

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

Klausur

13. März 2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	8,5	8	9	9,5	8	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Optik [7P]

Teil 1: Brechung und Reflexion

- a) Berechnen Sie den Totalreflexionswinkel eines sich in Luft befindlichen Prismas mit $n_{Prisma} = 1,581$ [1P].
- b) Nennen Sie eine Anwendung bei der Totalreflexion zum Einsatz kommt. [0,5 P]
- c) Gegeben sei ein Prisma mit zwei 45° Winkel und einem Brechungsindex von $n_{Prisma} = 1,581$, das sich in Luft befindet. Vervollständigen Sie für die gegebenen Strahlen in Abb. 1 und Abb. 2 die Strahlengänge bis zum Austritt der Strahlen aus dem Prisma. Verwenden Sie die Totalreflexion als Kriterium, ob ein Strahl aus dem Prisma auskoppelt. Begründen Sie ihr Vorgehen bei jeder Reflexion / Brechung rechnerisch und geben Sie abschließend den Austrittswinkel im Bezug zum Lot der Austrittsfläche an. [3 P]

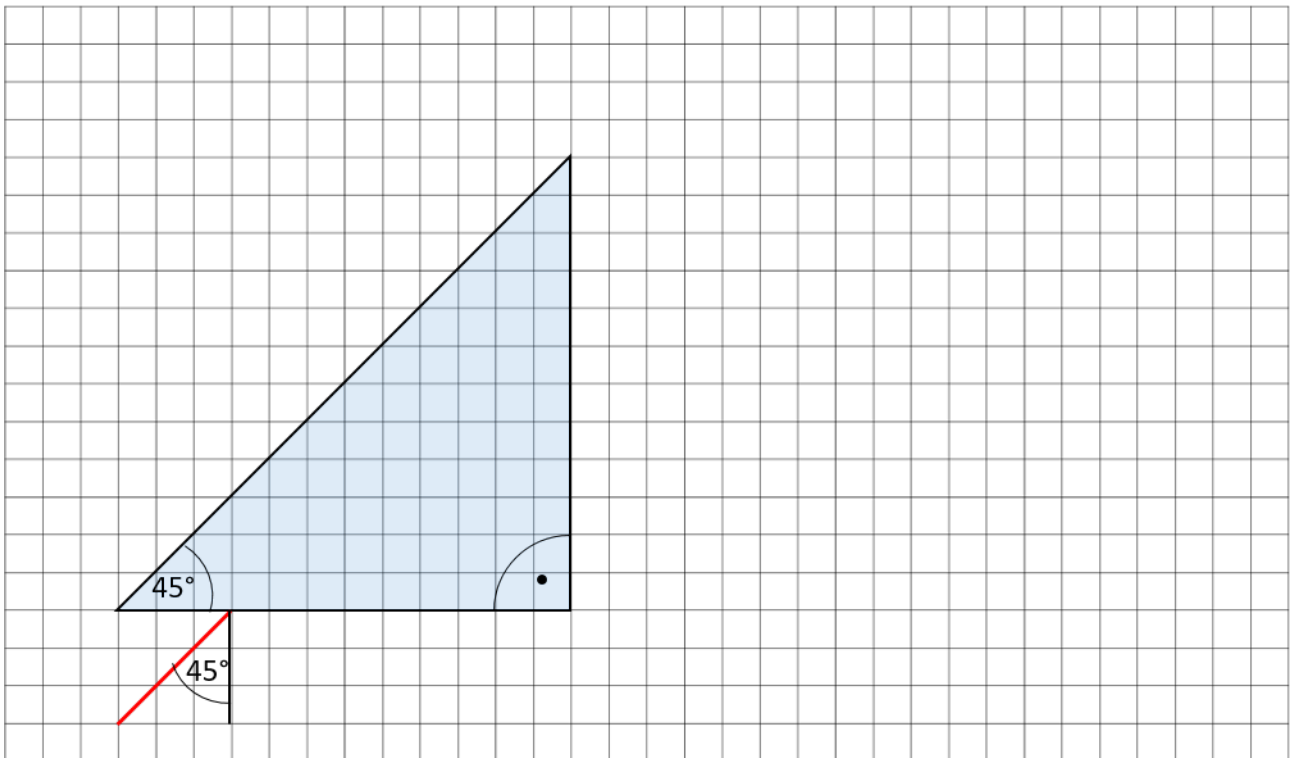


Abbildung 1: Strahlengang 1: Der Strahl trifft unter einem Winkel von $\vartheta_0 = 45^\circ$ auf das Prisma.

Fortsetzung auf Rückseite!

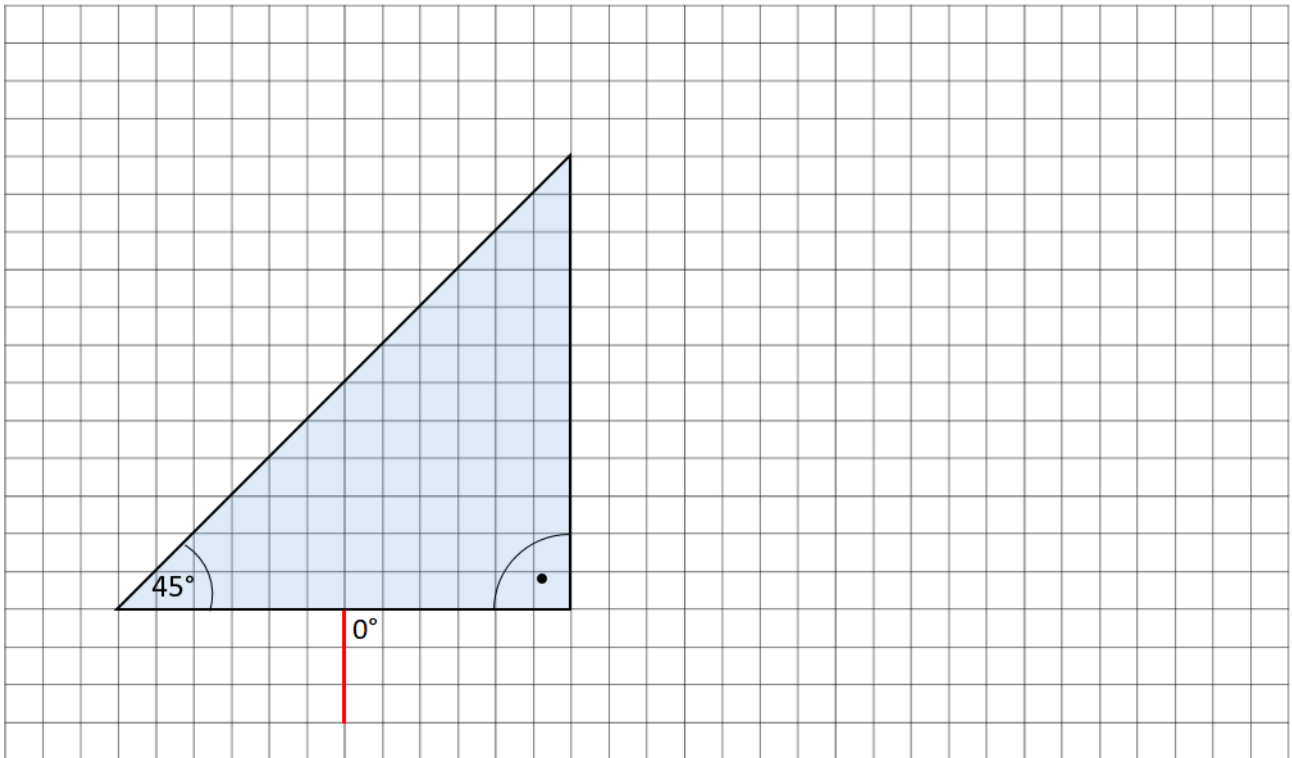


Abbildung 2: Strahlengang 2: Der Strahl trifft unter einem Winkel von $\vartheta_0 = 0^\circ$ auf das Prisma.

Teil 2: Geometrische Optik

- d) Gegeben sei eine bikonkave Linse, für die gilt $|r_1| = 2 \cdot |r_2|$. Der Radius r_1 ist einem Gegenstand zugewandt. Berechnen Sie die Radien der Linse, wenn die Brennweite $|f| = 50 \text{ mm}$ betragen soll und die Linse aus Flintglas mit einem Brechungsindex von $n_{\text{Linse}} = 1,75$ gefertigt ist. Die Linse befindet sich in Luft. [1,5 P]
- e) Berechnen sie die Bildweite eines Gegenstandes der sich 75 mm links der in d) gegebenen Linse befindet. [1 P]

Name:

Matrikel-Nr.:

2. Grundlagen der Festkörperelektronik [8,5P]

- a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. [1P]
- b) Kann die Wellenfunktion eines Teilchens gemessen werden? Wie hängt die Wellenfunktion mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zusammen? [1P]
- c) Gegeben seien zwei Lösungen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Zeigen Sie, dass gemäß dem Superpositionsprinzip auch die Wellenfunktion $\psi_3(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung löst! [1P]
- d) Ein dünner Halbleiter wird mit monochromatischer Strahlung bestrahlt. Bei Wellenlängen λ oberhalb von $1,85 \mu\text{m}$ wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke des Halbleiters? [1P]
- e) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]
- f) Ein Elektron und ein Proton haben jeweils eine kinetische Energie von 150 keV . Berechnen Sie jeweils die de-Broglie-Wellenlänge. Gehen Sie dabei von nichtrelativistischen Teilchen aus! [1,5P]
- g) Gehen Sie davon aus, dass der Impuls eines Elektrons genau bestimmt ist. Was lässt sich dann über den Ort des Elektrons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]
- h) Was bezeichnet man als „effektive Masse“ eines Ladungsträgers in einem Kristall? Geben Sie zusätzlich zu Ihrer Erläuterung auch den Zusammenhang der effektiven Masse mit der Dispersionsrelation $W(k)$ an. [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

3. Potentialbarriere [8P]

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \text{ (Bereich I)} \\ V_0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich II)} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. Von $x = +\infty$ kommend laufe eine ebene Welle mit der Energie $W < V_0$ ein. Für die Welle kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\text{Bereich I: } \psi_{\text{I}}(x) = e^{-jk_{\text{I}}x} + re^{jk_{\text{I}}x}$$

$$\text{Bereich II: } \psi_{\text{II}}(x) = te^{-jk_{\text{II}}x}$$

Demnach hat der einlaufende Anteil der Welle die Amplitude 1. Entsprechend bezeichnet r die Reflexions- und t die Transmissionsamplitude.

- a) Skizzieren Sie das Potential und achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]
- b) Beschreiben Sie stichwortartig das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wenn man die Welle entweder als (i) klassisches Teilchen oder als (ii) quantenmechanisches Teilchen interpretiert! [1P]
- c) Geben Sie die Wellenzahlen in den Bereichen I und II in Abhängigkeit von V_0 und W an! [1P]
- d) Berechnen Sie mithilfe der Stetigkeitsbedingungen die Reflexions- und Transmissionsamplituden in Abhängigkeit der Wellenzahlen! [2P]
- e) In der Übung wurde gezeigt, dass der Term $\frac{\hbar}{j2m}(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi)$ als eine Teilchenstromdichte $\vec{J}$ interpretiert werden kann. Berechnen Sie diese für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I in Abhängigkeit von W ! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

-
- f) Es sei $V_0 = 1,0 \text{ eV}$. Betrachten Sie ein Elektron mit der Energie $W = 0,9 \text{ eV}$! Für die Masse des Elektrons können Sie die freie Elektronenmasse annehmen. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{P_1}{P_{\text{Rest}}}$, wobei P_1 die Wahrscheinlichkeit ist, mit der das Elektron im ersten Angström der Barriere anzutreffen ist! P_{Rest} ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das Elektron im Rest der Barriere anzutreffen ist. Das Ergebnis ist als Zahlenwert anzugeben! (Hinweis: Integrieren Sie geeignet über das Betragsquadrat der Wellenfunktion!) [2,5P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

4. Kristalle [9P]

- a) Wie viele Atome befinden sich in der Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc) Kristallgitters mit zweiatomiger Basis? Zeichnen Sie die Gitterpunkte inklusive Basis eines solchen Kristallgitters in die vorgegebene Zeichnung ein! Die Basis besteht aus zwei Atomen an den Stellen $\{(0,0,0), (\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a)\}$. [1,5P]

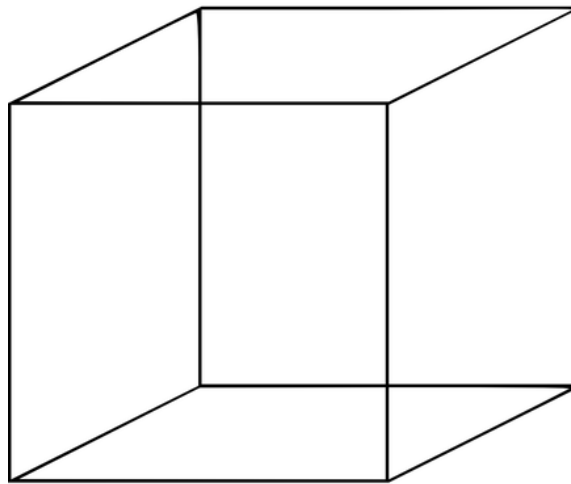


Abbildung 3: Vorlage für fcc-Gitter

- b) Wir betrachten einen Halbleiter entsprechend Aufgabe a), der in einem fcc-Gitter (mit Gitterkonstante a) mit zweiatomiger Basis kristallisiert. Er hat eine Dichte von $\rho = 2,336 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und eine molare Masse von $M = 28,09 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Berechnen Sie die Gitterkonstante a ! [1P]

Das Leitungsband des Halbleiters lässt sich im k -Raum im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = \Delta W(2,5 - \cos(ka))$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2\Delta W(1 - 1,19 \cos(ka))$ beschrieben. ΔW sei 1 eV.

- c) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in das Diagramm! [1P]

Fortsetzung auf Rückseite!

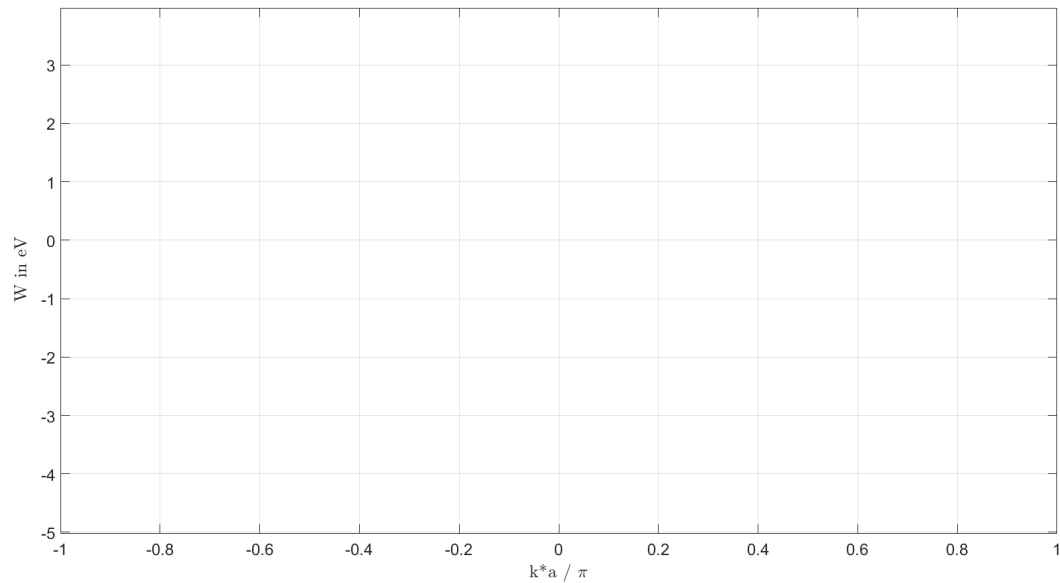


Abbildung 4: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

- d) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Begründen Sie! [1P]
- e) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1,5P]
- f) Bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_g und die effektive Masse m_{eff} eines Elektrons im Leitungsband in Abhängigkeit von a und ΔW ! Bestimmen Sie dazu zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_L(k)}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}$! [2P]
- g) Beschreiben Sie knapp und qualitativ, wie sich ein angelegtes elektrisches Feld (d.h. eine konstante Kraft) auf das Verhalten des in Teilaufgabe f) beschriebenen Elektrons auswirkt! Wird dieses Verhalten typischerweise bei Raumtemperatur beobachtet? Begründen Sie ihre Antwort! [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

5. Intrinsische und dotierte Halbleiter [9,5P]

a) Gegeben sei ein intrinsischer **dreidimensionaler** Halbleiter in parabolischer Näherung mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 5: [1,5P]

- Energieabhängige Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$
- Energieabhängige Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
- Energieabhängige Ladungsträgerdichte $\tilde{n}(W)$ und $\tilde{p}(W)$

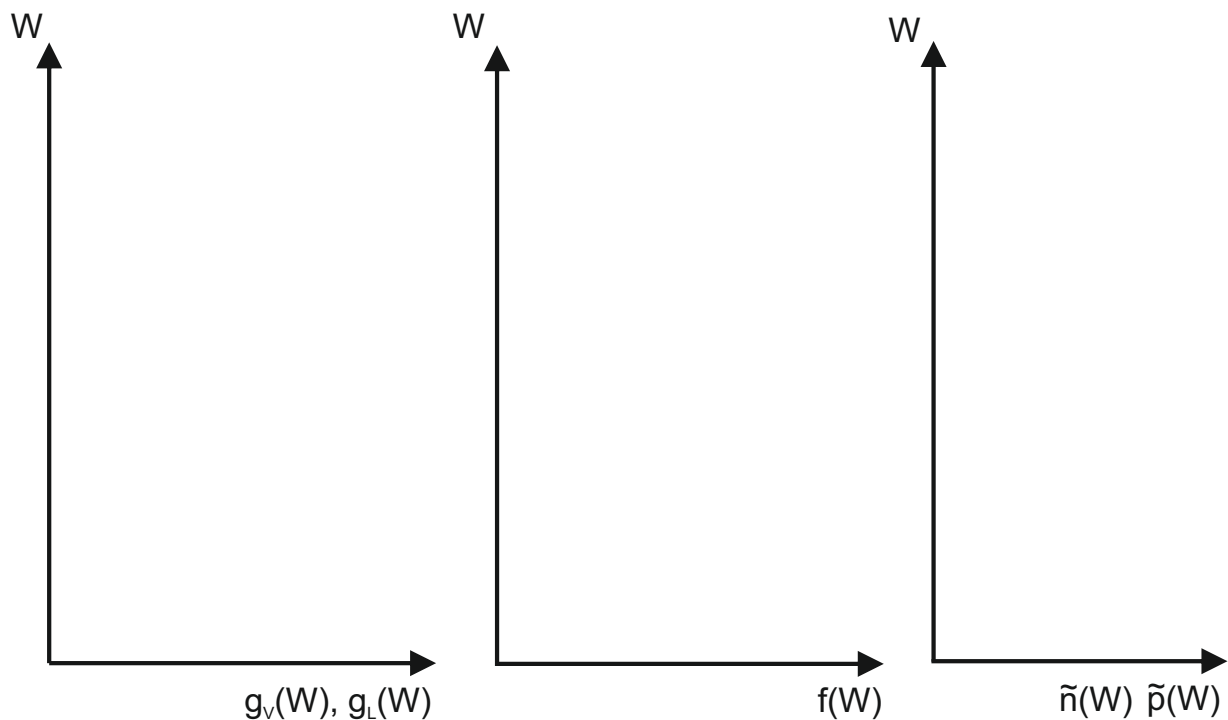


Abbildung 5: Koordinatensysteme für Schaubilder

b) In einem Halbleiter wird eine intrinsische Ladungsträgerdichte von $n_i = 5,84 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ gemessen. Die effektiven Massen seien $m_{\text{eff,e}} = 0,36 m_e$ (Elektronen) und $m_{\text{eff,h}} = 0,81 m_e$ (Löcher). Bestimmen Sie die Bandlücke dieses Halbleiters bei Raumtemperatur $T = 300 \text{ K}$. [3P]

Fortsetzung auf Rückseite!

- c) In Abbildung 6 sind Lochkonzentrationen p in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

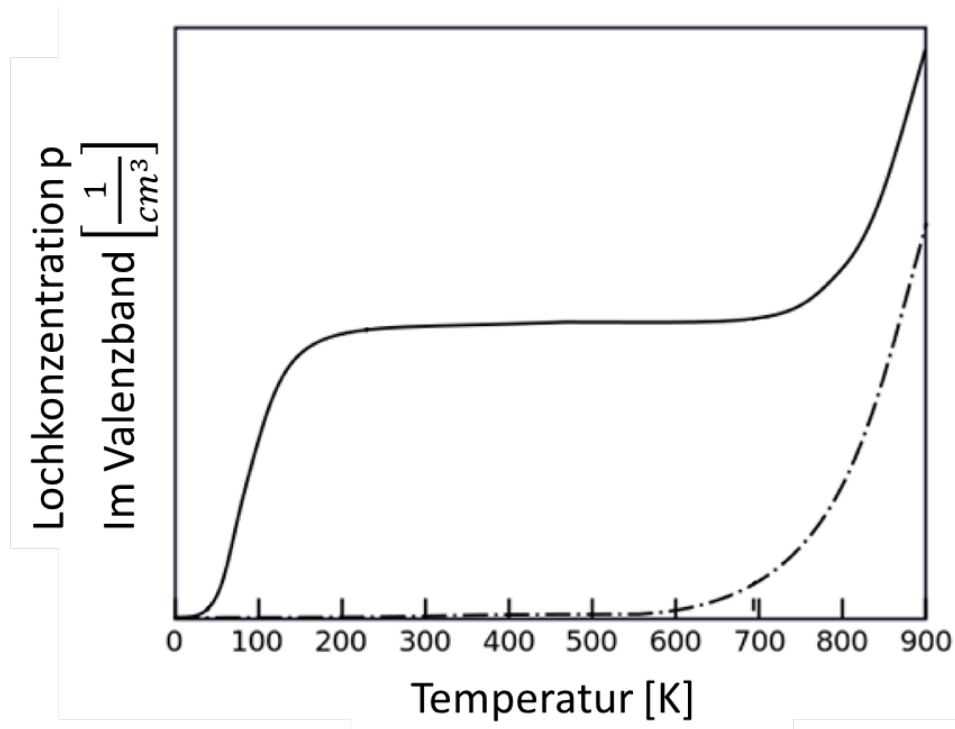


Abbildung 6: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

- d) Betrachten Sie nun einen mit Akzeptoren dotierten Germanium-Kristall mit einer Akzeptorenkonzentration von $n_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ bei einer Temperatur von 300 K . Alle Akzeptoren seien ionisiert. Bestimmen Sie die Loch- und Elektronkonzentrationen in einem solchen Kristall! Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration von Germanium sei $n_i = 2,7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. [1,5P]
- e) Berechnen Sie die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters! Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_p = 10^3 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$ und $\mu_e = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$. [1P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Name:

Matrikel-Nr.:

6. Dotierte Halbleiter unter konstanter Beleuchtung [8P]

- a) Wird ein Halbleiter mit Licht geeigneter Wellenlänge bestrahlt, so kommt es durch Absorption von Photonen zur Generation von Elektronen-Loch-Paaren. Die zeitliche und räumliche Entwicklung der Ladungsträgerkonzentrationen n und p unter dem Einfluss von Ladungsträgergeneration, -drift, -diffusion und -rekombination wird mit der Kontinuitätsgleichung beschrieben. Geben Sie die eindimensionale Kontinuitätsgleichung für Löcher an! [0,5P]
- b) Wie vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung, wenn keinerlei Gefälle in den Ladungsträgerdichten im gesamten Halbleiter vorliegen und gleichzeitig kein äußeres elektrisches Feld anliegt? [0,5P]
- c) Ein stark n-dotierter Halbleiter werde nun bei Raumtemperatur konstant beleuchtet, sodass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und für die Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ kann $\Delta p \ll n_D$ angenommen werden, wobei n_D die Donatorenkonzentration darstellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit von g_L und τ_p . Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p(t)$ im zeitlichen Verlauf! [5P]
- d) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit der Donatordichte $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in c) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p mit und ohne Beleuchtung. (Es gelte: $n_i = 1,5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$) [2P]

Name:

Matrikel-Nr.:

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit $\rightarrow$ Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt $\rightarrow$ Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut