Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
Klausur
20. März 2019

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	5	7	9,5	12	8	7,5	49

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 49, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 24,5.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Optik [5P]**

Es soll eine bikonvexe Linse konstruiert werden, die unter Wasser (n_{Wasser} = 1,33) eine Brennweite von f_B = 50 mm aufweist. Als Material steht ihnen Kronglas mit einem Berechungsindex von n_K = 1,53 zur Verfügung. Beachten Sie die Vorzeichenkonvention. Beschriften Sie Ihre Skizzen vollständig.

a) Skizzieren Sie die Linse auf die gegebene Optische Achse und geben Sie die Vorzeichen der Radien der Linse an. Berechnen Sie die Radien der Linse, wenn diese betragsmäßig gleich sind. [2 P]

b) Berechnen Sie die Lage des Bildes für einen Gegenstand der sich 25 mm links der Linse befindet und skizzieren Sie die Abbildung. [2 P]

c) Die Linse aus Aufgabenteil a) wird jetzt aus dem Wasser geholt und befindet sich in Luft. Sie wird im Abstand von 25 mm vor einem Gegenstand plaziert. Kann das Bild auf einem Sensor scharf einfangen werden? Begründen Sie ihre Antwort rechnerisch. [1 P]

2. **Grundlagen der Festkörperelektronik [7P]**

a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. [1P]

b) Kann die Wellenfunktion eines Teilchens gemessen werden? Wie hängt die Wellenfunktion mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zusammen? [1P]

c) Was versteht man unter dem „Superpositionsprinzip" der Quantenmechanik? [1P]

d) Betrachten Sie ein freies quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

und konstanter Amplitude A.
Welche räumliche Abhängigkeit ergibt sich für die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2$? Erklären Sie die physikalische Bedeutung Ihres Ergebnisses! [1P]

e) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

f) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 5 \cdot 10^{-11}$ m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [1P]

g) Was bezeichnet man als „effektive Masse" eines Ladungsträgers in einem Kristall? [1P]

3. Unendlicher Potentialtopf und parabolisches Potential [9,5P]

Gegeben sei das Potential $V_{\mathrm{A}}(x)$ eines unendlich hohen Potentialtopfes:

$$V_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < -\frac{d}{2} \text{ (Bereich I)} \\ 0 & \text{für } -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \text{ (Bereich II)} \\ \infty & \text{für } x > \frac{d}{2} \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

mit $d > 0$.

a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V_{\mathrm{A}}(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! Betrachten Sie nun die möglichen Zustände von Elektronen in $V_{\mathrm{A}}(x)$. Skizzieren Sie hierfür im selben Diagramm zusätzlich die Eigenfunktionen (Realteil), welche die Elektronenzustände mit den drei niedrigsten Eigenenergien $W > 0$ beschreiben! [1,5P]

Betrachten Sie im Folgenden für die Aufgabenteile b)-g) Elektronen in einem parabolischen Potential $V_{\mathrm{B}}(x)$:

$$V_{\mathrm{B}}(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\,,$$

mit $m > 0$ und $\omega > 0$.

b) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V_{\mathrm{B}}(x)$ in ein neues Diagramm! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! Zeichnen Sie im selben Diagramm wiederum die Eigenfunktionen (Realteil), welche die Elektronenzustände mit den drei niedrigsten Eigenenergien $W > 0$ beschreiben! Nennen Sie zusätzlich eine Gemeinsamkeit und einen Unterschied zwischen den Eigenfunktionen im unendlich hohen Potentialtopf (Aufgabenteil a)) und im parabolischen Potential (Aufgabenteil b))! [2,5P]

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

c) Der normierte elektronische Grundzustand im parabolischen Potential $V_{\mathrm{B}}(x)$ kann durch die Wellenfunktion $\psi_0 = \frac{c_o}{\sqrt{b}} \exp(-\frac{x^2}{2b^2})$ mit $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ beschrieben werden. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor c_0! (Nutzen Sie gegebenenfalls die Formeln im Anhang) [1P]

d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ für Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand! [1,5P]

e) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ für Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand! [1,5P]

f) Zeigen Sie, dass Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllen ! [0,5P]

g) Berechnen Sie abschließend den Mittelwert der Eigenenergie $\langle W_0 \rangle$ den Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand besitzen! [1P]

4. **Zustandsdichten von Halbleitern [12P]**

   a) Skizzieren Sie in Abbildung 3 die Zustandsdichten $g(W)$ für einen Quantenpunkt (0-dimensional), einen Quantendraht (1-dimensional), einen Quantentopf (2-dimensional), und einen Volumen-Halbleiter (3-dimensional) in das jeweilige Diagramm. [2P]

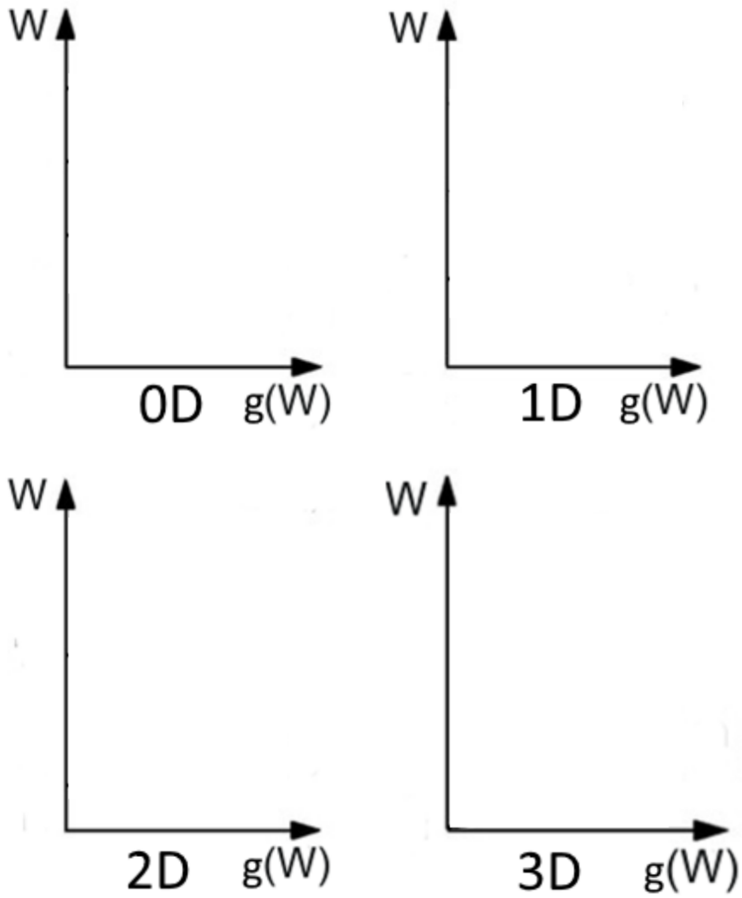

Abbildung 1: Zustandsdichten $g(W)$ vier verschiedener Halbleiterstrukturen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

b) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilung $f_{\mathrm{FD}}(W,T)$ und was beschreibt diese? Welchen Wert nimmt die Fermi-Dirac-Verteilung bei $W = W_F$ an? Unter welchen Voraussetzungen kann man die Boltzmann-Näherung verwenden?[2P]

Wir gehen nun von einem intrinsischen **dreidimensionalen** Halbleiter bei $300\,K$ aus. Die effektive Zustandsdichte für Elektronen im Leitungsband sei durch $N_L = 8{,}87 \cdot 10^{24}\,m^{-3}$ und die für Löcher im Valenzband durch $N_V = 2.51 \cdot 10^{25}\,m^{-3}$ gegeben.

c) Berechnen Sie die effektiven Massen m_e und m_h. [1P]

d) Berechnen Sie für den gleichen Halbleiter die Besetzungsdichte n eines Energieniveaus W_0, welches 0.5 eV oberhalb des Fermi-Niveaus W_F liegt. Die Leitungsbandkante W_L liegt 0.11 eV oberhalb des Fermi-Niveaus. [2P]

e) Die Besetzungsdichte kann in einem kleinen Intervall $[W_0 - \varepsilon, W_0 + \varepsilon]$ um W_0 als konstant angenommen werden. Berechnen Sie wie viele freie Elektronen N pro Kubikmeter eine Energie haben, die in dieses Intervall fallen. Es gilt $\varepsilon = 0{,}05\,eV$. [1P]

Im Folgenden betrachten wir einen unbekannten Halbleiter dessen Zustandsdichte $g(W)$ und dessen Fermi-Niveaus W_F in Abbildung 5 dargestellt sind.

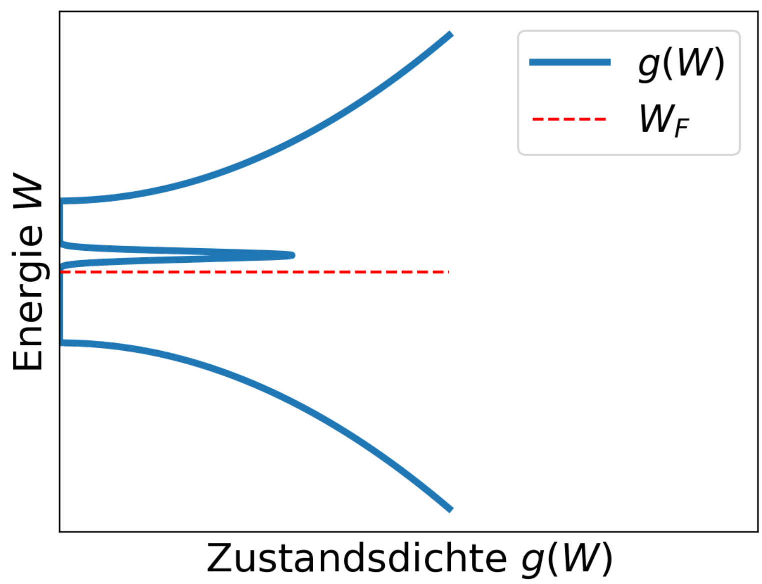

Abbildung 2: Zustandsdichten $g(W)$ eines unbekannten Halbleiters mit eingezeichnetem Fermi-Niveau W_F.

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

f) Was unterscheidet die abgebildete Zustandsdichte von der Zustandsdichte eines intrinsischen Halbleiters? Benennen Sie die Technik, mit der man einen Halbleiter mit einer solchen Zustandsdichte erzeugen kann.[1P]

g) Von welchem Typ sind die Majoritätsladungsträger im Material? Gehen wir davon aus, das Ausgangsmaterial des Halbleiters sei Silizium. Nennen Sie zwei Elemente, die verwendet werden können um dem Silizium-Halbleiter eine solche Zustandsdichte zu geben. [1P]

h) Der Halbleiter hat bei Raumtemperatur ($T = 300\,K$) eine Löcherkonzentration von $p = 2 \cdot 10^{12}\,m^{-3}$ und eine Elektronenkonzentration von $n = 3 \cdot 10^{19}\,m^{-3}$. Die effektiven Zustandsdichten des Valenz- und Leitungsbandes sind $N_V = N_L = 2 \cdot 10^{24}\,m^{-3}$. Berechnen sie die Bandlücke! [2P]

5. **Bandstruktur [8P]**

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters.

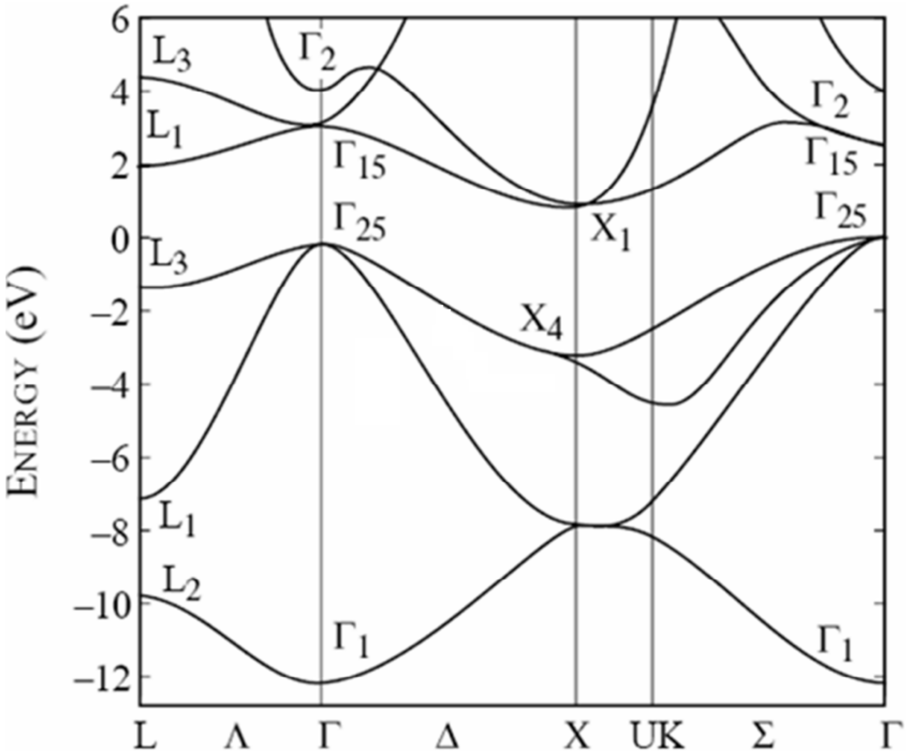

Abbildung 3: Bandstruktur eines Halbleiters.

a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]

b) Lesen Sie die Bandlücke E_G ab. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln? [1P]

c) Nehmen Sie an, man könnte die Gitterschwingungen komplett ausschalten (es sind also nur Übergänge mit vernachlässigbarem Impulsübertrag möglich). Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]

d) Die Dispersionsrelation $E(k) = 1\,eV \cdot (2 + \cos(\frac{ka}{2}))$ beschreibt näherungsweise einen Teil des Leitungsbandes von Silizium. Bestimmen sie die Gruppengeschwindigkeit und die effektive Masse der Elektronen bei $k = 0$ in Abhängigkeit der Gitterkonstanten a. [1,5P]

Fortsetzung auf der nächsten Seite!

e) Derselbe Teil des Leitungsbandes von Silizium werde nun durch eine quadratische Funktion der Form $E(k) = -A \cdot k^2 + 3\,eV$, wobei $A = const$, beschrieben. Wie hängen v und m_{eff} nun vom Impuls k ab? Zeigen Sie, dass die Dispersionsrelation aus dem vorherigen Aufgabenteil für kleine Impulse zu denselben k-Abhängigkeiten führt! (Tipp: Verwenden Sie die Talyor-Entwicklung.) [1,5P]

f) Erläutern Sie das Zustandekommen von Bloch-Oszillationen beim Anlegen eines konstanten elektrischen Feldes an einen Kristall mit freien Ladungsträgern. Wieso kann ein konstantes E-Feld trotzdem in der Realität einen gerichteten Stromfluss verursachen? [1,5P]

6. **pn-Übergang [7,5P]**

a) Was versteht man unter einer Raumladungszone? Erklären Sie zudem stichwortartig ihre Entstehung in einem pn-Übergang unter Berücksichtigung der wesentlichen Effekte! [2P]

b) Zeichnen Sie das Bandiagramm für einen p-Halbleiter und einen n-Halbleiter für den Fall, dass sich die Halbleiter [1P]
   - nicht im Kontakt befinden.
   - im Kontakt befinden.

c) Es wird nun eine äußere Vorspannung U an eine Diode angelegt. Wie muss die Diode kontaktiert werden, um sie in Durchlassrichtung zu betreiben? Wie muss die Kontaktierung für den Betrieb in Sperrichtung sein? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie die Banddiagramme für beide Fälle. [3P]

d) Skizzieren Sie die ideale U-I-Kennlinie einer pn-Diode. Welcher Strom I fließt bei $T = 300\,\mathrm{K}$ durch das Bauteil bei einer angelegten Spannung von 0,6 V. Der Sperrstrom der Diode beträgt 1 pA. [1,5P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	=	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	=	$\frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	=	$6{,}02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	=	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	=	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	=	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	=	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	=	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	=	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	=	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	=	$3{,}0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	=	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	=	$3{,}14$	
Euler'sche Zahl	e	=	$2{,}72$	
Imaginäre Einheit	j	=	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	→ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	→ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\begin{aligned}
\exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\
\exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x(\sin ax)^2 \, dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \; (a > 0, n = 0{,}1{,}2, \ldots)
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut