

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	10	9	10	9	9	54

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 54, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 27.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Wellenfunktionen [7P]

- a) Ein Teilchen der Masse m sei durch die Wellenfunktion $\psi(x,t) = A \cdot e^{-\omega[(mx^2/\hbar)+it]}$ mit den positiven, reellen A und ω beschrieben. Setzen Sie diese Wellenfunktion in die Schrödingergleichung ein berechnen Sie das Potential $V(x)$, für welches die Schrödingergleichung gelöst werden kann! [2,5P]

Zeitabh. Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

mit $\psi' = -\frac{2\omega mx}{\hbar} \psi$, $\psi'' = -\frac{2\omega m}{\hbar} \left(1 - \frac{2\omega m}{\hbar} x^2\right) \psi$ und $\dot{\psi} = -i\omega \psi$ können wir einsetzen:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2\omega m}{\hbar} \left(1 - \frac{2\omega m}{\hbar} x^2\right) \right] \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) &= i\hbar(-i\omega)\psi(x,t) \\ \hbar\omega\psi(x,t) - 2\omega^2 m x^2 \psi + V(x)\psi(x,t) &= \hbar\omega\psi(x,t) \\ \Rightarrow V &= 2\omega^2 m x^2 \end{aligned}$$

Es handelt sich also um ein harmonisches Potential.

Die Wellenfunktion eines Systems zur Zeit $t = 0$ sei durch $\psi(x,t=0) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ gegeben. Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf diese Wellenfunktion. Hinweis: Beachten Sie die Formelsammlung am Ende der Klausur!

- b) Normieren Sie diese Wellenfunktion! [1P]

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} N^2 \int \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} N^2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot a \\ N &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot a}} \\ \Rightarrow \Psi(x,t=0) &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot a}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ für die normierte Wellenfunktion! [1,5P]

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} a^3}{2} = \frac{a^2}{2} \\ \langle x \rangle^2 &\stackrel{\text{Anhang}}{=} 0 \\ \Delta x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

d) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ für die normierte Wellenfunktion! [1,5P]

$$\begin{aligned}\langle p^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi a}} \int \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4}\right) dx \stackrel{\text{Anhang}}{=} \frac{\hbar^2}{a^2} - \frac{\hbar^2 \cdot a^2}{a^4 \cdot 2} = \frac{\hbar^2}{2a^2} \\ \langle p \rangle^2 &\stackrel{\text{Anhang}}{=} 0 \\ \Delta p &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}\end{aligned}$$

e) Wie lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation? Überprüfen Sie deren Richtigkeit für diese Wellenfunktion! [0,5P]

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}a} = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \text{ q.e.d.}$$

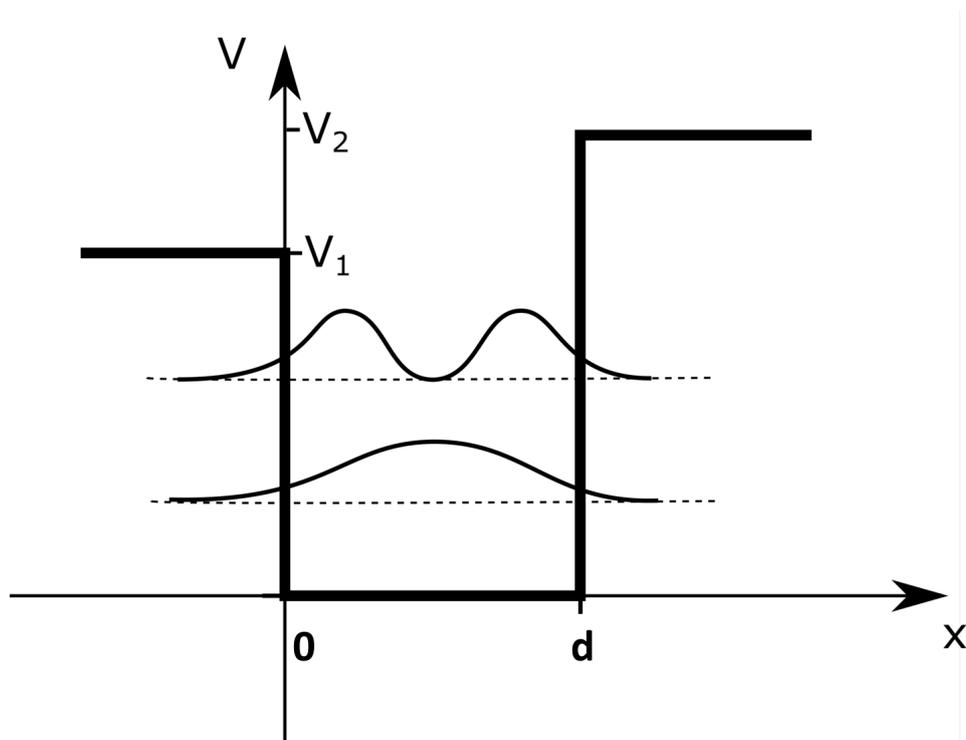
2. Asymmetrischer Endlicher Potentialtopf [10P]

Gegeben sei folgendes Potential $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich 1)} \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq d \text{ (Bereich 2)} \\ V_2 & \text{für } x > d \text{ (Bereich 3)} \end{cases}$$

mit $V_2 > V_1 > 0$ und $d > 0$.

- a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]



- b) Skizzieren Sie im selben Diagramm die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten für Elektronen der niedrigsten zwei gebundenen Zustände mit Eigenenergien $W < V_1$! Zeichnen Sie jeweils eine gestrichelte Linie ein, welche eine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte von 0 markiert! [1,5P]
- c) Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen von Elektronen in Eigenzuständen mit Energien $W < V_1$ und $W > V_2$ bezüglich ihrer Anzahl und ihrer Form? Welche Besonderheit ergibt sich im Vergleich zu einem unendlichen Potentialtopf für die gebundenen Zustände innerhalb der Barriere und wie bezeichnet man den

resultierenden Effekt? Nennen Sie ein Beispiel aus der Praxis, wo dieser Effekt zum Einsatz kommt! [2P]

$W > V_2$: unendlich ausgedehnte ebene Welle zu jeder Energie
 $W < V_1$: Linearkombination ebener Wellen im Topf und exp. Abfall in der Barriere; diskrete Zustände
Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist >0 in der Barriere; Tunneleffekt; Einsatz z.B. bei Flash-Speichern oder STM

Für die Wellenfunktionen $\psi_i(x)$ in den drei Bereichen ($i = 1,2,3$) ergeben sich folgende allgemeine Lösungsansätze:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Ae^{jk_1x} + Be^{-jk_1x}$

Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2x} + De^{-jk_2x}$

Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{jk_3x} + Fe^{-jk_3x}$

- d) Geben Sie die Randbedingungen für die Lösungen des Problems an! Keine Rechnung! [1P]

Randbedingungen:

(I): $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$

(II): $\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0)$

(III): $\psi_2(x=d) = \psi_3(x=d)$

(IV): $\psi_2'(x=d) = \psi_3'(x=d)$

- e) Bestimmen Sie die Wellenzahlen k_i ($i = 1, 2, 3$) in den Bereichen 1 bis 3! [1,5P]

Einsetzen der Wellenfunktionen in die stationäre Schr.Gl. und umformen ergibt jeweils:

$$W\psi_i = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}(-k_i^2) + V \right) \psi_i$$

$$k_i = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (W - V)}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(W - V_1)}{\hbar^2}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{2m(W - V_2)}{\hbar^2}}$$

- f) Wir betrachten nun lediglich Elektronen in Eigenzuständen mit Energien $W < V_1$. Setzen Sie die Wellenzahlen aus Aufgabe e) in die *allgemeinen Lösungsansätze* ein! Wie ändern sich dadurch diese Lösungsansätze? [1,5P]

Da $W < V_1 < V_2$ wird k in Bereich 1 und 3 komplex:

$$k_1 = j\sqrt{\frac{2m(V_1 - W)}{\hbar^2}} = j\kappa_1$$

$$k_3 = j\sqrt{\frac{2m(V_2 - W)}{\hbar^2}} = j\kappa_3$$

Die Exponenten der Wellenfunktionen in den Bereichen 1 und 3 werden daher reell:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Ae^{-\kappa_1 x} + Be^{\kappa_1 x}$

Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2 x} + De^{-jk_2 x}$

Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{-\kappa_3 x} + Fe^{\kappa_3 x}$

A und F müssen 0 sein damit die Funktionen in der Barriere abfallen:

Bereich 1: $\psi_1(x) = Be^{\kappa_1 x}$

Bereich 2: $\psi_2(x) = Ce^{jk_2 x} + De^{-jk_2 x}$

Bereich 3: $\psi_3(x) = Ee^{-\kappa_3 x}$

- g) Das Potential im Bereich 1 sei nun $V(x < 0) = 0$. Damit betrachten wir eine Potentialstufe der Höhe V_2 an der Stelle $x = d$. Die Eigenenergie eines von links auf die Potentialstufe eintreffendes Elektrons liege $0,5eV$ unterhalb von V_2 . Wie weit innerhalb der Barriere sinkt die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte dieses Elektrons auf 50% seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte am Rand der Stufe ($x = d$)? [2P]

$$\frac{|\psi_3(x)|^2}{|\psi_3(d)|^2} = 0,5$$

$$\frac{|Ee^{-\kappa x}|^2}{|Ee^{-\kappa d}|^2} = 0,5$$

$$e^{2\kappa(d-x)} = 0,5$$

$$2\kappa(d-x) = \ln(0,5) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

$$\kappa = \frac{\ln(2)}{2(x-d)}$$

für κ den Wurzelterm einsetzen und nach $x-d$ umformen:

$$\sqrt{\frac{2m(V_2 - W)}{\hbar^2}} = \frac{\ln(2)}{2(x-d)}$$

$$x-d = \frac{\ln(2) \cdot \hbar}{2\sqrt{2m(V_2 - W)}}$$

$$x-d = \frac{\ln(2) \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ eV}}}$$

$$x-d = \frac{\ln(2) \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{2\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}{\text{s}^2 \sqrt{\frac{\text{kg}^2 \text{m}^2}{\text{s}^2}}}$$

$$x-d = 9,53 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,953 \text{ \AA}$$

3. Kristalle [9P]

- a) Wie viele Atome befinden sich in der Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc) Kristallgitters mit zweiatomiger Basis? Zeichnen Sie die Gitterpunkte inklusive Basis eines solchen Kristallgitters in die vorgegebene Zeichnung ein! Die Basis besteht aus zwei Atomen an den Stellen $\{(0,0,0), (\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a)\}$. [1,5P]

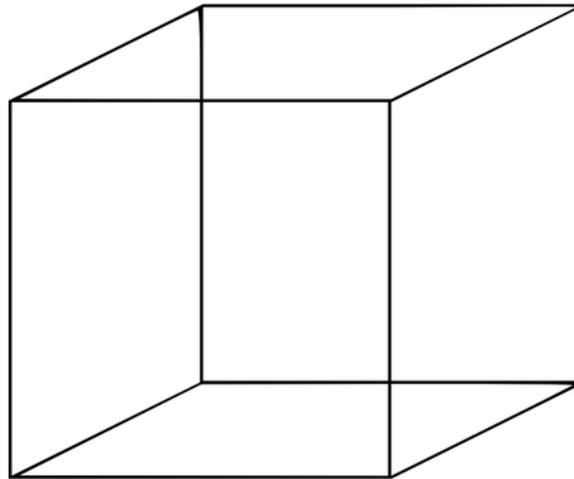


Abbildung 1: Vorlage für fcc-Gitter

$$\text{Anzahl Atome} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 8$$

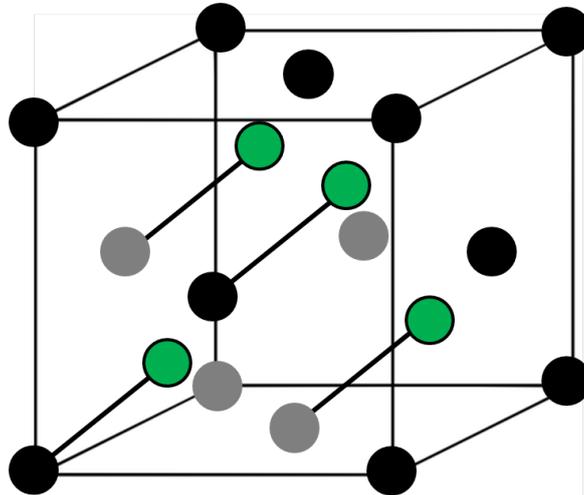


Abbildung 2: fcc-Gitter

- b) Wir betrachten einen Halbleiter entsprechend Aufgabe a), der in einem fcc-Gitter (mit Gitterkonstante a) mit zweiatomiger Basis kristallisiert. Er hat eine Dichte von $\rho = 2,336 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und eine molare Masse von $M = 28,09 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Berechnen Sie die Gitterkonstante a ! [1P]

Mit einer zweiatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot M \cdot \frac{1}{N_A}}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 28,09 \frac{g}{mol} \cdot \frac{1}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}}{2,336 \frac{g}{cm^3}}} \approx 5,43 \cdot 10^{-8} cm = 0,543 nm$$

Das Leitungsband des Halbleiters lässt sich im k -Raum im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = \Delta W(2,5 - \sin(0,5ka))$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2\Delta W(1 + 1,19 \sin(0,5ka))$ beschrieben. ΔW sei $1eV$.

- c) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in das Diagramm! [1P]

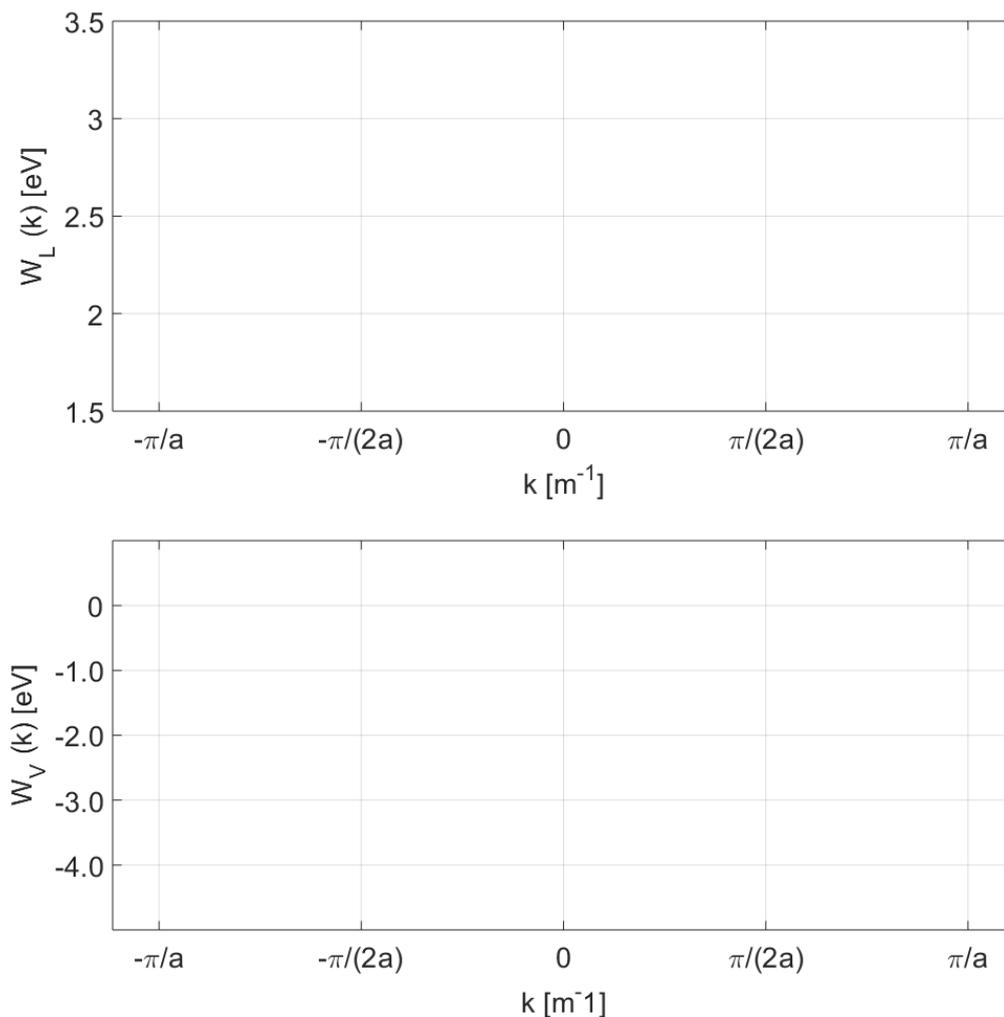


Abbildung 3: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

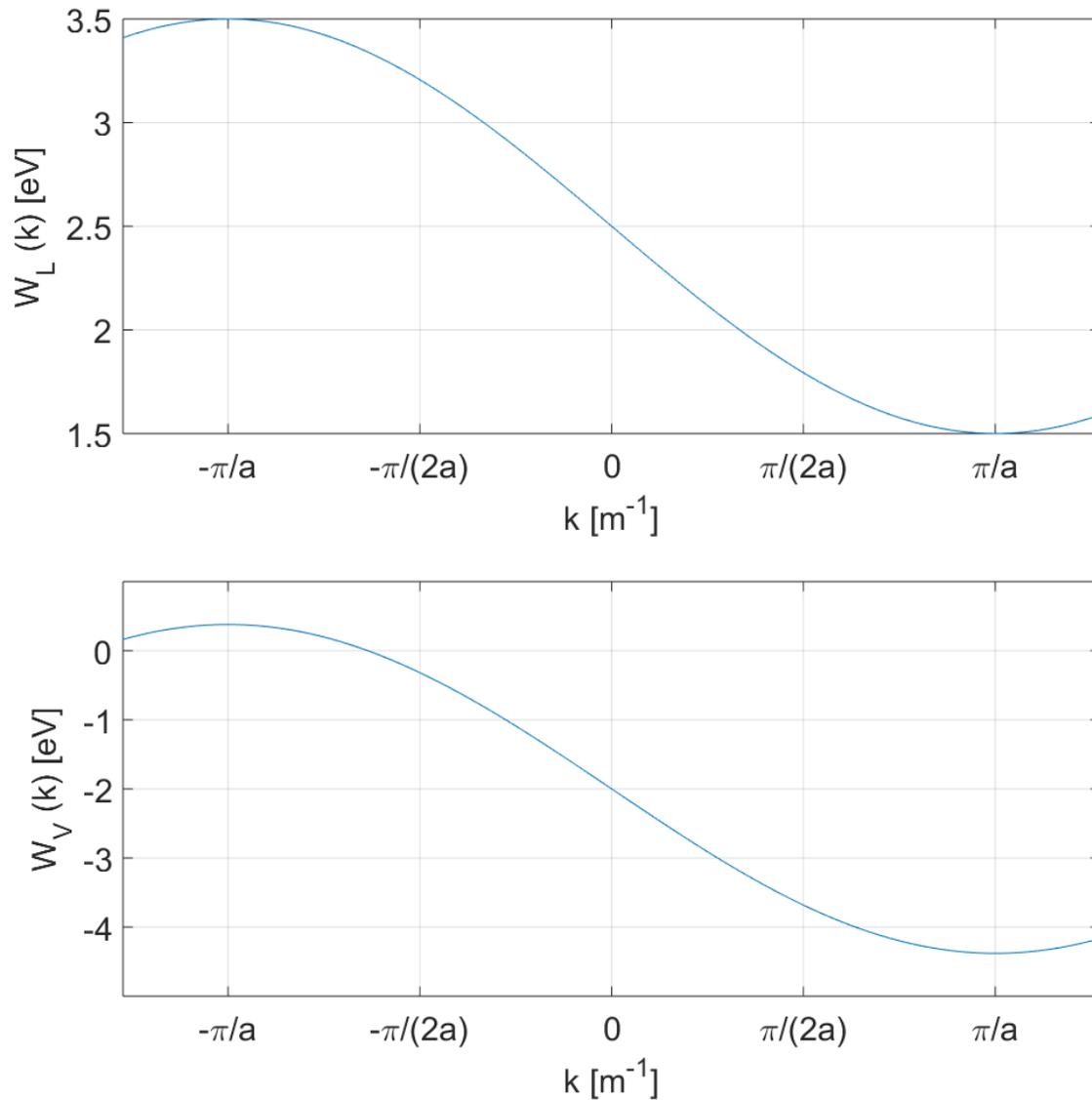


Abbildung 4: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

- d) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Begründen Sie! [1P]

Es handelt sich um einen indirekten Halbleiter. Minimum des Leitungsbandes und Maximum des Valenzbandes liegen nicht beim selben k -Wert.

- e) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1,5P]

Leitungsbandkante bei $k = \frac{\pi}{a}$:

$$W_{LBK} = W_L\left(\frac{\pi}{a}\right) = \Delta W(2,5 - \sin(0,5\frac{\pi}{a}a)) = \Delta W(2,5 - \sin(\frac{\pi}{2})) = \Delta W(2,5 - 1) = 1,5\Delta W (= 1,5eV)$$

Valenzbandkante bei $k = -\frac{\pi}{a}$:

$$\begin{aligned}W_{VBK} &= W_V\left(-\frac{\pi}{a}\right) = -2\Delta W\left(1 + 1,19 \sin\left(-\frac{\pi}{2a}a\right)\right) = -2\Delta W\left(1 + 1,19 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -2\Delta W(1 - 1,19) = 0,38\Delta W (= 0,38eV)\end{aligned}$$

Bandlücke:

$$W_{BL} = W_{LBK} - W_{VBK} = \Delta W(1,5 - 0,38) = 1,12eV$$

- f) Bestimmen Sie Gruppengeschwindigkeit v_g und effektive Masse m_{eff} eines Elektrons im Leitungsband in Abhängigkeit von a und ΔW ! Bestimmen Sie dazu zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_L(k)}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}$! [2P]

$$\begin{aligned}W_L(k) &= \Delta W(2,5 - \sin(0,5ka)) \\ \frac{\partial W}{\partial k} &= -0,5a\Delta W \cos(0,5ka) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= 0,25a^2\Delta W \sin(0,5ka)\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}v_g &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{0,5a\Delta W}{\hbar} \cos(0,5ka) \\ (m_{eff})^{-1} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = \frac{0,25a^2\Delta W}{\hbar^2} \sin(0,5ka)\end{aligned}$$

- g) Beschreiben Sie knapp und qualitativ, wie sich ein angelegtes elektrisches Feld (d.h. eine konstante Kraft) auf das Verhalten des in Teilaufgabe f) beschriebenen Elektrons auswirkt! Warum lässt sich diese Auswirkung durch eine einfache Strommessung nicht überprüfen? [1P]

Geschwindigkeit und Ort des Elektrons oszillieren zeitlich (Blochoszillationen). Die Streuzzeit des Elektrons im Kristall ist viel kürzer als die Periode der Blochoszillation. Daher wird ein gerichteter Strom aber nicht die Blochoszillation gemessen.

4. Zustandsdichte und Fermi-Dirac-Verteilung [10P]

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht! Wie lautet die Einheit der Zustandsdichte im 1D-Fall? [1P]

Die Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen (3D)/die Fläche (2D)/die Strecke (1D) des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit Zustände pro Energie und pro Volumen/Fläche/Strecke zu tun (in 1 D: $[\frac{1}{Jm}]$).

- b) Leiten Sie die Zustandsdichte $g_{1D}(W)$ für einen eindimensionalen Quantendraht der Länge L her! Die parabolische Näherung für das Leitungsband sei gültig. Gehen Sie von einem eindimensionalen k -Raum aus! [3P]

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

$$\text{Länge eines Zustandes auf der } k\text{-Achse: } L_{\text{Zustand}} = \frac{2\pi}{L}$$

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2mWL}}{\hbar\pi}$$

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{m}L}{\hbar\pi\sqrt{2W}}$$

$$g(W) = 2\frac{1}{L}D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar\pi} \frac{1}{\sqrt{W}}$$

- c) Die Leitungsbandkante W_L in einem zweidimensionalen Halbleiter liege bei 1 eV. Die Zustandsdichte im Leitungsband eines zweidimensionalen Halbleiters lautet

$$g(W)_{2D} = \frac{m}{\pi\hbar^2} \sum_n \theta(W - W_n) \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

mit

$$W_n = n^2 \cdot W_L$$

und

$$\theta(W - W_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } W - W_n \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } W - W_n < 0 \end{cases}$$

Wir betrachten nun den Energiebereich zwischen $5,49 \cdot W_L$ und $5,51 \cdot W_L$. Welche Fläche muss der Halbleiter haben, damit es im genannten Energiebereich mindestens $1,69 \cdot 10^{11}$ Zustände gibt? Es gelte $m = m_e$. [3P]

$$\text{Zustandsdichte} = \frac{\text{Anzahl der Zustände}}{\text{Energieintervall} \cdot \text{Fläche}}$$

$$\text{Fläche} = \frac{\text{Anzahl der Zustände}}{\text{Energieintervall} \cdot \text{Zustandsdichte}}$$

$$g(4W_L < W < 9W_L)_{2D} = \frac{2m}{\pi \hbar^2} = 5,21 \cdot 10^{37} \frac{1}{Jm^2} \text{ (wegen Heavisidefunktion!)}$$

Energieintervall:

$$0,02eV = 3,2 \cdot 10^{-21} J$$

$$\text{Fläche des Kristalls} \geq \frac{1,69 \cdot 10^{11}}{3,2 \cdot 10^{-21} J \cdot 5,21 \cdot 10^{37} \frac{1}{Jm^2}} \approx 10^{-6} m^2 = 1 mm^2$$

- d) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W,T)$ und was beschreibt diese? [1P]

$$f_{FD}(W,T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W-W_F}{k_B T}\right)}$$

Die Fermi-Dirac-Verteilung beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes einer bestimmten Energie W in Abhängigkeit von der Temperatur und der Fermienergie.

- e) Für welche Bedingung kann statt der Fermi-Dirac-Funktion die Boltzmann-Verteilung verwendet werden? [0,5P]

Die Boltzmann-Näherung ist gültig für $W - W_F \gg k_B T$.

- f) Wir gehen nun von einem intrinsischen dreidimensionalen Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur aus. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 5: [1,5P]

- Energie über der Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$

- Energie über Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
- Energie über Ladungsträgerdichte $n(W)$ und $p(W)$

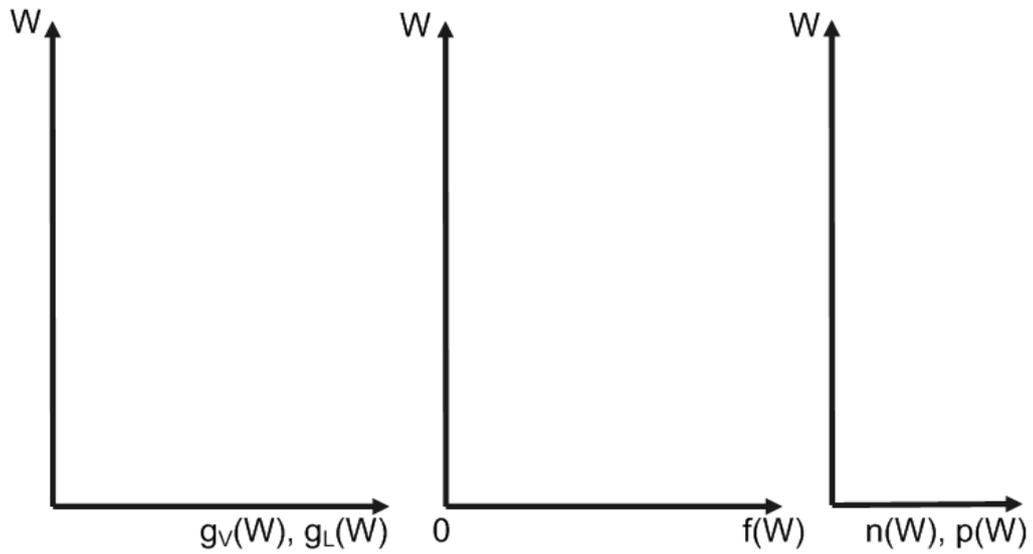


Abbildung 5: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

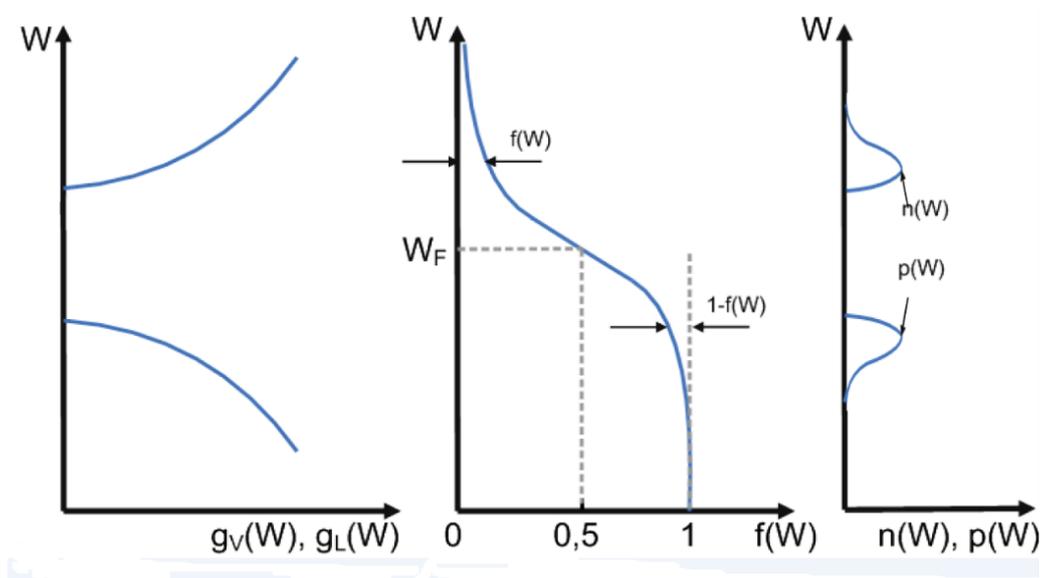


Abbildung 6: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

5. Intrinsische und dotierte Halbleiter [9P]

- a) Berechnen Sie die intrinsische Ladungsträgerkonzentration von Germanium bei einer Temperatur von $300K$. Die effektiven Zustandsdichten für das Leitungs- und Valenzband sind $N_L = 1,5 \cdot 10^{19} cm^{-3}$ und $N_V = 6 \cdot 10^{18} cm^{-3}$ (Hinweis: Germanium absorbiert Licht bis zu einer Wellenlänge von $\lambda = 1,88\mu m$). [1,5P]

Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration berechnet sich zu:

$$n_i = \sqrt{N_V N_L} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}}$$

Mit der Absorptionskante bei $\lambda = 1,88\mu m$ kann die Bandlücke berechnet werden:

$$n_i = \sqrt{N_V N_L} \cdot e^{-\frac{h \cdot c}{2k_B T \lambda}}$$

$$n_i = \sqrt{1,5 \cdot 10^{19} \cdot 6 \cdot 10^{18}} \cdot e^{-\frac{h \cdot c}{2k_B \cdot 300K \cdot 1,88 \cdot 10^{-6} m}}$$

$$n_i = 2,7 \cdot 10^{13} cm^{-3}$$

- b) Nennen Sie zwei Dotierelemente, die prinzipiell als Akzeptoren in den Germaniumkristall eingebracht werden können! Wie nennt man diese Form der Dotierung?[1P]

B, Al, Ga, In, Tl

p-Dotierung

- c) In Abbildung 7 sind Lochkonzentrationen p in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

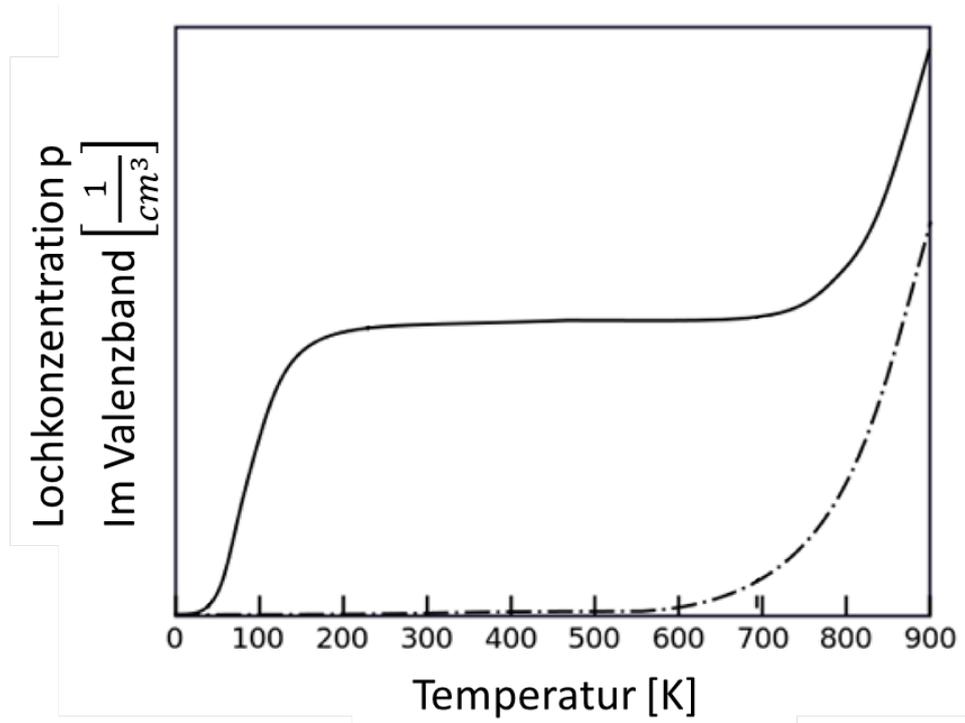


Abbildung 7: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

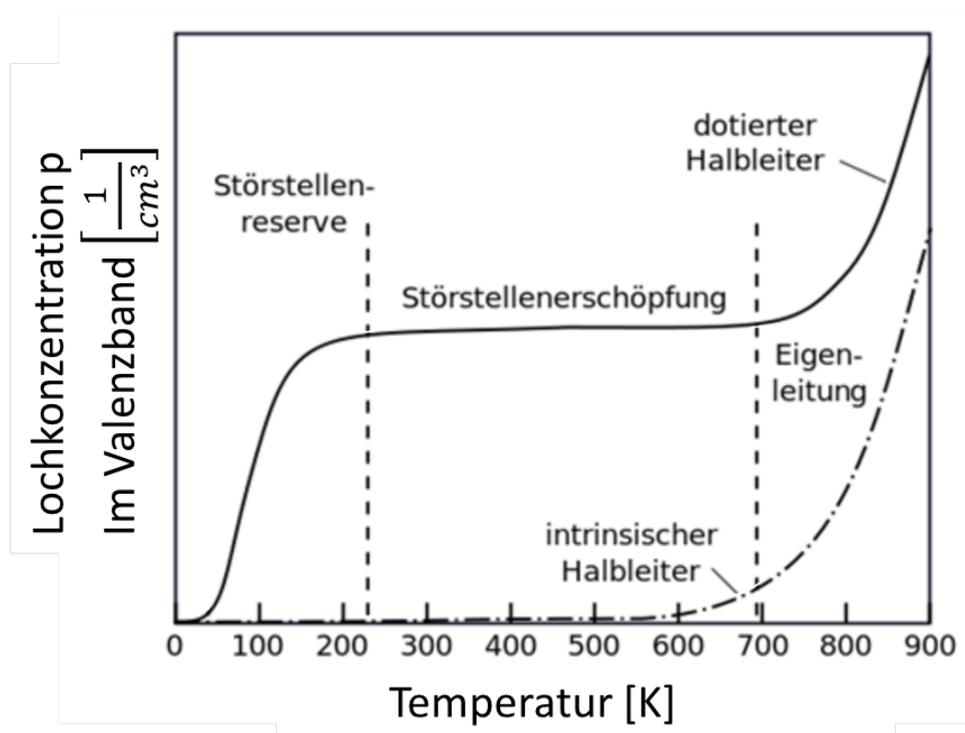


Abbildung 8

- d) Betrachten Sie nun einen mit Akzeptoren dotierten Germanium-Kristall mit einer Akzeptorkonzentration von $n_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ bei einer Temperatur von 300 K . Alle Akzeptoren seien ionisiert. Bestimmen Sie die Loch- und Elektronkonzentrationen

in einem solchen Kristall! [1,5P]

Aufgrund der p -Dotierung und Störstellenerschöpfung entspricht die Lochkonzentration der Akzeptorenkonzentration:

$$p = p_0 + n_A^- = p_0 + n_A \sim n_A$$

Mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes lässt sich dann die Elektronenkonzentration berechnen:

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{n_i^2}{n_A} = \frac{2,7^2 \cdot 10^{26}}{10^{15}} \text{cm}^{-3} = 7,29 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-3}$$

- e) Die Ionisierungsenergie des Akzeptors im Germanium liege 10meV oberhalb des Valenzbandes. Berechnen Sie die Lage des Fermi-niveaus W_F relativ zum Akzeptorniveau W_A ($W_F - W_A$) und zum Valenzband W_V ($W_F - W_V$) und geben Sie diese jeweils in eV an! [1,5P]

Wie in der letzten Aufgabe entspricht aufgrund der p -Dotierung und Störstellenerschöpfung die Lochkonzentration der Akzeptorenkonzentration:

$$p = p_0 + n_A^- = p_0 + n_A \sim n_A$$

Damit kann man die Formel für die Lochkonzentration n_A gleich setzen und nach $W_F - W_V$ umstellen:

$$p = N_V \cdot e^{-\frac{W_F - W_V}{k_B T}} = n_A$$

$$W_F - W_V = -k_B T \ln(n_A / N_V) = 0,225 \text{eV}$$

$W_F - W_A$ berechnet sich durch Beachtung der Ionisierungsenergie $W_A - W_V = 10 \text{meV}$ zu:

$$W_F - W_A = W_F - W_V + (W_V - W_A) = 0,225 \text{eV} - 0,01 \text{eV} = 0,215 \text{eV}$$

- f) Berechnen Sie die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters! Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_p = 10^3 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ und $\mu_e = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$. [1P]

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

Da p -dotiert kann der Beitrag der Elektronen vernachlässigt werden.

$$\sigma = ep\mu_p$$

$$\sigma = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{15} \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}} = 0,16 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}} = 16 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Falls der Beitrag der Elektronen nicht vernachlässigt wird, muss die Elektronenkonzentration über das Massenwirkungsgesetz berechnet werden:

$$n_i^2 = n \cdot p$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{2,7^2 \cdot 10^{26}}{10^{15}} \text{cm}^{-3} = 7,29 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-3}$$

Daraus berechnet sich dann die Leitfähigkeit zu:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 1,6 \cdot 10^{-19} (10^{15} \cdot 10^3 + 7,29 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^3) \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}}$$

$$\sigma = 0,16047 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}} = 16,047 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Anhand dieser Rechnung wird nochmal deutlich, dass man den Beitrag der Elektronen vernachlässigen kann.

6. Generation und Rekombination [9P]

- a) Geben Sie die 1D-Kontinuitätsgleichung für Löcher p an. Was besagt die Kontinuitätsgleichung? [1P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{\partial j_p}{\partial x} + g_p - r_p$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_p) und Generation (g_p) in einem Volumenelement.

- b) Wie verändert sich die Kontinuitätsgleichung aus der vorherigen Teilaufgabe unter der Annahme, dass kein äußeres elektrisches Feld vorhanden ist ($E = 0$)? Geben Sie nun die Kontinuitätsgleichung für p in Abhängigkeit von D_p , g_p und r_p an, mit der Ladungsträgerdichte p für Löcher, der Diffusionskonstante D_p , der Generationsrate g_p und Rekombinationsrate r_p ! [1P]

aus

$$j_p = ep\mu_p E - eD_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g_p - r_p$$

Ein stark n-dotierter Halbleiter (mit Donatorenkonzentration n_D) wird bei Raumtemperatur konstant beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektron-Lochpaare ($\hat{=}$ Überschussladungsträgerdichte $\Delta p \ll n_D$) räumlich homogen mit der Generationsrate g_p erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an, wobei τ_p die Lebensdauer der Elektron-Lochpaare ist. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt.

- c) Basierend auf den genannten Annahmen, leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp einen Ausdruck für Δp in Abhängigkeit von g_p und τ_p ab! [1P]

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, da konstant beleuchtet wird. Außerdem räumlich homogene Beleuchtung. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= g_p - \frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \Rightarrow \Delta p &= g_p \tau_p = \text{const.} \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Beleuchtung des Halbleiters schlagartig abgeschaltet.

- d) Leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp eine Differentialgleichung für $\Delta p(t)$ für $t > 0$ her! [1P]

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt $g_p = 0$. Verbleibende Überschussladungsträger Δp rekombinieren mit Majoritätsladungsträgern und ändern sich zeitlich ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). Es folgt:

$$\frac{\partial \Delta p(t)}{\partial t} = -\frac{\Delta p(t)}{\tau_p}$$

- e) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ für $t > 0$ durch Lösen der Differentialgleichung aus Teilaufgabe d) und unter Beachtung der Randbedingungen für $\Delta p(t = 0)$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty)$! [1,5P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial \Delta p(t)}{\partial t} = -\frac{\Delta p(t)}{\tau_p}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = A e^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_p \tau_p$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty) = 0$ lösen. Damit Δp für $t \rightarrow \infty$ zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta p(t = 0) &= g_p \tau_p = A e^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_p \tau_p \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ in die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\begin{aligned} -b g_p \tau_p e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_p} g_p \tau_p e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_p} \end{aligned}$$

Daraus folgt schliesslich:

$$\Delta p(t) = g_p \tau_p e^{-t/\tau_p}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_p} \\ \int_{g_p \tau_p}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p^*} d\Delta p^* &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_p} dt \\ \ln \Delta p - \ln g_p \tau_p &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \ln(\Delta p / g_p \tau_p) &= -\frac{t}{\tau_p} \\ \Delta p(t) &= g_p \tau_p e^{-t/\tau_p}\end{aligned}$$

An den Oberflächen eines Kristalls tritt Rekombination verstärkt auf. Wir betrachten nun den Einfluss von Oberflächenrekombination an der Grenzfläche bei $x = 0$ auf die Lochkonzentration. In die anderen Raumrichtungen sei der Halbleiter unendlich ausgedehnt. Die Rekombinationsrate im Halbleiter ist weiterhin $r_p = \Delta p(x)/\tau_p$. Es liegt kein äußeres elektrisches Feld an. Wir betrachten nur den Fall der dauerhaften Beleuchtung. Der Halbleiter erfährt damit eine gleichmäßige Generationrate g_p . Die Überschusslochkonzentration $\Delta p(x)$ ist allerdings aufgrund der Rekombination an der Oberfläche nicht mehr konstant.

- f) Stellen Sie zunächst die Kontinuitätsgleichung für $\Delta p(x)$ unter Berücksichtigung der neuen Annahmen auf! [0,5P]

Hinweis: Die Kontinuitätsgleichung hat jetzt die Form

$$\frac{\partial^2 \Delta p(x)}{\partial x^2} - a \Delta p(x) = -b$$

Es liegt wieder kein elektrisches Feld an ($E = 0$). Diesmal ist allerdings $\frac{\partial \Delta p(x)}{\partial x} \neq 0$ und damit lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \Delta p(x)}{\partial t} = g_p - \frac{\Delta p(x)}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 \Delta p(x)}{\partial x^2}$$

Wir betrachten einen stationären Zustand. Die Zeitableitung ist daher 0 und wir erhalten eine inhomogene DGL 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 \Delta p(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta p(x)}{\tau_p D_p} = \frac{-g_p}{D_p}$$

- g) Weit weg von der Oberfläche (für $x \rightarrow \infty$) hat die Oberfläche keinen Einfluss mehr und es stellt sich eine konstante Lochkonzentration ein: $\Delta p(x \rightarrow \infty) = g_p \tau_p$. Die Randbedingung an der Oberfläche lautet aufgrund der verstärkten Rekombination:

$$\Delta p(x=0) = \frac{D_p}{S} \frac{\partial \Delta p(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

mit der Rekombinationsgeschwindigkeit S .

Bestimmen Sie die Verteilung der Überschusslochkonzentration $\Delta p(x)$, indem Sie die Kontinuitätsgleichung aus der vorherigen Aufgabe lösen! Skizzieren Sie anschließend die Überschusslochkonzentration $\Delta p(x)$ über den Ort x ! [3P]

Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Stellen Sie einen Lösungsansatz für die Kontinuitätsgleichung gemäß der Formelsammlung am Ende der Klausur auf!
- Bestimmen bzw. eliminieren Sie die unbekannt Koeffizienten, in dem Sie zunächst die Randbedingung für $\Delta p(x \rightarrow \infty)$ und anschließend die Randbedingung für $\Delta p(x=0)$ verwenden!
- Setzen Sie die Koeffizienten in den Lösungsansatz ein und bestimmen Sie $\Delta p(x)$!
- Zeichnen Sie den Verlauf von $\Delta p(x)$!

Die Lösung dieser DGL setzt sich zusammen aus einer homogenen und partikulären Lösung:

$$\Delta p(x) = \Delta p(x)_h + \Delta p(x)_p$$

Die homogene DGL

$$\frac{\partial^2 \Delta p(x)_h}{\partial x^2} - \frac{\Delta p(x)_h}{\tau_p D_p} = 0$$

hat die Lösung

$$\Delta p(x)_h = C_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L_p}\right)$$

Mit $L_p = \sqrt{\tau_p D_p}$ Die partikuläre Lösung berechnet sich zu:

$$\Delta p(x)_p = \frac{g_p}{D_p} / \frac{1}{\tau_p D_p} = g_p \tau_p$$

Und damit ist die Lösung der inhomogenen DGL:

$$\Delta p(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L_p}\right) + g_p \tau_p$$

Nun verwenden wir die Randbedingungen um die Koeffizienten zu bestimmen. Zunächst für $\Delta p(\infty) = g_p \tau_p$:

$$\Delta p(\infty) = g_p \tau_p = C_2 \exp(\infty) + g_p \tau_p \rightarrow C_2 = 0$$

Für die Randbedingung $\Delta p(x=0)$ benötigen wir noch die Ableitung $\Delta p'(x)$

$$\frac{\partial \Delta p(x)}{\partial x} = \frac{-C_1}{L_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right)$$

Damit ergibt sich:

$$\Delta p(0) = C_1 \exp(0) + g_p \tau_p = \frac{-D_p \cdot C_1}{S \cdot L_p} \exp(0)$$

$$C_1 + \frac{D_p}{S \cdot L_p} C_1 = -g_p \tau_p$$

$$C_1 \left(1 + \frac{D_p}{S \cdot L_p}\right) = -g_p \tau_p$$

$$C_1 = \frac{-g_p \tau_p S L_p}{S L_p + D_p}$$

Nun setzen wir C_1 und C_2 in den Ansatz ein und erhalten:

$$\Delta p(x) = \frac{-g_p \tau_p S L_p}{S L_p + D_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + g_p \tau_p$$

$$\Delta p(x) = g_p \tau_p \left(1 - \frac{S L_p}{S L_p + D_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right)\right)$$

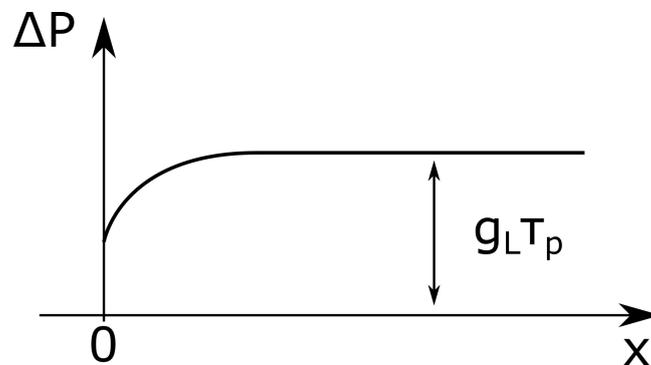


Abbildung 9: Skizzierter Verlauf der Überschusslochkonzentration $\Delta p(x)$.

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	
Imaginäre Einheit	j	$= \sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Lösung einer inhomogenen DGL 2. Ordnung

Die Lösung einer inhomogenen DGL 2. Ordnung der Form:

$$y''(x) - ay(x) = -b$$

setzt sich zusammen aus einer homogenen und einer partikulären Lösung:

$$y = y_h + y_p$$

Die homogene Lösung y_h löst die homogene DGL:

$$y_h''(x) - ay_h(x) = 0$$

und hat die Form:

$$y_h(x) = C_1 e^{-\sqrt{a}x} + C_2 e^{\sqrt{a}x}$$

Die partikuläre Lösung y_p berechnet sich zu:

$$y_p(x) = \frac{b}{a}$$

Formeln und Integrale

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut