e^{j(K+k)d} \\ -1 + e^{j(K-k)d} - \frac{2mD}{jkh^2} & 1 - e^{j(K+k)d} - \frac{2mD}{jkh^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- e) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit für das Gleichungssystem (1) eine nichttriviale Lösung gefunden werden kann? [1P]

Zur Lösung des Gleichungssystems muss die Determinante null sein.

$$(1 - e^{j(K-k)d})(1 - e^{j(K+k)d} - \frac{2mD}{jkh^2}) - (1 - e^{j(K+k)d})(-1 + e^{j(K-k)d} - \frac{2mD}{jkh^2}) = 0$$

Die Bedingung für die Lösbarkeit des Gleichungssystems aus Teilaufgabe e) kann mithilfe trigonometrischer Zusammenhänge folgendermaßen umgeformt werden:

$$\cos(Kd) = \cos(kd) + \frac{dmD}{h^2} \frac{\sin(kd)}{kd} \quad (2)$$

Diese Bedingung ist in der folgenden Abbildung graphisch dargestellt.

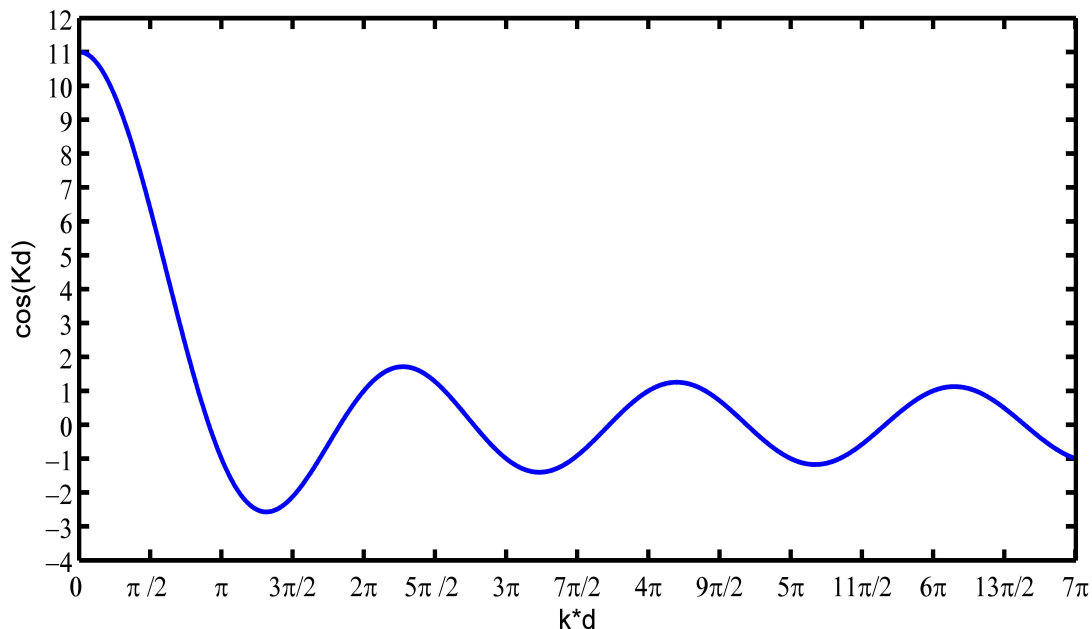
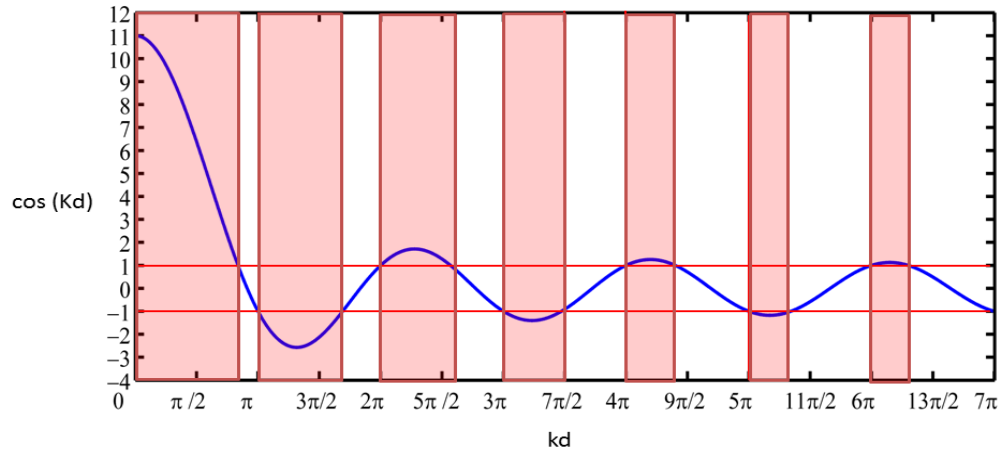


Abbildung 2: $\cos(Kd) = \cos(kd) + \frac{dmD}{h^2} \frac{\sin(kd)}{kd}$ für $\frac{dmD}{h^2} = 10$

- f) Kennzeichnen Sie im Graphen in Abbildung 2 die Bereiche für kd , in denen Gleichung (2) analytisch gelöst werden kann und somit eine Lösung für das Gleichungssystem (1) existiert! [2P]

Nur k , für die die linke Seite Werte zwischen -1 und 1 annimmt (wegen Wertebereich des Cosinus)



- g) Wie werden die Bereiche, in denen eine Lösung existiert, und die Bereiche, in denen keine Lösung existiert, genannt? [1P]

Bänder und Bandlücken

- h) Bei welchen Werten für kd beginnt jeweils der Bereich, in dem keine Lösung existiert? Welchen Energiewerten entsprechen diese Werte? Gehen Sie für die Bestimmung der Energiewerte zunächst von der Dispersionsrelation des freien Elektrons aus! [2P]

Entweder durch Ablesen aus der Zeichnung oder durch Beachtung der trigonometrischen Funktionen auf der rechten Seite von Gleichung (2) ($\sin(n\pi) = 0$ und $\cos(n\pi) = (-1)^n$) ergibt sich:

$$kd = n\pi$$

Auflösen nach k :

$$k = \frac{n\pi}{d}$$

Einsetzen in Dispersionsrelation des freien Elektrons:

$$W_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2md^2}$$

5. Dotierung [8P]

Gegeben sei ein n-Typ Silizium-Halbleiter, dessen Donatorniveau W_D 0,05 eV unter der Leitungsbandkante W_L liegt. Gehen Sie zunächst von folgendem Regime aus: Alle Donatoren sind ionisiert. Thermisch generierte Ladungsträger können vernachlässigt werden. Die Anzahl der freien Ladungsträger n_0 entspricht der Anzahl an Dotieratomen N_D , d.h. es gilt $n_0 = N_D$.

- a) Wie nennt man dieses Regime eines dotierten Halbleiters? [0,5P]

Störstellenerschöpfung

- b) Berechnen Sie das Fermi-niveau W_F bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$) relativ zum Leitungsband W_L (d.h. $W_L - W_F$) und relativ zum Dotierniveau W_D (d.h. $W_D - W_F$) für den Fall $n_0 = N_D = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$! Die effektive Masse des Elektrons sei $m_{eff} = 0,5 m_e$. [3P]

Lösung:

$n_0 = N_D [\text{cm}^{-3}]$	$W_L - W_F [\text{eV}]$	$W_D - W_F [\text{eV}]$
$N_D = 10^{14}$	0,29	0,24

Rechenweg:

$$n_0 = N_C e^{-\frac{W_L - W_F}{kT}}$$

$$N_C = 2 \left(\frac{m_{eff}}{2\pi\hbar^2} kT \right)^{\frac{3}{2}} = 2 \left(\frac{0,5 m_e}{2\pi\hbar^2} kT \right)^{\frac{3}{2}} = 8,87 \cdot 10^{24} \frac{1}{\text{m}^3} = 8,87 \cdot 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

$$W_L - W_F = kT \ln \left(\frac{N_C}{n_0} \right) = kT \ln \left(\frac{N_C}{N_D} \right) = 4,72 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,29 \text{ eV}$$

$$W_D - W_F = W_L - W_F - 0,05 \text{ eV} = 0,24 \text{ eV}$$

- c) Überprüfen Sie nun die Annahme vom Beginn der Aufgabe, dass vollständige Ionisation der Donatoren vorliegt, indem Sie für die gegebenen Dotierungsmengen die Anzahl der tatsächlich ionisierten Donatoren N_D^+ berechnen! Vollständige Ionisation sei dann erreicht, wenn **mindestens 98 %** der Donatoren ionisiert sind. Füllen Sie dazu die untenstehende Tabelle 1 aus! Welche Aussage lässt sich über den tatsächlichen Grad der Ionisation treffen? [3P]

$n_0 = N_D [\text{cm}^{-3}]$	$W_D - W_F [\text{eV}]$	$N_D^+ [\text{cm}^{-3}]$
$N_D = 10^{15}$	0,23	
$N_D = 10^{16}$	0,17	
$N_D = 10^{17}$	0,11	
$N_D = 10^{18}$	0,05	

Tabelle 1: Berechnung von N_D^+

Lösung:

$n_0 = N_D [cm^{-3}]$	$W_D - W_F [eV]$	$N_D^+ v [cm^{-3}]$
$N_D = 10^{15}$	0,23	$0,9997 \cdot 10^{15} = 0,9997 N_D$
$N_D = 10^{16}$	0,17	$0,9971 \cdot 10^{16} = 0,9971 N_D$
$N_D = 10^{17}$	0,11	$0,9717 \cdot 10^{17} = 0,9717 N_D$
$N_D = 10^{18}$	0,05	$0,7738 \cdot 10^{18} = 0,7738 N_D$

Rechenweg:

$$N_D^+ = N_D [1 - F(W_D)]$$
$$N_D^+ = N_D \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{W_D - W_F}{kT}\right)} \right]$$

Im Skript steht auch folgende Formel, die äquivalent gilt:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_F - W_D}{kT}\right)}$$

Ab $N_D = 10^{17} cm^{-3}$ keine vollständige Ionisation mehr.

- d) Wie ändert sich das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei unterschiedlich starken Dotierungen bei Raumtemperatur? [0,5P]

Mit zunehmender Dotierung wandert das Fermi-niveau in Richtung des Leitungsbandes

- e) Wo liegt das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei der Temperatur $T = 0 K$? [0,5P]

Bei $T=0 K$ liegt das Fermi-niveau in der Mitte zwischen W_D und W_L .

- f) Wie verhält sich das Fermi-niveau eines n-dotierten Halbleiters bei steigender Temperatur ($T \gg 300 K$)? [0,5P]

Das Fermi-niveau wandert zur Bandmitte bei hohen Temperatur.

6. Halbleiter im Nichtgleichgewicht [8P]

TEIL I: Drift und Diffusion

- a) Beschreiben Sie allgemein die Ursache für einen Drift- und Diffusionsstrom in Worten und Formeln! [2P]

Die Ursache für einen Driftstrom ist ein angelegtes elektrisches Feld:

$$j_{\text{Drift}} = e (n\mu_n + p\mu_p) E$$

Die Ursache für einen Diffusionsstrom ist ein Ladungsträgergradient

$$j_{\text{Diff}} = e (D_n \nabla n - D_p \nabla p)$$

- b) Betrachten Sie die stationäre Elektronenverteilung

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{x}{L_D}}$$

in einem stark p-dotierten Halbleiter bei Raumtemperatur. Leiten Sie für die Elektronen die Beziehung zwischen Diffusionskonstante D_n , Lebensdauer τ_n und Diffusionslänge L_D unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung her. Die Rekombinationsrate sei $r_n = \frac{n}{\tau_n}$. Generationsprozesse können im betrachteten Raumbereich vernachlässigt werden. Zudem sei kein elektrisches Feld angelegt. [3P]

Die Kontinuitätsgleichung für Elektronen lautet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - r_n + g_n$$

mit $g_n = 0$. Der Driftstrom kann vernachlässigt werden und somit gilt

$$j_n = j_{n,\text{Diff}} = e D_n \frac{\partial n}{\partial x} = e D_n \frac{\partial}{\partial x} \left(n_0 e^{-\frac{x}{L_D}} \right) = -e \frac{n_0 D_n}{L_D} e^{-\frac{x}{L_D}}$$

Da es sich laut Aufgabenstellung um ein stationäres Problem handelt, gilt:

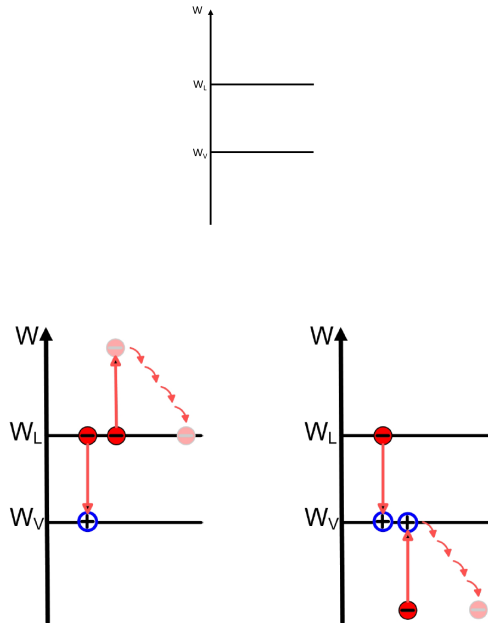
$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial j_n}{\partial x} - r_n = \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x} \left(-e \frac{n_0 D_n}{L_D} e^{-\frac{x}{L_D}} \right) - \frac{n}{\tau_n} = n_0 \frac{D_n}{L_D^2} e^{-\frac{x}{L_D}} - n_0 \frac{1}{\tau_n} e^{-\frac{x}{L_D}}$$

$$\frac{D_n}{L_D^2} = \frac{1}{\tau_n}$$

$$D_n = \frac{L_D^2}{\tau_n}$$

TEIL II: Rekombination

- c) Skizzieren Sie den Ablauf einer Auger-Rekombination in das gegebene Energiediagramm und beschreiben Sie den Prozess mit Stichworten! [1P]



Die bei der Rekombination frei werdende Energie wird auf einen weiteren freien Ladungsträger übertragen. Dieser gelangt in Folge dessen in einen Zustand tief im Band und relaxiert anschließend wieder ins Extremum des Bandes gemäß gegebener Abbildung für Elektronen bzw. Löcher.

- d) Die Rekombinationsrate eines stark p-dotierten Halbleiters werde unter Beleuchtung durch Shockley-Read-Hall-Rekombination dominiert und gehorche dem Ausdruck

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

Die Löcheranzahl p und die Elektronenanzahl n seien aufgrund der Beleuchtung gegenüber der Gleichgewichtsanzahl n_{dot} bzw. p_{dot} um Δn bzw. Δp erhöht. Darüber hinaus gelte $n \ll p_{\text{dot}}$ und $p \approx p_{\text{dot}}$. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen den Ausdruck für die Shockley-Read-Hall-Rekombination so weit wie möglich! [2P]

$$\begin{aligned} r &= \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p} = \frac{(n_{\text{dot}} + \Delta n)(p_{\text{dot}} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p (n_{\text{dot}} + \Delta n) + \tau_n (p_{\text{dot}} + \Delta p)} \\ &= \frac{n_{\text{dot}} p_{\text{dot}} + \Delta n p_{\text{dot}} + \Delta p n_{\text{dot}} + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p (n_{\text{dot}} + \Delta n) + \tau_n (p_{\text{dot}} + \Delta p)} = \frac{\Delta n p_{\text{dot}} + \Delta p n_{\text{dot}} + \Delta n \Delta p}{\tau_p (n_{\text{dot}} + \Delta n) + \tau_n (p_{\text{dot}} + \Delta p)} \\ &\approx \frac{\Delta n p_{\text{dot}}}{\tau_n p_{\text{dot}}} = \frac{\Delta n}{\tau_n} \end{aligned}$$

Interessanterweise bestimmen also die Minoritäten die Rekombinationsrate.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Formeln und Integrale (Bitte beachten Sie auch die Rückseite!)

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

Fortsetzung umseitig!

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut