

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	5	7	9,5	12	8	7,5	49

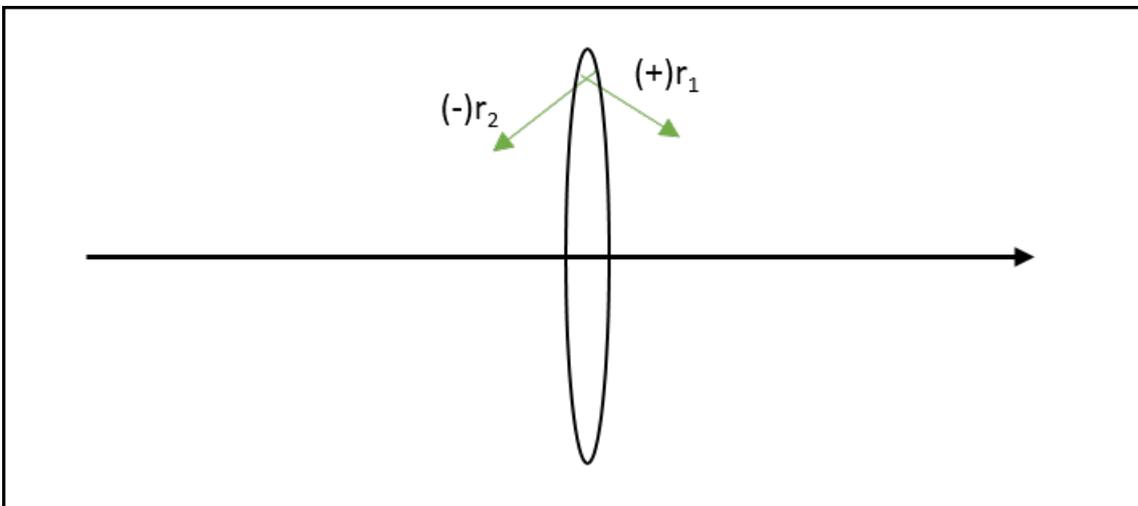
Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 49, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 24,5.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Optik [5P]

Es soll eine bikonvexe Linse konstruiert werden, die unter Wasser ($n_{Wasser} = 1,33$) eine Brennweite von $f_B = 50$ mm aufweist. Als Material steht Ihnen Kronglas mit einem Brechungsindex von $n_K = 1,53$ zur Verfügung. Beachten Sie die Vorzeichenkonvention. Beschriften Sie Ihre Skizzen vollständig.

- a) Skizzieren Sie die Linse auf die gegebene optische Achse und geben Sie die Vorzeichen der Radien der Linse an. Berechnen Sie die Radien der Linse, wenn diese betragsmäßig gleich sind. [2 P]



Die Radien der Linse lassen sich wie folgt berechnen. Es gilt $r_1 = -r_2 = R, R > 0$:

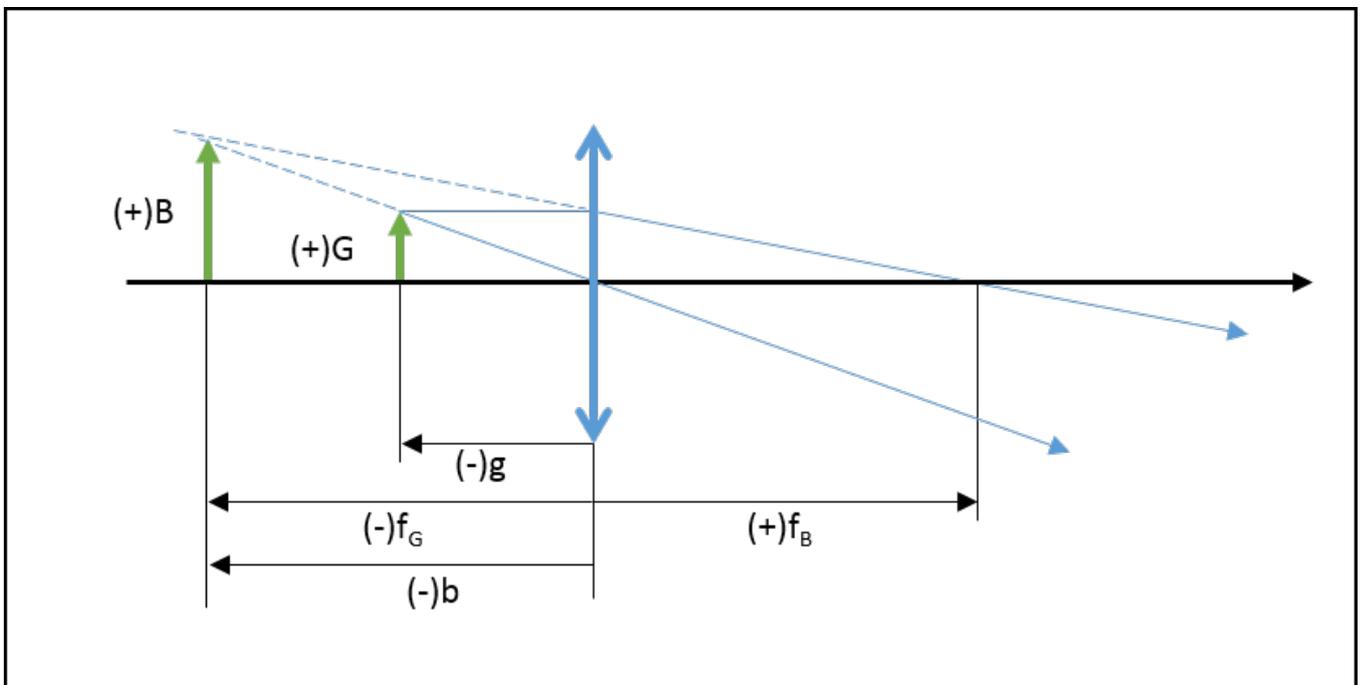
$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{n_K - n_{Wasser}}{n_{Wasser}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{50mm} &= \frac{1,53 - 1,33}{1,33} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{-R} \right) \\ \frac{1}{50mm} &= \frac{1,53 - 1,33}{1,33} \left(\frac{2}{R} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 15,04mm \\ r_2 &= -15,04mm \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie die Lage des Bildes für einen Gegenstand der sich 25 mm links der Linse befindet und skizzieren Sie die Abbildung. [2 P]

Laut der Abbildungsgleichung folgt mit $f_B = 50$ mm und $g = -25$ mm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} - \frac{1}{g} &= \frac{1}{f_B} \\ b &= \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{f_B} \right)^{-1} = -50mm \end{aligned} \quad (2)$$



- c) Die Linse aus Aufgabenteil a) wird jetzt aus dem Wasser geholt und befindet sich in Luft. Sie wird im Abstand von 25 mm vor einem Gegenstand plziert. Kann das Bild auf einem Sensor scharf einfangen werden? Begründen Sie ihre Antwort rechnerisch. [1 P]

Es kann nur ein 'reelles' Bild auf dem Sensor eingefangen werden. Dazu muss sich der Gegenstand außerhalb der einfachen Brennweite der Linse befinden: $|g| > |f|$.

Es folgt mit: $r_1 = -r_2 = R = 15,04 \text{ mm}$ aus Aufgabenteil a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{n_K - n_{Luft}}{n_{Luft}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{f} &= \frac{1,53 - 1}{1} \left(\frac{1}{15,04 \text{ mm}} - \frac{1}{-15,04 \text{ mm}} \right) \\ f &= 14,19 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3)$$

Da $|g| > |f|$ gilt, entsteht ein reelles Bild. (Bei einer Zeichnung kann erkannt werden, dass sich reale Strahlen schneiden). Somit lässt sich ein Bild mithilfe eines CCD Sensors einfangen.

2. Grundlagen der Festkörperelektronik [7P]

- a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. [1P]

$$\underbrace{\hat{H}}_{\text{Operator Gesamtenergie}} \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

oder

$$\left(\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{Operator kinetische Energie}} + \underbrace{V(x)}_{\text{Operator potentielle Energie}} \right) \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

- b) Kann die Wellenfunktion eines Teilchens gemessen werden? Wie hängt die Wellenfunktion mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zusammen? [1P]

Nein, denn die Wellenfunktion ist nicht direkt beobachtbar. Beobachtet werden kann nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, also das Betragsquadrat der Wellenfunktion.

- c) Was versteht man unter dem „Superpositionsprinzip“ der Quantenmechanik? [1P]

Der Gesamtzustand eines quantenmechanischen Systems lässt sich als lineare Überlagerung der Einzelzustände beschreiben oder anders formuliert: Die Summe von Wellenfunktionen, die die Schrödingergleichung eines Systems lösen, löst ebenfalls die Schrödingergleichung.

- d) Betrachten Sie ein freies quantenmechanisches Teilchen mit der Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = Ae^{j(kx-\omega t)}$$

und konstanter Amplitude A .

Welche räumliche Abhängigkeit ergibt sich für die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x,t)|^2$? Erklären Sie die physikalische Bedeutung Ihres Ergebnisses! [1P]

Die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion:

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = A^*e^{-j(kx-\omega t)}Ae^{j(kx-\omega t)} = |A|^2$$

Dieses ist konstant und somit ohne räumliche Abhängigkeit. Das freie Teilchen ist deshalb von $x = -\infty \dots + \infty$ vollständig delokalisiert.

- e) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]

Das Pauli-Prinzip besagt, dass Fermionen (z.B. Elektronen) nicht den gleichen Quantenzustand besetzen dürfen.

- f) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 5 \cdot 10^{-11}$ m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig! [1P]

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_e} = 0,0965 \text{ fJ} = 603 \text{ eV}$$

- g) Was bezeichnet man als „effektive Masse“ eines Ladungsträgers in einem Kristall? [1P]

Sie bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.

Formel: $m^ = \hbar^2 \left[\frac{d^2 E(k)}{dk^2} \right]^{-1}$*

3. Unendlicher Potentialtopf und parabolisches Potential [9,5P]

Gegeben sei das Potential $V_A(x)$ eines unendlich hohen Potentialtopfes:

$$V_A(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < -\frac{d}{2} \text{ (Bereich I)} \\ 0 & \text{für } -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \text{ (Bereich II)} \\ \infty & \text{für } x > \frac{d}{2} \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

mit $d > 0$.

- a) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V_A(x)$! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! Betrachten Sie nun die möglichen Zustände von Elektronen in $V_A(x)$. Skizzieren Sie hierfür im selben Diagramm zusätzlich die Eigenfunktionen (Realteil), welche die Elektronenzustände mit den drei niedrigsten Eigenenergien $W > 0$ beschreiben! [1,5P]

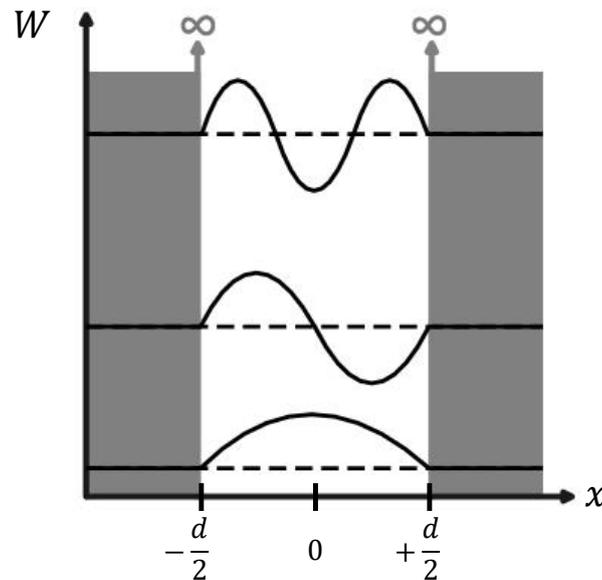


Abbildung 1: Unendlicher Potentialtopf

Betrachten Sie im Folgenden für die Aufgabenteile b)-g) Elektronen in einem parabolischen Potential $V_B(x)$:

$$V_B(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

mit $m > 0$ und $\omega > 0$.

- b) Skizzieren Sie das gegebene Potential $V_B(x)$ in ein neues Diagramm! Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! Zeichnen Sie im selben Diagramm wiederum die Eigenfunktionen (Realteil), welche die Elektronenzustände mit den drei niedrigsten Eigenenergien $W > 0$ beschreiben! Nennen Sie zusätzlich eine Gemeinsamkeit und einen Unterschied zwischen den Eigenfunktionen im unendlich hohen Potentialtopf (Aufgabenteil a)) und im parabolischen Potential (Aufgabenteil b))! [2,5P]

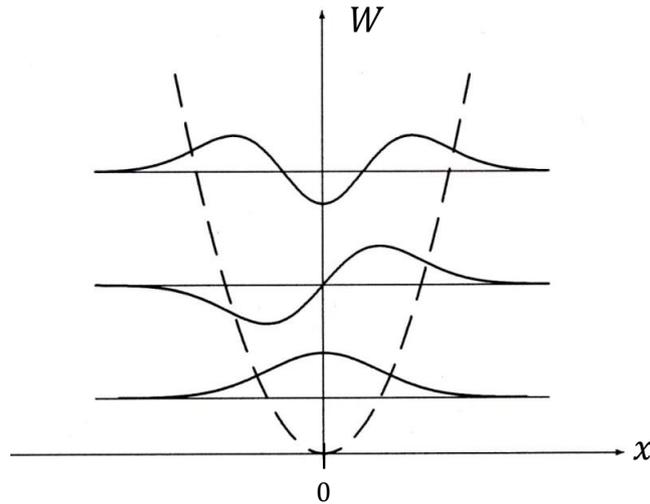


Abbildung 2: Parabolisches Potential

Gemeinsamkeiten der Wellenfunktionen aus a) und b):

- abwechselnd gerade-ungerade
- Grundzustand gerade
- sinusförmige Wellenfunktion

Unterschiede der Wellenfunktionen aus a) und b):

- Knotenpunkte an Potentialwand, a) ja b) nein
- Eindringen in Potentialwand, a) nein b) ja
- Tunneffekt, a) nein b) ja

- c) Der normierte elektronische Grundzustand im parabolischen Potential $V_B(x)$ kann durch die Wellenfunktion $\psi_0 = \frac{c_0}{\sqrt{b}} \exp(-\frac{x^2}{2b^2})$ mit $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ beschrieben werden. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor c_0 ! (Nutzen Sie gegebenenfalls die Formeln im Anhang) [1P]

$$\begin{aligned}
 1 &\stackrel{!}{=} \int \psi_0^* \psi_0 dx \\
 &= \frac{c_0^2}{b} \underbrace{\int \exp(-\frac{x^2}{b^2}) dx}_{\substack{\text{Anhang} \\ \sqrt{\pi}b}} \\
 &= c_0^2 \sqrt{\pi} \\
 \Rightarrow c_0 &= \frac{1}{\pi^{1/4}} = \pi^{-1/4}
 \end{aligned}$$

- d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ für Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand! [1,5P]

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \rangle &= \frac{c_0^2}{b} \underbrace{\int x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx}_{\substack{\text{Anhang } 3 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}}} \\
 &= c_0^2 b^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \\
 \langle x \rangle^2 &= \left(\frac{c_0^2}{b} \underbrace{\int x \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx}_{\text{Anhang } 0} \right)^2 \\
 &= 0 \\
 \Rightarrow \Delta x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}
 \end{aligned}$$

- e) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ für Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand! [1,5P]

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= \frac{c_0^2}{b} \int \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\
&= -\frac{c_0^2 \hbar^2}{b} \underbrace{\int \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{x^2}{b^4}\right) dx}_{\substack{\text{Anhang} \\ = -\frac{\sqrt{\pi}}{b} + \frac{\sqrt{\pi}}{2b} - \frac{\sqrt{\pi}}{2b}}} \\
&= \frac{c_0^2 \hbar^2 \sqrt{\pi}}{2b^2} \\
&= \frac{\hbar m \omega}{2} \\
\langle p \rangle^2 &= \left(\frac{c_0^2}{b} \int \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \right)^2 \\
&= \left(\frac{c_0^2 i \hbar}{b^3} \underbrace{\int x \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx}_{\text{Anhang}_0} \right)^2 \\
&= 0 \\
\Rightarrow \Delta p &= \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}
\end{aligned}$$

f) Zeigen Sie, dass Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllen! [0,5P]

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} = \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

g) Berechnen Sie abschließend den Mittelwert der Eigenenergie $\langle W_0 \rangle$ den Elektronen im parabolischen Potential im Grundzustand besitzen! [1P]

$$\begin{aligned}
\langle W_0 \rangle &= \frac{c_0^2}{b} \int \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\
&= \frac{c_0^2}{b} \int \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{x^2}{b^4}\right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) dx \\
&= \frac{c_0^2}{b} \int \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \left(-\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \hbar \omega \underbrace{\int \frac{c_0^2}{b} \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx}_{=1} \\
&= \frac{1}{2} \hbar \omega
\end{aligned}$$

4. Zustandsdichten von Halbleitern [12P]

- a) Skizzieren Sie in Abbildung 3 die Zustandsdichten $g(W)$ für einen Quantenpunkt (0-dimensional), einen Quantendraht (1-dimensional), einen Quantentopf (2-dimensional), und einen Volumen-Halbleiter (3-dimensional) in das jeweilige Diagramm. [2P]

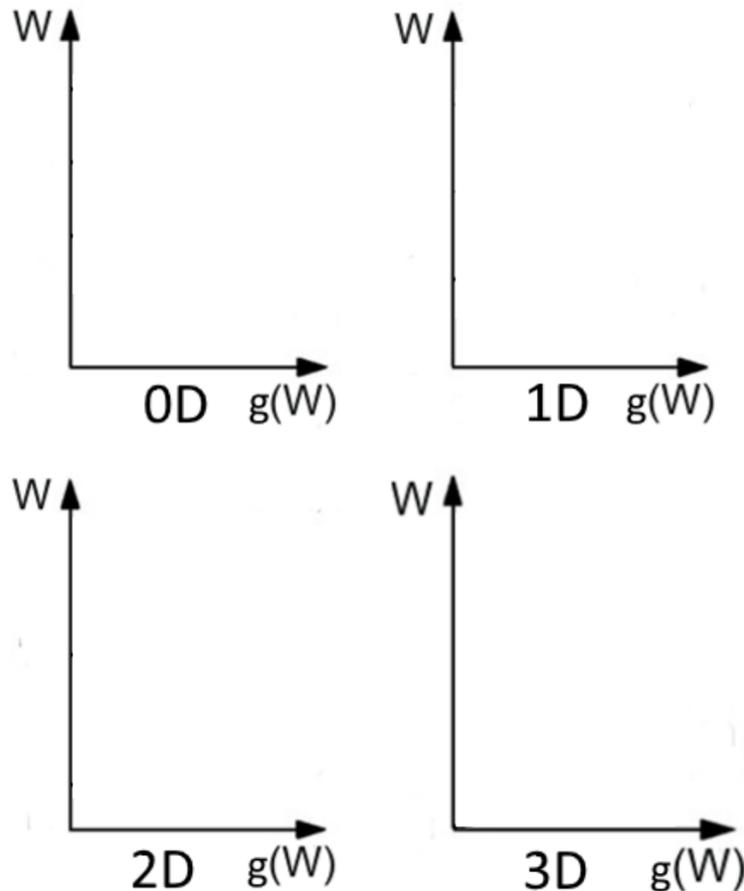


Abbildung 3: Zustandsdichten $g(W)$ vier verschiedener Halbleiterstrukturen.

Lösung in Abbildung 4.

- b) Wie lautet die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W,T)$ und was beschreibt diese? Welchen Wert nimmt die Fermi-Dirac-Verteilung bei $W = W_F$ an? Unter welchen Voraussetzungen kann man die Boltzmann-Näherung verwenden?[2P]

$$f_{FD}(W,T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

Die Fermi-Dirac-Verteilung beschreibt die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes einer bestimmten Energie W in Abhängigkeit von der Temperatur und

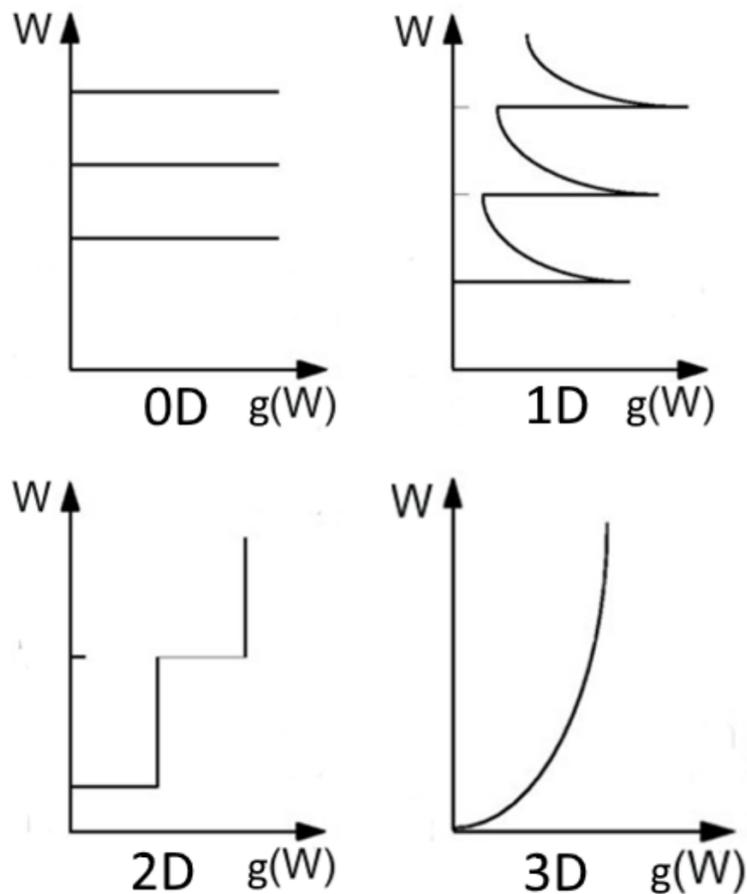


Abbildung 4: Zustandsdichten $g(W)$ vier verschiedener Halbleiterstrukturen.

der Fermienergie. Die Fermi-Verteilung nimmt bei $W = W_F$ den Wert 0.5 an. Die Boltzmann-Näherung kann verwendet werden, wenn $W - W_F \gg k_B T$

Wir gehen nun von einem intrinsischen **dreidimensionalen** Halbleiter bei 300 K aus. Die effektive Zustandsdichte für Elektronen im Leitungsband sei durch $N_L = 8,87 \cdot 10^{24} m^{-3}$ und die für Löcher im Valenzband durch $N_V = 2,51 \cdot 10^{25} m^{-3}$ gegeben.

- c) Berechnen Sie die effektiven Massen m_e und m_h . [1P]

Es gilt:

$$N_{L,V} = 2 \left(\frac{2\pi m_{e,h} k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \Rightarrow m_{e,h} = \left(\frac{N_{L,V}}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{h^2}{2\pi k_B T}$$

$$\Rightarrow m_e = 4,55 \cdot 10^{-31} kg \approx 0,5 \cdot m_0$$

$$\Rightarrow m_h = 9,11 \cdot 10^{-31} kg \approx m_0$$

- d) Berechnen Sie für den gleichen Halbleiter die Besetzungsdichte n eines Energieniveaus W_0 , welches 0.5 eV oberhalb des Fermi-Niveaus W_F liegt. Die Leitungsbandkante W_L liegt 0.11 eV oberhalb des Fermi-Niveaus. [2P]

Berechnung der Abstände der Energieniveaus:

$$W_0 - W_F = 0.5 \text{ eV}$$

$$W_L - W_F = 0.11 \text{ eV}$$

$$\begin{aligned} W_0 - W_L &= W_0 - W_F - W_L + W_F \\ &= (W_0 - W_F) - (W_L - W_F) \\ &= 0.5 \text{ eV} - 0.11 \text{ eV} = 0.39 \text{ eV} \end{aligned}$$

Für die Besetzungsdichte $n(W, T)$ im Leitungsband gilt:

$$n(W, T) = g_L(W, T) \cdot f(W, T)$$

mit

$$g_L(W, T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_L}{k_B T} \sqrt{\frac{W - W_L}{k_B T}} \quad \text{und} \quad f(W, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

Für die Besetzungsdichte $n(W_0, T)$ am Energie-Niveau W_0 bei $T = 300 \text{ K}$ gilt somit:

$$\begin{aligned} n(W_0, T) &= g_L(W_0, T) \cdot f(W_0, T) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_L}{k_B T} \sqrt{\frac{W_0 - W_L}{k_B T}} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W_0 - W_F}{k_B T}\right)} \\ \Rightarrow n(W_0, T) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_L}{k_B T} \sqrt{\frac{0.39 \text{ eV}}{k_B T}} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{0.5 \text{ eV}}{k_B T}\right)} \\ &= 6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} (\text{eV})^{-1} \end{aligned}$$

- e) Die Besetzungsdichte kann in einem kleinen Intervall $[W_0 - \varepsilon, W_0 + \varepsilon]$ um W_0 als konstant angenommen werden. Berechnen Sie wie viele freie Elektronen N pro Kubikmeter eine Energie haben, die in dieses Intervall fallen. Es gilt $\varepsilon = 0,05 \text{ eV}$. [1P]

Da $n(W_0, T)$ im Intervall konstant ist, kann das Integral über die Energie durch eine Multiplikation berechnet werden. Es gilt:

$$N = \int_{W_0 - \varepsilon}^{W_0 + \varepsilon} \underbrace{n(W_0, T)}_{\text{const.}} dW = n(W_0, T) \cdot 2\varepsilon = 6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} (\text{eV})^{-1} \cdot 0.1 \text{ eV} = 6 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

Im Folgenden betrachten wir einen unbekanntem Halbleiter dessen Zustandsdichte $g(W)$ und dessen Fermi-Niveaus W_F in Abbildung 5 dargestellt sind.

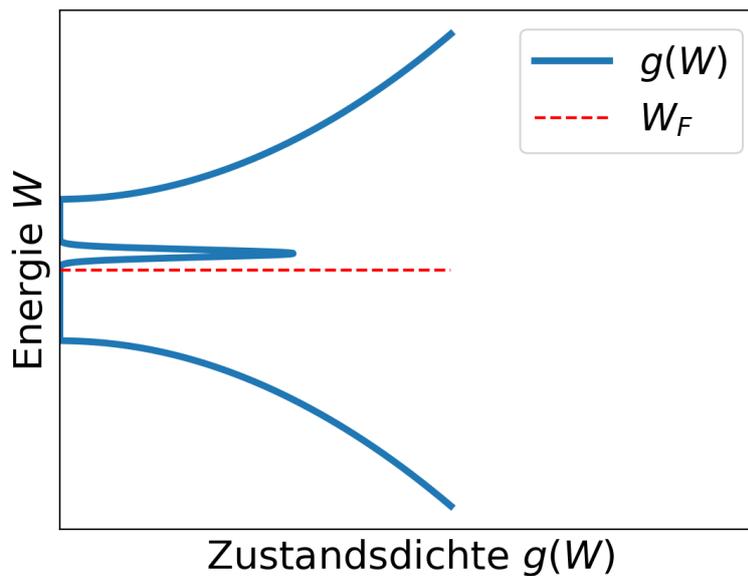


Abbildung 5: Zustandsdichten $g(W)$ eines unbekanntem Halbleiters mit eingezeichnetem Fermi-Niveau W_F .

f) Was unterscheidet die abgebildete Zustandsdichte von der Zustandsdichte eines intrinsischen Halbleiters? Benennen Sie die Technik, mit der man einen Halbleiter mit einer solchen Zustandsdichte erzeugen kann. [1P]

- Zusätzlich eingebrachte Zustände in der Bandlücke oberhalb des Fermi-Niveaus.
- Dies kann durch Dotierung des Halbleiter erzeugt werden.

g) Von welchem Typ sind die Majoritätsladungsträger im Material? Gehen wir davon aus, das Ausgangsmaterial des Halbleiters sei Silizium. Nennen Sie zwei Elemente, die verwendet werden können um dem Silizium-Halbleiter eine solche Zustandsdichte zu geben. [1P]

Da die zusätzlichen Zustände oberhalb des Fermi-Niveaus liegen und sehr nah unterhalb der Leitungsbandkante sind, handelt es sich um Donatorniveaus, die eine n-Dotierung zur Folge haben. Die Majoritätsladungsträger sind somit Elektronen. Ein Silizium-Halbleiter kann durch Phosphor, Arsen oder Antimon n-dotiert werden.

h) Der Halbleiter hat bei Raumtemperatur ($T = 300\text{ K}$) eine Löcherkonzentration von $p = 2 \cdot 10^{12}\text{ m}^{-3}$ und eine Elektronenkonzentration von $n = 3 \cdot 10^{19}\text{ m}^{-3}$. Die effektiven Zustandsdichten des Valenz- und Leitungsbandes sind $N_V = N_L = 2 \cdot 10^{24}\text{ m}^{-3}$. Berechnen sie die Bandlücke! [2P]

Die Bandlücke W_G kann über die Formel der intrinsischen Ladungsträgerdichte

berechnet werden. Dabei gilt:

$$n_i^2 = N_V N_L \exp\left(-\frac{W_G}{k_B T}\right)$$
$$\Rightarrow W_G = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{n_i^2}{N_V N_L}\right)$$

Das Quadrat der intrinsischen Ladungsträgerdichte kann über das Massenwirkungsgesetz $n_i^2 = n \cdot p$ berechnet werden. Demnach ergibt sich für die Bandlücke:

$$W_G = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{n_i^2}{N_V N_L}\right) = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{n \cdot p}{N_V N_L}\right) = 1 \text{ eV}$$

5. Bandstruktur [8P]

Betrachten Sie die abgebildete Bandstruktur eines Halbleiters.

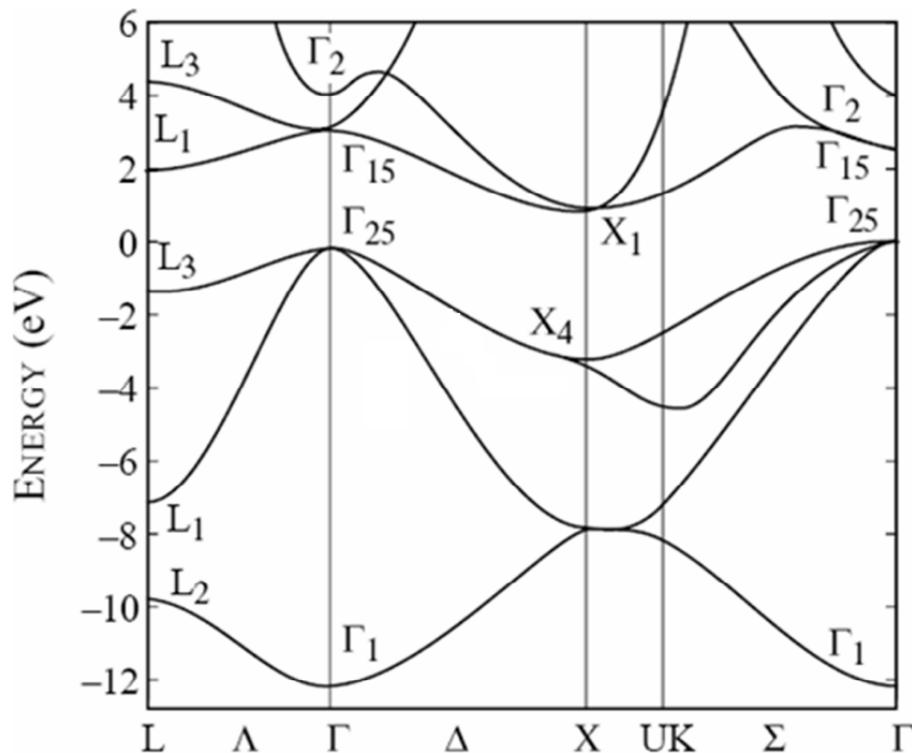


Abbildung 6: Bandstruktur eines Halbleiters.

- a) Handelt es sich um einen direkten oder indirekten Halbleiter? Begründen Sie Ihre Antwort. [1P]

Da das Minimum des Leitungsbandes nicht beim gleichen k -Vektor wie das Maximum des Valenzbandes liegt, handelt es sich um einen indirekten Halbleiter.

- b) Lesen Sie die Bandlücke E_G ab. Um welchen Halbleiter könnte es sich handeln? [1P]

Die Bandlücke beträgt $E_G = 1,1 \text{ eV}$. Es könnte sich demnach um Silizium handeln.

- c) Nehmen Sie an, man könnte die Gitterschwingungen komplett ausschalten (es sind also nur Übergänge mit vernachlässigbarem Impulsübertrag möglich). Welche Wellenlänge müssten Photonen mindestens besitzen um absorbiert werden zu können? [1,5P]

Es kann nicht mit der Bandlücke $1,1 \text{ eV}$ gerechnet werden, sondern man muss die 'direkte' Bandlücke ablesen, die ca. 3 eV beträgt. Die Wellenlänge der Photonen beträgt somit:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_{G,dir}} = 413 \text{ nm}$$

- d) Die Dispersionsrelation $E(k) = 1 \text{ eV} \cdot (2 + \cos(\frac{ka}{2}))$ beschreibt näherungsweise einen Teil des Leitungsbandes von Silizium. Bestimmen sie die Gruppengeschwindigkeit

und die effektive Masse der Elektronen bei $k = 0$ in Abhängigkeit der Gitterkonstanten a . [1,5P]

$$v = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{a \cdot 1 \text{ eV}}{2\hbar} \cdot \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$m_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}} = -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}} \cdot \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$v(0) = 0$$

$$m_{\text{eff}}(0) = -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}}$$

- e) Derselbe Teil des Leitungsbandes von Silizium werde nun durch eine quadratische Funktion der Form $E(k) = -A \cdot k^2 + 3 \text{ eV}$, wobei $A = \text{const}$, beschrieben. Wie hängen v und m_{eff} nun vom Impuls k ab? Zeigen Sie, dass die Dispersionsrelation aus dem vorherigen Aufgabenteil für kleine Impulse zu denselben k -Abhängigkeiten führt! (Tipp: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung.) [1,5P]

$$v = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{2A}{\hbar} \cdot k$$

$$m_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}} = -\frac{\hbar^2}{2A}$$

Die Geschwindigkeit wächst also linear mit k und die effektive Masse ist konstant. Betrachte nun wieder v und m_{eff} aus dem vorigen Aufgabenteil. Unter der Annahme hinreichend kleiner Impulse gilt mit $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$ für $x \ll 1$

$$ka \ll 1$$

$$\Rightarrow v = -\frac{a \cdot 1 \text{ eV}}{2\hbar} \cdot \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \approx -\frac{a \cdot 1 \text{ eV}}{2\hbar} \cdot \frac{ka}{2}$$

$$m_{\text{eff}} = -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}} \cdot \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \approx -\frac{4\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}}$$

Es ergeben sich also auf beiden Wegen dieselben Abhängigkeiten!

- f) Erläutern Sie das Zustandekommen von Bloch-Oszillationen beim Anlegen eines konstanten elektrischen Feldes an einen Kristall mit freien Ladungsträgern. Wieso kann ein konstantes E-Feld trotzdem in der Realität einen gerichteten Stromfluss verursachen? [1,5P]

Das konstante elektrische Feld verursacht ein lineares Wachstum des k -Vektors. Aufgrund der Periodizität der Dispersionsrelation und deren Symmetrie bzgl. $k = 0$ führt dies zwangsläufig zum Durchlaufen von Wendepunkten und damit zu periodisch auftretenden Vorzeichenwechseln der effektiven Masse. Dadurch ändert sich auch die

Kraftrichtung periodisch und es entsteht eine räumliche Oszillation der Elektronen. Ein gerichteter Stromfluss entsteht bei Raumtemperatur aber trotzdem, da die mittleren Stoßzeiten der Elektronen deutlich geringer sind als die Periodendauer einer Bloch-Oszillation, ein Anwachsen des Elektronenimpulses bis zum Richtungswechsel der Kraft wird dadurch verhindert.

6. pn-Übergang [7,5P]

- a) Was versteht man unter einer Raumladungszone? Erklären Sie zudem stichwortartig ihre Entstehung in einem pn-Übergang unter Berücksichtigung der wesentlichen Effekte! [2P]

Die Raumladungszone ist ein Grenzbereich am Übergang zwischen einem p- und einem n-dotierten Halbleiter, der aufgrund von Raumladungen nicht mehr neutral ist. Sie entsteht, wenn zwei unterschiedlich dotierte Halbleiter in Kontakt gebracht werden, da an der Grenzfläche beider Halbleiter große Gradienten der Löcherdichte auf der n-Seite und der Elektronendichte auf der p-Seite vorliegen. Der dadurch hervorgerufene Diffusionsstrom sorgt für eine Ladungstrennung, da grenzflächennahe Elektronen auf die p-Seite wandern und damit positiv geladene Atomrümpfe zurücklassen. Entsprechend wandern grenzflächennahe Löcher auf die n-Seite und lassen negativ geladene Dotieratome zurück. Es entsteht ein elektrisches Feld, das auf die Ladungsträger entgegengesetzt zur Diffusion wirkt. Die Raumladungszone ist voll ausgebildet, wenn beide Ströme im Gleichgewicht sind.

- b) Zeichnen Sie das Banddiagramm für einen p-Halbleiter und einen n-Halbleiter für den Fall, dass sich die Halbleiter [1P]

- nicht im Kontakt befinden.
- im Kontakt befinden.

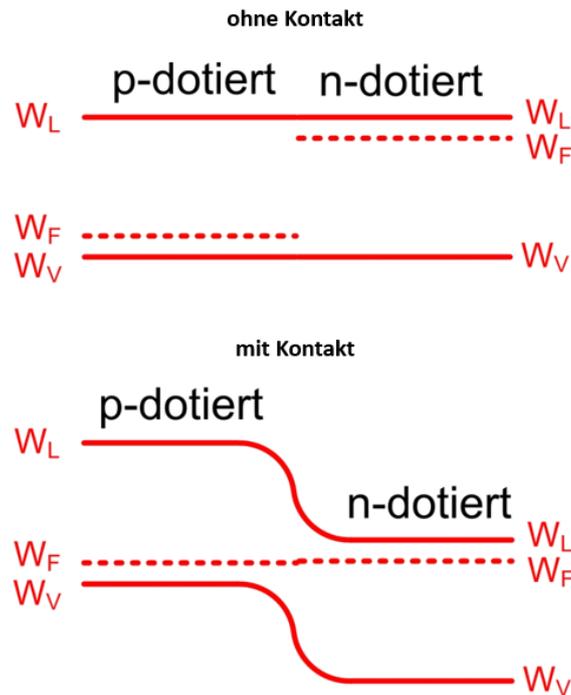


Abbildung 7: Banddiagramm eines p- und n-Halbleiters ohne und mit Kontakt

- c) Es wird nun eine äußere Vorspannung U an eine Diode angelegt. Wie muss die Diode kontaktiert werden, um sie in Durchlassrichtung zu betreiben? Wie muss die Kontaktierung für den Betrieb in Sperrichtung sein? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie die Banddiagramme für beide Fälle. [3P]

Durchlassrichtung: positiver Pol an p und negativer Pol an n

Sperrichtung: negativer Pol an p und positiver Pol an n

Begründung:

Durchlassrichtung: Ladungsträger werden in die RLZ gedrückt und bauen diese ab. Die Potentialbarriere, die durch die RLZ entsteht wird abgebaut und Strom kann fließen.

Sperrichtung: Ladungsträger werden aus der RLZ herausgezogen und verbreitern diese. Die Potentialbarriere vergrößert sich und es findet kein Stromfluss statt.

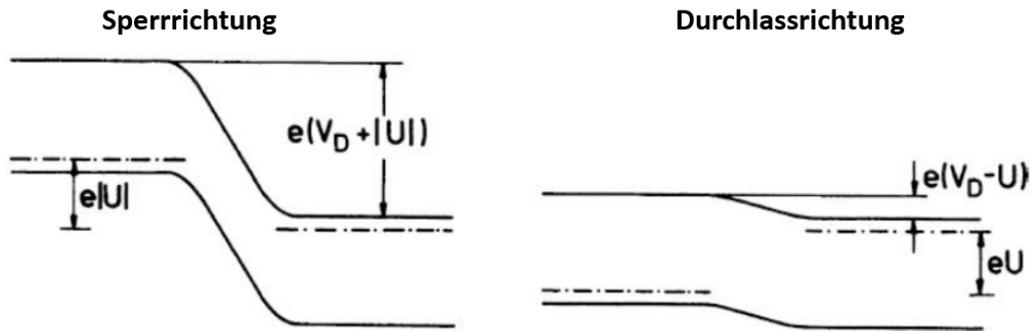


Abbildung 8: Banddiagramme eines pn-Übergangs mit einer angelegten Vorspannung U in Sperrrichtung und in Durchlassrichtung

- d) Skizzieren Sie die ideale U-I-Kennlinie einer pn-Diode. Welcher Strom I fließt bei $T = 300\text{ K}$ durch das Bauteil bei einer angelegten Spannung von $0,6\text{ V}$. Der Sperrstrom der Diode beträgt 1 pA . [1,5P]

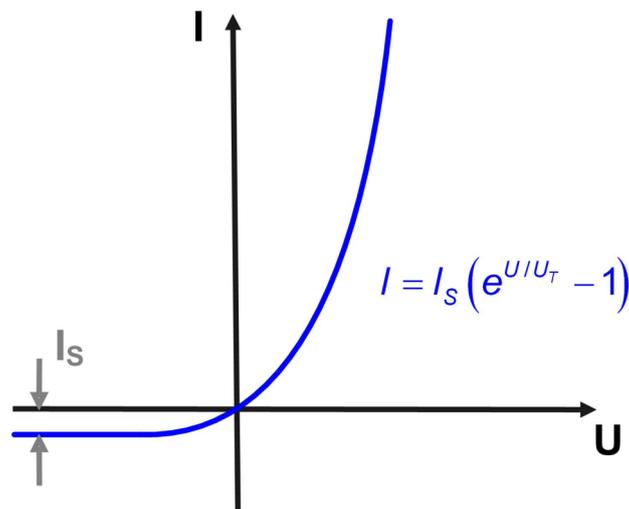


Abbildung 9: U-I-Kennlinie einer pn-Diode

Es gilt:

$$I = I_S (e^{U/U_T} - 1) \quad (5)$$

$$= 1\text{ pA} \cdot (e^{0,6\text{ V} \cdot e / (k_B \cdot 300\text{ K})} - 1) \quad (6)$$

$$= 12\text{ mA} \quad (7)$$

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$= 6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	\hbar	$= \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$= 6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$= 5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$= 1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$= 1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$= 9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$= 1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$= 8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$= 1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$= 3,14$	
Euler'sche Zahl	e	$= 2,72$	
Imaginäre Einheit	j	$= \sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut