Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
Klausur
13. März 2020

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

E-Mail-Adresse: ....

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	8,5	8	9	9,5	8	50

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 50, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 25.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. **Optik [7P]**
   Teil 1: Brechung und Reflexion

   a) Berechnen Sie den Totalreflexionswinkel eines sich in Luft befindlichen Prismas mit $n_{Prisma} = 1{,}581$ [1P].

   Die Formel für die Totalreflexion lautet:

   $$\vartheta_{tot} = \arcsin \frac{n_{Luft}}{n_{Prisma}} = \arcsin \frac{1}{1{,}581} = 39{,}24° \tag{1}$$

   b) Nennen Sie eine Anwendung bei der Totalreflexion zum Einsatz kommt. [0,5 P]

   Z.B.: Lichtleiter, Prismenstab, ...

   c) Gegeben sei ein Prisma mit zwei 45° Winkel und einem Brechungsindex von $n_{Prisma} = 1{,}581$, das sich in Luft befindet. Vervollständigen Sie für die gegebenen Strahlen in Abb. 1 und Abb. 2 die Strahlengänge bis zum Austritt der Strahlen aus dem Prisma. Verwenden Sie die Totalreflexion als Kriterium, ob ein Strahl aus dem Prisma auskoppelt. Begründen Sie ihr Vorgehen bei jeder Reflexion / Brechung rechnerisch und geben Sie abschließend den Austrittswinkel im Bezug zum Lot der Austrittsfläche an. [3 P]

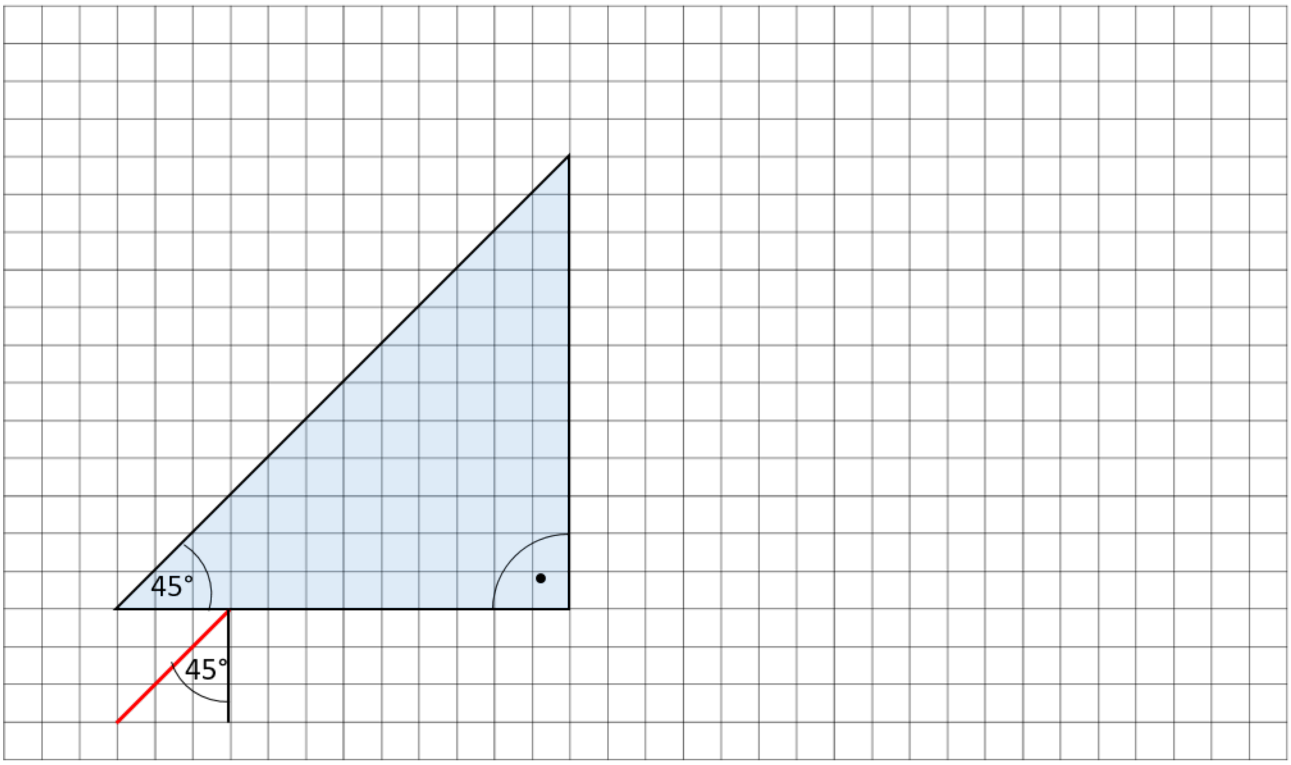


Abbildung 1: Strahlengang 1: Der Strahl trifft unter einem Winkel von $\vartheta_0 = 45°$ auf das Prisma.

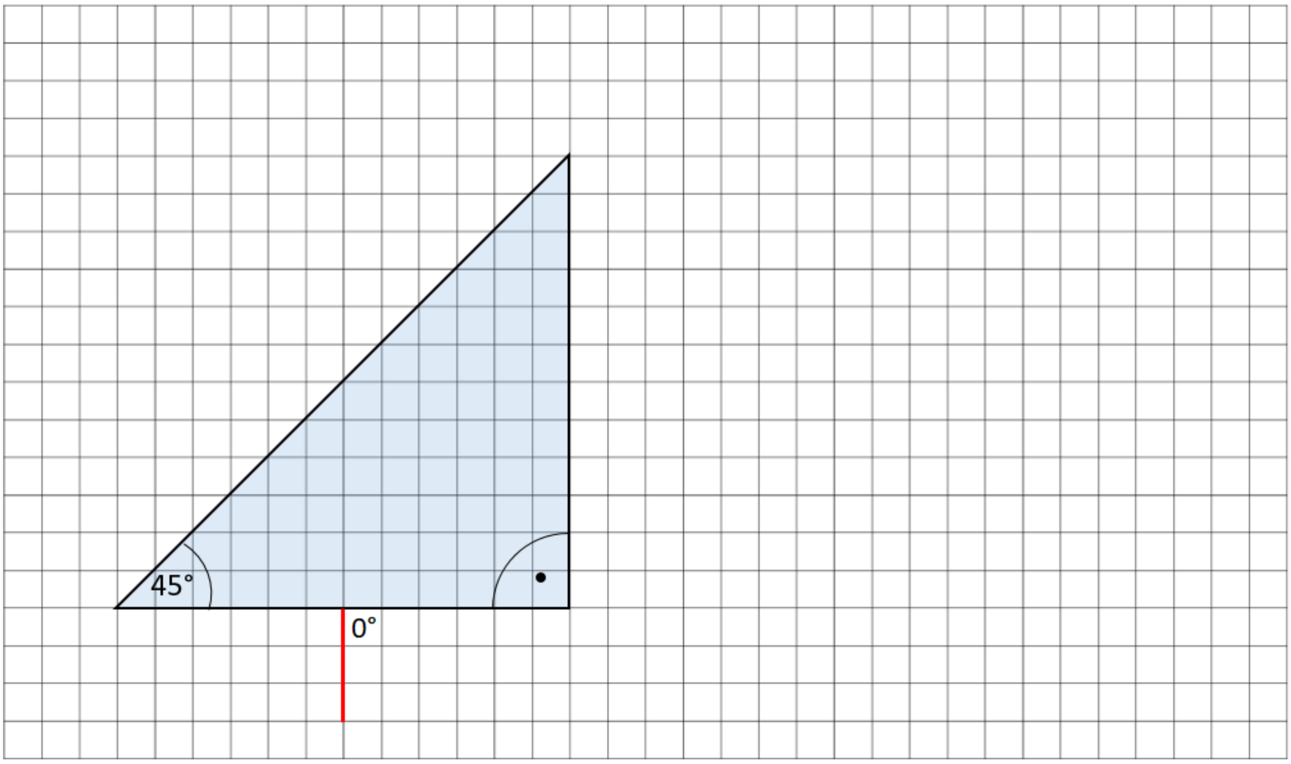


Abbildung 2: Strahlengang 2: Der Strahl trifft unter einem Winkel von $\vartheta_0 = 0°$ auf das Prisma.

Der Totalreflexionswinkel kann Aufgabenteil a) entnommen werden.
Strahlengang 1: Berechnung von ϑ_1:

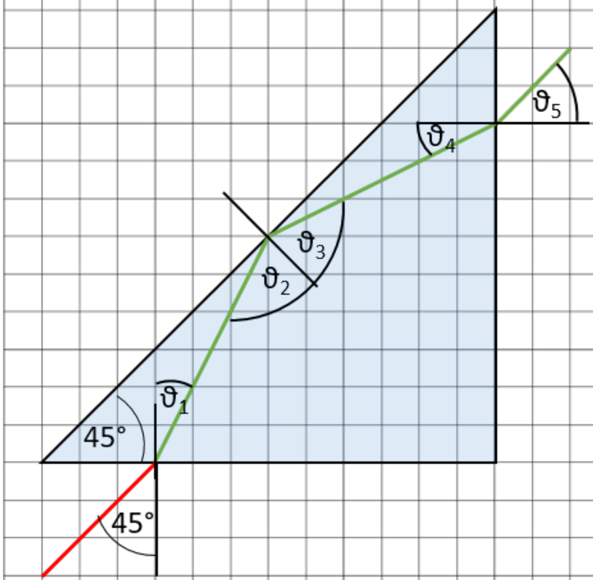
$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \arcsin\left(\sin(\vartheta_0)\,\frac{n_L}{n_P}\right)\\
\vartheta_1 &= \arcsin\left(\sin(45°)\,\frac{1}{1{,}581}\right)\\
\vartheta_1 &= 26{,}57°
\end{aligned} \tag{2}$$

Berechnung von ϑ_2 (geometrisch) und ϑ_3 (Totalreflexion):

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 &= 45° + \vartheta_1\\
\vartheta_2 &= 71{,}57°\\
\vartheta_3 &= \vartheta_2,\ \text{da } \vartheta_2 > \vartheta_{tot}
\end{aligned} \tag{3}$$

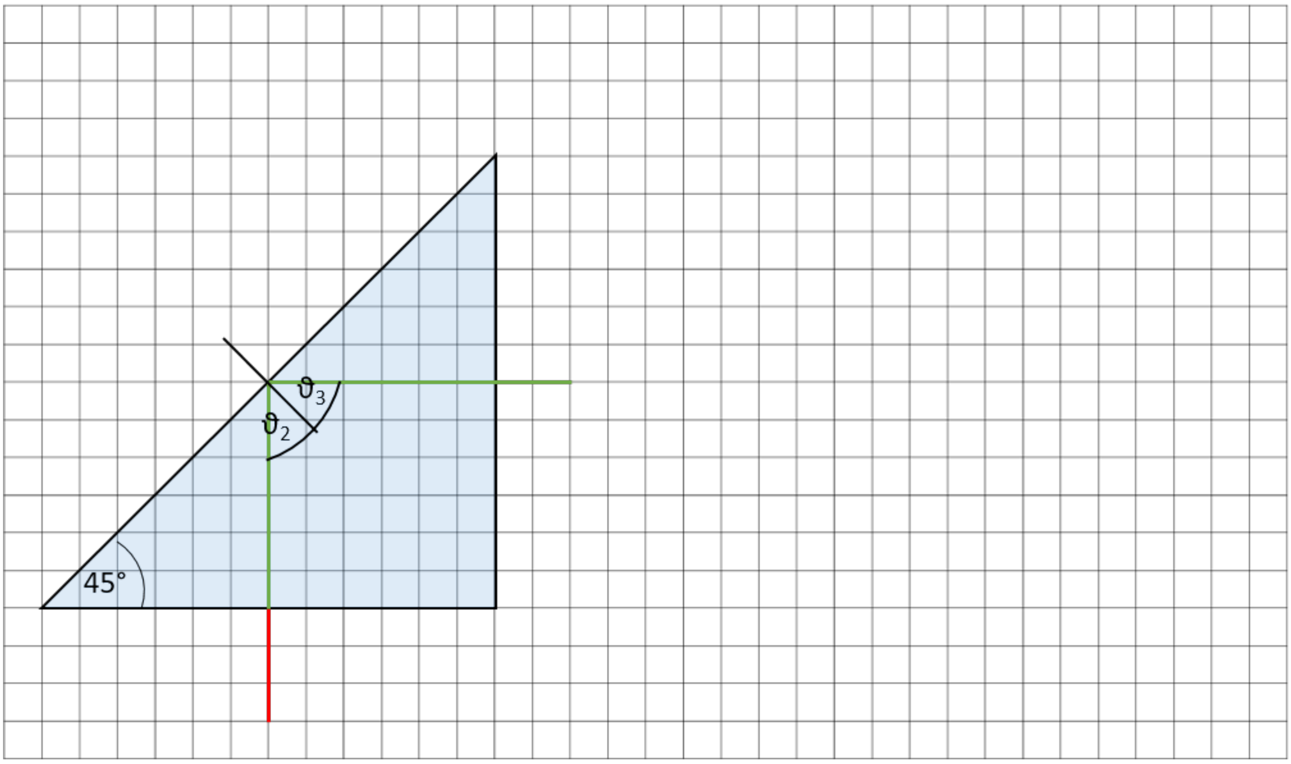
Berechnung von ϑ_4 (geometrisch) und ϑ_5 (Snellius), bzw. Begründung über Symmetrie zu ϑ_1 und ϑ_0

$$\begin{aligned}
\vartheta_4 &= \vartheta_3 - 45°\\
\vartheta_4 &= 26{,}57°\\
\vartheta_5 &= \arcsin\left(\sin(\vartheta_4)\,\frac{n_P}{n_L}\right) = 45°
\end{aligned} \tag{4}$$



Strahlengang 2: Keine Brechung bei geradlinigem Übergang, dann Totalreflexion. Der Austrittswinkel ist $\vartheta_4 = 0°$:

$$\vartheta_1 = 0°$$
$$\vartheta_2 = 45°, \text{ da } \vartheta_2 > \vartheta_{tot} \tag{5}$$
$$\vartheta_3 = 45°$$



Teil 2: Geometrische Optik

d) Gegeben sei eine bikonkave Linse, für die gilt $|r_1| = 2 \cdot |r_2|$. Der Radius r_1 ist einem Gegenstand zugewandt. Berechnen Sie die Radien der Linse, wenn die Brennweite $|f| = 50$ mm betragen soll und die Linse aus Flintglas mit einem Brechungsindex von $n_{Linse} = 1{,}75$ gefertigt ist. Die Linse befindet sich in Luft. [1,5 P]

Es gilt, $n_{Medium} = n_{Luft} = 1$. Die Radien der Linse betragen $r_1 = -r$ und $r_2 = r/2$ mit $r > 0$. Da es sich um eine Zerstreuungslinse handelt ist $f = -50$ mm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} &= \frac{n_{Linse} - n_{Medium}}{n_{Medium}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\
\frac{1}{-50mm} &= \frac{1{,}75 - 1}{1} \left(\frac{1}{-r} - \frac{2}{r} \right) \\
\frac{1}{-50mm} &= 0{,}75 \left(-\frac{3}{r} \right) \\
r &= 112{,}5mm \\
r_1 &= -112{,}5mm \\
r_2 &= 56{,}25mm
\end{aligned} \tag{6}$$

e) Berechnen sie die Bildweite eines Gegenstandes der sich 75 mm links der in d) gegebenen Linse befindet. [1 P]

Es gilt, $n_{Medium} = n_{Luft} = 1$. Da es sich um eine Zerstreuungslinse handelt ist

$f = -50\ mm$

$$\begin{aligned} \frac{f_B}{b} + \frac{f_G}{g} &= 1 \text{ , setze } f_G = -f_B \\ \frac{1}{b} &= \frac{1}{f_B} + \frac{1}{g} \\ b &= \frac{g f_B}{f_B + g} = \frac{-75mm * (-50mm)}{-75mm - 50mm} = -30mm \end{aligned} \tag{7}$$

2. **Grundlagen der Festkörperelektronik [8,5P]**

a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. [1P]

$$\underbrace{\hat{H}}_{\text{Operator Gesamtenergie}} \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

oder

$$\left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{Operator kinetische Energie}} + \underbrace{V(x)}_{\text{Operator potentielle Energie}} \right) \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

b) Kann die Wellenfunktion eines Teilchens gemessen werden? Wie hängt die Wellenfunktion mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zusammen? [1P]

Nein, denn die Wellenfunktion ist nicht direkt beobachtbar. Beobachtet werden kann nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, also das Betragsquadrat der Wellenfunktion.

c) Gegeben seien zwei Lösungen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Zeigen Sie, dass gemäß dem Superpositionsprinzip auch die Wellenfunktion $\psi_3(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung löst! [1P]

Gemäß der Aufgabenstellung lösen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung. Es gilt also:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_1(x,t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x,t)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi_2(x,t)=j\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(x,t)$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)(\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t))=j\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t))$$

Mithilfe der Definition von $\psi_3(x,t)=\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)$ erhalten wir:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi_3(x,t)=j\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_3(x,t)$$

Wir haben somit gezeigt, dass auch $\psi_3(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung löst.

d) Ein dünner Halbleiter wird mit monochromatischer Strahlung bestrahlt. Bei Wellenlängen λ oberhalb von 1,85 μm wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke des Halbleiters? [1P]

Die Bandlücke W_g des Halbleiters lässt sich mithilfe der Energie der eingestrahlten Photonen bei der angegebenen Grenzwellenlänge $\lambda = 1.85\,\mu m$ abschätzen:

$$W_g = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js\,3\cdot 10^8\frac{m}{s}}{1{,}85\,\mu m} = 1{,}0751\cdot 10^{-19}\,J = 0{,}672\,eV$$

e) Was besagt das Pauli-Prinzip? [1P]
Das Pauli-Prinzip besagt, dass Fermionen (z.B. Elektronen) nicht den gleichen Quantenzustand besetzen dürfen.

f) Ein Elektron und ein Proton haben jeweils eine kinetische Energie von 150 keV. Berechnen Sie jeweils die de-Broglie-Wellenlänge. Gehen Sie dabei von nichtrelativistischen Teilchen aus! [1,5P]

Nach de-Broglie ergibt sich die Wellenlänge zu:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Die kinetische Energie im nichtrelativistischen Fall ist $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ und damit ergibt sich:

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p W_{kin}}} = 7{,}4\cdot 10^{-14}\ m$$

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e W_{kin}}} = 3{,}2\cdot 10^{-12}\ m$$

g) Gehen Sie davon aus, dass der Impuls eines Elektrons genau bestimmt ist. Was lässt sich dann über den Ort des Elektrons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation folgt $\Delta x \to \infty$. Der Ort ist also komplett unbestimmt.

h) Was bezeichnet man als „effektive Masse" eines Ladungsträgers in einem Kristall? Geben Sie zusätzlich zu Ihrer Erläuterung auch den Zusammenhang der effektiven Masse mit der Dispersionsrelation $W(k)$ an. [1P]

Sie bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.
Zusammenhang mit Dispersionsrelation: $m^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2}\right]^{-1}$

3. **Potentialbarriere [8P]**

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \text{ (Bereich I)} \\ V_0 & \text{für } x < 0 \text{ (Bereich II)} \end{cases}$$

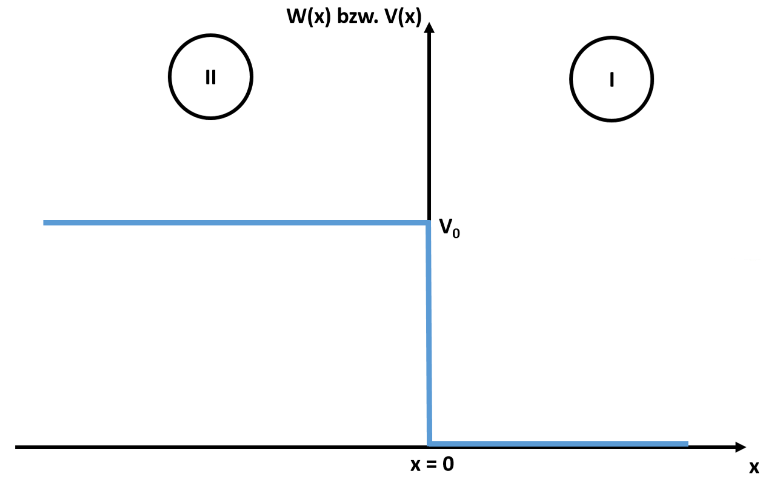
mit $V_0 > 0$. Von $x = +\infty$ kommend laufe eine ebene Welle mit der Energie $W < V_0$ ein. Für die Welle kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\text{Bereich I: } \psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{-jk_{\mathrm{I}}x} + re^{jk_{\mathrm{I}}x}$$

$$\text{Bereich II: } \psi_{\mathrm{II}}(x) = te^{-jk_{\mathrm{II}}x}$$

Demnach hat der einlaufende Anteil der Welle die Amplitude 1. Entsprechend bezeichnet r die Reflexions- und t die Transmissionsamplitude.

a) Skizzieren Sie das Potential und achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung! [0,5P]



b) Beschreiben Sie stichwortartig das Verhalten an der Stelle $x = 0$, wenn man die Welle entweder als (i) klassisches Teilchen oder als (ii) quantenmechanisches Teilchen interpretiert! [1P]

(i) Das klassische Teilchen wird vollständig an der Barriere reflektiert und kann in diese nicht eindringen.
(ii) Das quantenmechanische Teilchen wird ebenfalls reflektiert, kann dabei allerdings mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in die Barriere eindringen (Aufenthaltswahrscheinlichkeit nimmt exponentiell mit Eindringtiefe ab).

c) Geben Sie die Wellenzahlen in den Bereichen I und II in Abhängigkeit von V_0 und W an! [1P]

Bereich I: $k_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mW}$
Bereich II: $k_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\,(W - V_0)} = j\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\,(V_0 - W)} =: j\kappa_{\mathrm{II}}$

d) Berechnen Sie mithilfe der Stetigkeitsbedingungen die Reflexions- und Transmissionsamplituden in Abhängigkeit der Wellenzahlen! [2P]

Stetigkeit der Welle in $x = 0$ liefert die Randbedingungen:

$$\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0)$$

$$\psi_{\mathrm{I}}'(0) = \psi_{\mathrm{II}}'(0)$$

Somit ergibt sich:

$$1 + r = t$$

$$-jk_{\mathrm{I}} + jk_{\mathrm{I}}r = -jk_{\mathrm{II}}t$$

Schließlich folgt:

$$r = \frac{k_{\mathrm{I}} - k_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{I}} + k_{\mathrm{II}}}$$

$$t = \frac{2k_\mathrm{I}}{k_\mathrm{I} + k_\mathrm{II}}$$

e) In der Übung wurde gezeigt, dass der Term $\frac{\hbar}{j2m}\left(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right)$ als eine Teilchenstromdichte $\vec{J}$ interpretiert werden kann. Berechnen Sie diese für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I in Abhängigkeit von W! [1P]

Für den einlaufenden Anteil der Welle in Bereich I gilt:

$$\psi(x) = e^{-jk_\mathrm{I}x}$$

Somit ergibt sich:

$$J = \frac{\hbar}{j2m}\left(\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\psi\right)$$

$$J = \frac{\hbar}{j2m}\left(e^{jk_\mathrm{I}x}\left(-jk_\mathrm{I}e^{-jk_\mathrm{I}x}\right) - \left(jk_\mathrm{I}e^{jk_\mathrm{I}x}\right)e^{-jk_\mathrm{I}x}\right)$$

$$\frac{\hbar}{j2m}\left(-jk_\mathrm{I} - jk_\mathrm{I}\right) = -\frac{\hbar k_\mathrm{I}}{m} = -\frac{\sqrt{2mW}}{m}$$

f) Es sei $V_0 = 1{,}0\,\mathrm{eV}$. Betrachten Sie ein Elektron mit der Energie $W = 0{,}9\,\mathrm{eV}$! Für die Masse des Elektrons können Sie die freie Elektronenmasse annehmen. Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{P_1}{P_\mathrm{Rest}}$, wobei P_1 die Wahrscheinlichkeit ist, mit der das Elektron im ersten Angström der Barriere anzutreffen ist! P_Rest ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das Elektron im Rest der Barriere anzutreffen ist. Das Ergebnis ist als Zahlenwert anzugeben! (Hinweis: Integrieren Sie geeignet über das Betragsquadrat der Wellenfunktion!) [2,5P]

Laut Aufgabenstellung sind für den Bereich II Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, da wir uns in der Barriere befinden. Die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen des Elektrons im ersten Angström der Barriere ergibt sich mit $x_0 = -1\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ *zu:*

$$P_1 = \int_{x_0}^{0} |\psi_\mathrm{II}(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{0} |t|^2 e^{-2jk_\mathrm{II}x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{0} |t|^2 e^{2\kappa_\mathrm{II}x}\mathrm{d}x = \frac{|t|^2}{2\kappa_\mathrm{II}}\left(1 - e^{2\kappa_\mathrm{II}x_0}\right)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen des Elektrons im Rest der Barriere ergibt sich analog zu:

$$P_\mathrm{Rest} = \int_{-\infty}^{x_0} |\psi_\mathrm{II}(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_0} |t|^2 e^{-2jk_\mathrm{II}x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x_0} |t|^2 e^{2\kappa_\mathrm{II}x}\mathrm{d}x = \frac{|t|^2}{2\kappa_\mathrm{II}}\left(e^{2\kappa_\mathrm{II}x_0}\right)$$

Daraus ergibt sich mit $x_0 = -1\cdot 10^{-10}\mathrm{m}$ *das folgende Verhältnis:*

$$\frac{P_1}{P_\mathrm{Rest}} = \frac{1 - e^{2\kappa_\mathrm{II}x_0}}{e^{2\kappa_\mathrm{II}x_0}} = e^{-2\kappa_\mathrm{II}x_0} - 1 = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-W)}x_0} - 1 \approx 0{,}38$$

4. **Kristalle [9P]**

a) Wie viele Atome befinden sich in der Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc) Kristallgitters mit zweiatomiger Basis? Zeichnen Sie die Gitterpunkte inklusive Basis eines solchen Kristallgitters in die vorgegebene Zeichnung ein! Die Basis besteht aus zwei Atomen an den Stellen $\{(0{,}0{,}0), (\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a)\}$. [1,5P]

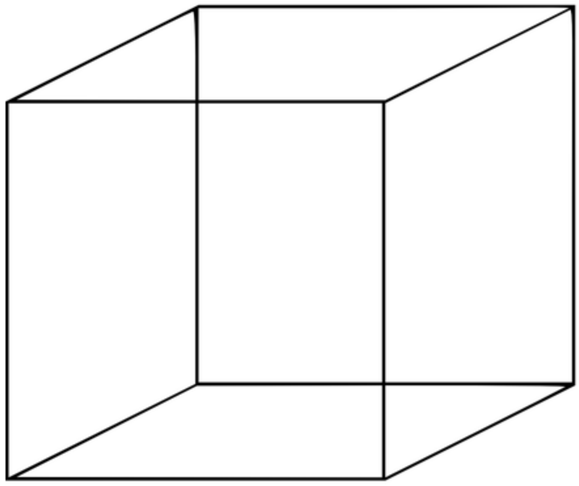


Abbildung 3: Vorlage für fcc-Gitter

*Anzahl Atome =8*1/8+6*1/2+4 =8*

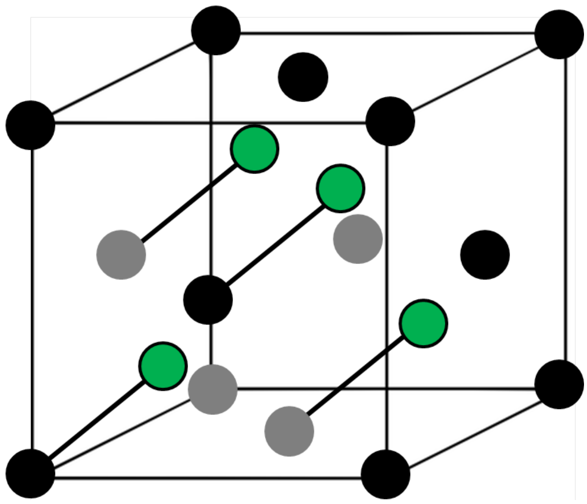


Abbildung 4: fcc-Gitter

b) Wir betrachten einen Halbleiter entsprechend Aufgabe a), der in einem fcc-Gitter (mit Gitterkonstante a) mit zweiatomiger Basis kristallisiert. Er hat eine Dichte von $\rho = 2{,}336\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und eine molare Masse von $M = 28{,}09\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Berechnen Sie die

Gitterkonstante a! [1P]

Mit einer zweiatomigen Basis beträgt die Gitterkonstante a:

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot M \cdot \frac{1}{N_A}}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 28{,}09 \frac{g}{mol} \cdot \frac{1}{6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}}{2{,}336 \frac{g}{cm^3}}} \approx 5{,}43 \cdot 10^{-8} cm = 0{,}543 nm$$

Das Leitungsband des Halbleiters lässt sich im k-Raum im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ- und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = \Delta W(2{,}5 - \cos(ka))$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2\Delta W(1 - 1{,}19 \cos(ka))$ beschrieben. ΔW sei 1 eV.

c) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in das Diagramm! [1P]

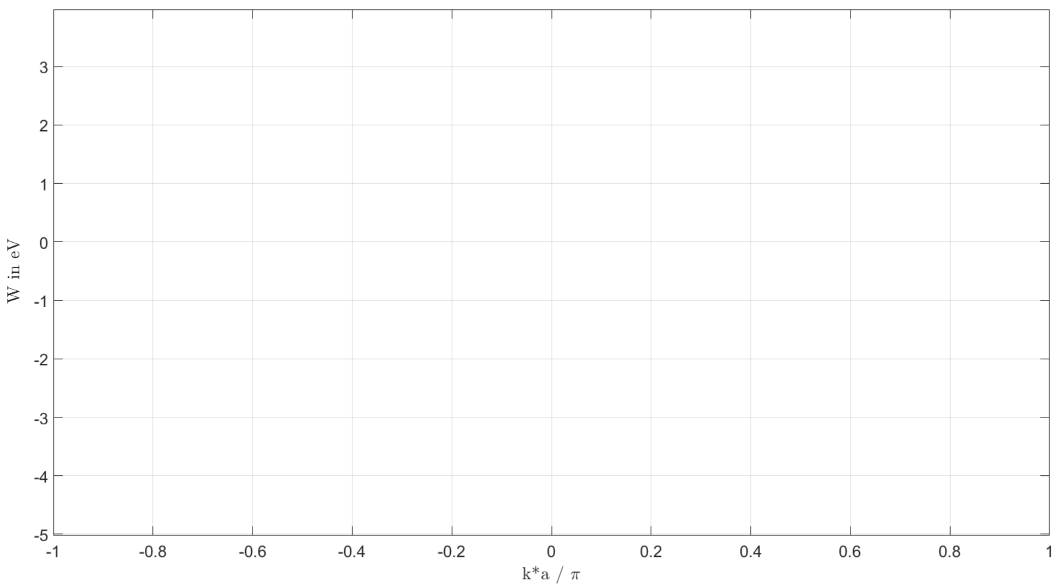


Abbildung 5: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

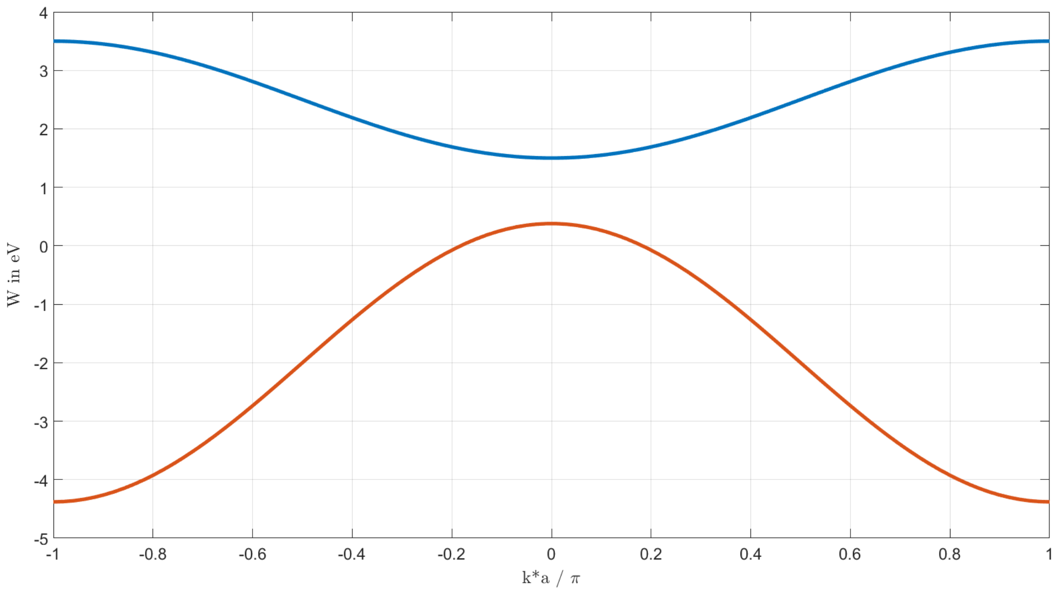


Abbildung 6: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

d) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Begründen Sie! [1P]

Es handelt sich um einen direkten Halbleiter. Minimum des Leitungsbandes und Maximum des Valenzbandes liegen beim selben k-Wert.

e) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1,5P]

Leitungsbandkante bei $k = 0$:

$$\begin{aligned} W_{LBK} &= W_L(0) = \Delta W(2{,}5 - \cos(0)) \\ &= \Delta W(2{,}5 - 1) = 1{,}5\Delta W(= 1{,}5eV) \end{aligned}$$

Valenzbandkante bei $k = 0$:

$$\begin{aligned} W_{VBK} &= W_V(0) = -2\Delta W(1 - 1{,}19\cos(0)) \\ &= -2\Delta W(1 - 1{,}19) = 0{,}38\Delta W(= 0{,}38eV) \end{aligned}$$

Bandlücke:

$$W_{BL} = W_{LBK} - W_{VBK} = \Delta W(1{,}5 - 0{,}38) = 1{,}12eV$$

f) Bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_g und die effektive Masse m_{eff} eines Elektrons im Leitungsband in Abhängigkeit von a und ΔW! Bestimmen Sie dazu zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_L(k)}{\partial k}$ und $\frac{\partial^2 W_L(k)}{\partial k^2}$! [2P]

$$\begin{aligned} W_L(k) &= \Delta W(2{,}5 - \cos(ka)) \\ \frac{\partial W}{\partial k} &= a\Delta W \sin(ka) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= a^2 \Delta W \cos(ka) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial W}{\partial k} &= \frac{a\Delta W}{\hbar}\sin(ka) \\ (m_{\text{eff}})^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= \frac{a^2\Delta W}{\hbar^2}\cos(ka) \end{aligned}$$

g) Beschreiben Sie knapp und qualitativ, wie sich ein angelegtes elektrisches Feld (d.h. eine konstante Kraft) auf das Verhalten des in Teilaufgabe f) beschriebenen Elektrons auswirkt! Wird dieses Verhalten typischerweise bei Raumtemperatur beobachtet? Begründen Sie ihre Antwort! [1P]

Geschwindigkeit und Ort des Elektrons oszillieren zeitlich (Blochoszillationen). Die Streuzeit des Elektrons im Kristall ist bei Raumtemperatur viel kürzer als die Periode der Blochoszillation. Daher wird ein gerichteter Strom aber nicht die Blochoszillation gemessen.

5. **Intrinsische und dotierte Halbleiter [9,5P]**

a) Gegeben sei ein intrinsischer **dreidimensionaler** Halbleiter in parabolischer Näherung mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 7: [1,5P]

- Energieabhängige Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$

- Energieabhängige Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$

- Energieabhängige Ladungsträgerdichte $\tilde{n}(W)$ und $\tilde{p}(W)$

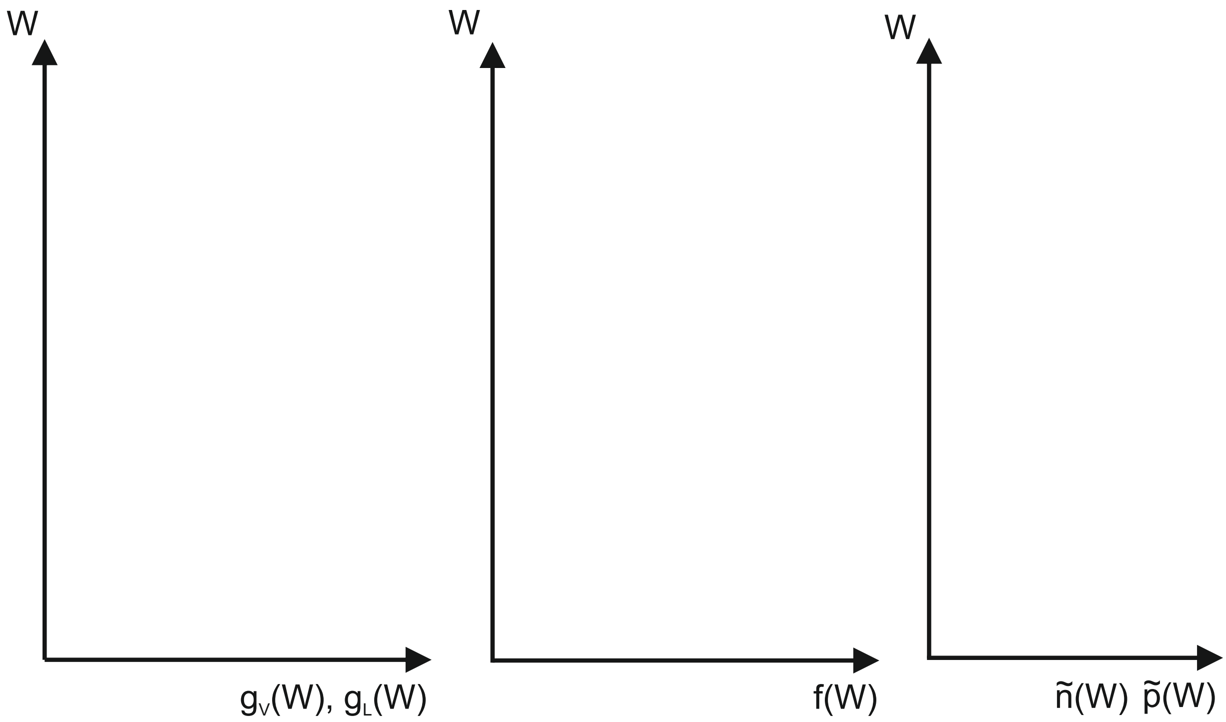


Abbildung 7: Koordinatensysteme für Schaubilder

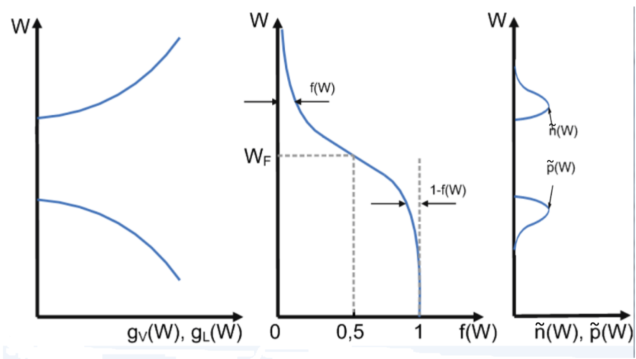


Abbildung 8: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

b) In einem Halbleiter wird eine intrinsische Ladungsträgerdichte von $n_\mathrm{i} = 5{,}84 \cdot 10^9\,\mathrm{cm}^{-3}$ gemessen. Die effektiven Massen seien $m_\mathrm{eff,e} = 0{,}36\,m_\mathrm{e}$ (Elektronen) und $m_\mathrm{eff,h} = 0{,}81\,m_\mathrm{e}$ (Löcher). Bestimmen Sie die Bandlücke dieses Halbleiters bei Raumtemperatur $T = 300\,\mathrm{K}$. [3P]

Das Massenwirkungsgesetz lautet:

$$n \cdot p = N_\mathrm{eff}^V N_\mathrm{eff}^L \cdot e^{-\frac{W_\mathrm{L}-W_\mathrm{V}}{k_\mathrm{B}T}}$$

Für einen intrinsischen Halbleiter wie Silizium mit n=p gilt bei T=300 K:

$$
\begin{aligned}
n_\mathrm{i} = \sqrt{np} &= \sqrt{N_\mathrm{eff}^V N_\mathrm{eff}^L} \cdot e^{-\frac{W_\mathrm{L}^n - W_\mathrm{V}^n}{2k_\mathrm{B}T}} \\
&= \left(m_\mathrm{e}^* m_\mathrm{p}^*\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_\mathrm{g}}{2k_\mathrm{B}T}}
\end{aligned}
$$

Umstellen und Logarithmieren liefert:

$$
W_\mathrm{g} = -2k_\mathrm{B}T \ln\left(\frac{n_\mathrm{i}}{\left(m_\mathrm{e}^* m_\mathrm{p}^*\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 1.1 \text{ eV}
$$

c) In Abbildung 9 sind Lochkonzentrationen p in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

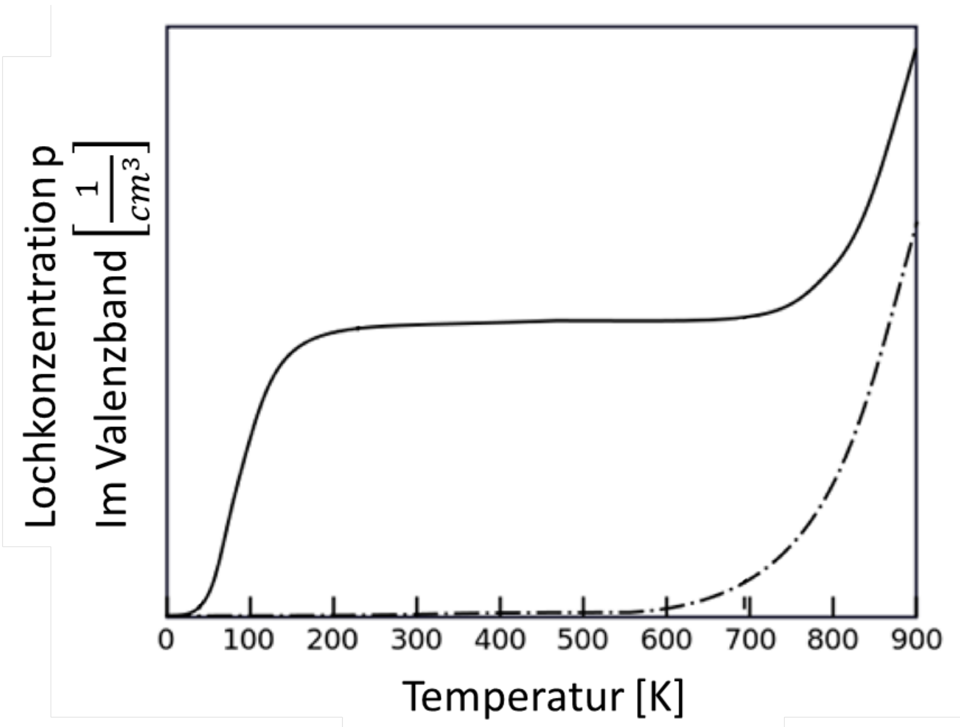


Abbildung 9: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

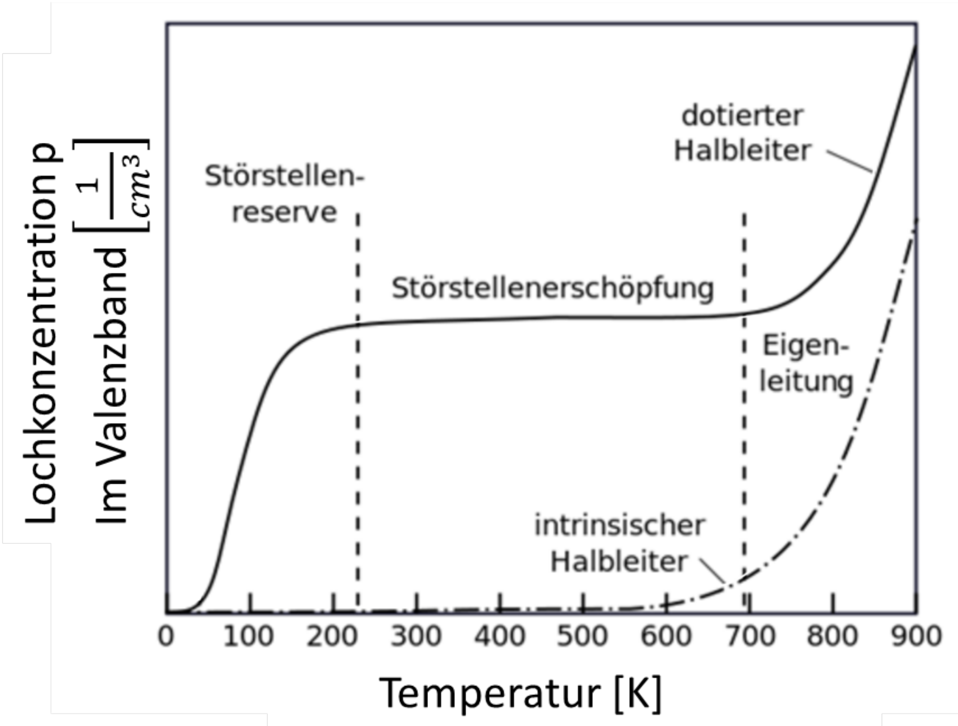


Abbildung 10

d) Betrachten Sie nun einen mit Akzeptoren dotierten Germanium-Kristall mit einer Akzeptorenkonzentration von $n_A = 10^{15} cm^{-3}$ bei einer Temperatur von $300K$. Alle Akzeptoren seien ionisiert. Bestimmen Sie die Loch- und Elektronkonzentrationen in einem solchen Kristall! Die intrinsische Ladungsträgerkonzentration von Germanium sei $n_i = 2{,}7 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-3}$. [1,5P]

Aufgrund der p-Dotierung und Störstellenerschöpfung entspricht die Lochkonzentration der Akzeptorenkonzentration:

$$p = p_0 + n_A^- = p_0 + n_A \sim n_A$$

Mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes lässt sich dann die Elektronenkonzentration berechnen:

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{n_i^2}{n_A} = \frac{2{,}7^2 \cdot 10^{26}}{10^{15}} cm^{-3} = 7{,}29 \cdot 10^{11} cm^{-3}$$

e) Berechnen Sie die Leitfähigkeit des dotierten Halbleiters! Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_p = 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$ und $\mu_e = 4 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$. [1P]

$$\sigma = e\left(n\mu_\mathrm{n} + p\mu_\mathrm{p}\right)$$

Da p-dotiert kann der Beitrag der Elektronen vernachlässigt werden.

$$\sigma = ep\mu_\mathrm{p}$$

$$\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{15} \cdot 10^{3} \frac{A}{V \cdot cm} = 0{,}16 \frac{A}{V \cdot cm} = 16 \frac{A}{V \cdot m}$$

Falls der Beitrag der Elektronen nicht vernachlässigt wird, muss die Elektronenkonzentration über das Massenwirkungsgesetz berechnet werden:

$$n_i^2 = n \cdot p$$

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{2{,}7^2 \cdot 10^{26}}{10^{15}} cm^{-3} = 7{,}29 \cdot 10^{11} cm^{-3}$$

Daraus berechnet sich dann die Leitfähigkeit zu:

$$\sigma = e\left(n\mu_\mathrm{n} + p\mu_\mathrm{p}\right) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}(10^{15} \cdot 10^{3} + 7{,}29 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{3}) \frac{A}{V \cdot cm}$$

$$\sigma = 0{,}16047 \frac{A}{V \cdot cm} = 16{,}047 \frac{A}{V \cdot m}$$

Anhand dieser Rechnung wird nochmal deutlich, dass man den Beitrag der Elektronen vernachlässigen kann.

6. Dotierte Halbleiter unter konstanter Beleuchtung [8P]

a) Wird ein Halbleiter mit Licht geeigneter Wellenlänge bestrahlt, so kommt es durch Absorption von Photonen zur Generation von Elektronen-Loch-Paaren. Die zeitliche und räumliche Entwicklung der Ladungsträgerkonzentrationen n und p unter dem Einfluss von Ladungsträgergeneration, -drift, -diffusion und -rekombination wird mit der Kontinuitätsgleichung beschrieben. Geben Sie die eindimensionale Kontinuitätsgleichung für Löcher an! [0,5P]

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e}\frac{\partial j_\mathrm{p}}{\partial x} + g_\mathrm{p} - r_\mathrm{p}$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Gesamtbilanz aller Beträge aus Ladungsträgerdrift und -diffusion sowie Rekombination (r_p) und Generation (g_p) in einem Volumenelement (bzw. Linienelement im vorliegenden Fall).

b) Wie vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung, wenn keinerlei Gefälle in den Ladungsträgerdichten im gesamten Halbleiter vorliegen und gleichzeitig kein äußeres elektrisches Feld anliegt? [0,5P]

Unter diesen Umständen vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = +g_\mathrm{p} - r_\mathrm{p}$$

c) Ein stark n-dotierter Halbleiter werde nun bei Raumtemperatur konstant beleuchtet, sodass im gesamten Halbleiter Elektronen-Lochpaare homogen mit der Generationsrate g_L erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_\mathrm{p} = \Delta p/\tau_\mathrm{p}$ an. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt und für die Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ kann $\Delta p \ll n_\mathrm{D}$ angenommen werden, wobei n_D die Donatorenkonzentration darstellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Licht schlagartig abgeschaltet. Berechnen Sie unter Angabe aller nötigen Zwischenschritte den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ vor und nach dem Zeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit von g_L und τ_p. Skizzieren Sie die Dichte der Löcher $p(t)$ im zeitlichen Verlauf! [5P]

Laut Aufgabenstellung gilt für das elektrische Feld $E(x) = 0$ und $\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung lautet somit:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_\mathrm{L} - \frac{\Delta p}{\tau_\mathrm{p}}$$

Fallunterscheidung:

$t \leq 0$:

Es gilt $\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = 0$, *da konstant beleuchtet wird. Damit ergibt sich:*

$$\begin{aligned} 0 &= g_\mathrm{L} - \frac{\Delta p}{\tau_\mathrm{p}} \\ \Rightarrow \Delta p(t) &= g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p} = const. \end{aligned}$$

$t > 0$:

Ohne Beleuchtung werden keine Überschussladungsträger mehr generiert und es folgt $g_L = 0$. *Verbleibende Überschussladungsträger* Δp *rekombinieren mit Majoritätsladungsträgern und ändern sich zeitlich* ($\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \neq 0$). *Es folgt:*

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_\mathrm{p}}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich über den Ansatz

$$\Delta p(t) = Ae^{-bt}$$

sowie mit den Randbedingungen $\Delta p(0) = g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}$ *und* $\Delta p(t \to \infty) = 0$ *lösen. Damit* Δp *für* $t \to \infty$ *zu Null wird, muss es sich um eine abfallende Exponentialfunktion handeln. Aus der ersten Randbedingung ergibt sich durch Einsetzen in den Ansatz:*

$$\begin{aligned} \Delta p(t=0) &= g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p} = Ae^{-b \cdot 0} \\ \Rightarrow A &= g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p} \end{aligned}$$

Einsetzen von $\Delta p(t)$ *in die Kontinuitätsgleichung liefert:*

$$\begin{aligned} -bg_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}e^{-bt} &= -\frac{1}{\tau_\mathrm{p}}g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}e^{-bt} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{\tau_\mathrm{p}} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\Delta p(t) = g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}e^{-t/\tau_\mathrm{p}}$$

Alternativer Lösungsweg über Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} &= -\frac{\Delta p}{\tau_\mathrm{p}} \\ \int_{g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}}^{\Delta p} \frac{1}{\Delta p}\, d\Delta p &= \int_0^t -\frac{1}{\tau_\mathrm{p}}\, dt \\ \ln \Delta p - \ln g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p} &= -\frac{t}{\tau_\mathrm{p}} \\ \ln\left(\Delta p / g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}\right) &= -\frac{t}{\tau_\mathrm{p}} \\ \Delta p(t) &= g_\mathrm{L}\tau_\mathrm{p}e^{-t/\tau_\mathrm{p}} \end{aligned}$$

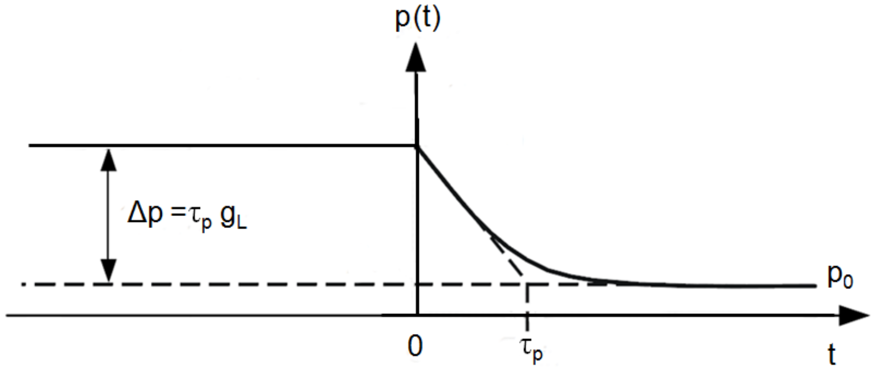


Abbildung 11: Skizze des zeitlichen Verlaufs von $p(t)$.

d) Ein n-dotiertes Stück Silizium mit der Donatorendichte $n_D = 10^{16}/\text{cm}^3$ wird bei Raumtemperatur wie in c) beleuchtet. Dadurch entstehen pro Mikrosekunde $10^{12}/\text{cm}^3$ Elektronen-Lochpaare. Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer der Ladungsträger $\tau_n = \tau_p = 2\mu\text{s}$ beträgt. Berechnen Sie die Minoritätsladungsträgerdichte p mit und ohne Beleuchtung. (Es gelte: $n_\text{i} = 1{,}5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$) [2P]

Ohne Beleuchtung:

$$p = p_0 = n_\text{i}^2/n_\text{D} = (1{,}5 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3)^2/10^{16}/\text{cm}^3 \approx 2{,}3 \cdot 10^4/\text{cm}^3$$

Mit Beleuchtung:

$$p = p_0 + \tau_\text{p} g_\text{L} = 2{,}3 \cdot 10^4/\text{cm}^3 + 2\,\mu\text{s} \cdot \frac{10^{12}/\text{cm}^3}{\mu\text{s}} \approx 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$$

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6{,}02 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3{,}0 \cdot 10^{8}$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Kreiszahl	π	$=$	$3{,}14$	
Euler'sche Zahl	e	$=$	$2{,}72$	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit	$\rightarrow$ Kilogramm	$1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenvolt	$\rightarrow$ Joule	$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

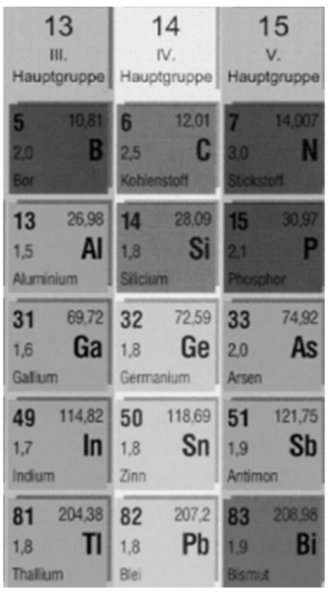
Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$
\begin{aligned}
\exp(jkx) + \exp(-jkx) &= 2\cos(kx) \\
\exp(jkx) - \exp(-jkx) &= 2j\sin(kx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int (\sin ax)^2 \; dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int (\cos ax)^2 \; dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \\
\int \sin ax \cos ax \, dx &= \frac{1}{2a}(\sin ax)^2 \\
\int x(\sin ax)^2 \; dx &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x\sin 2ax - \frac{1}{8a^2}\cos 2ax
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= 0 & \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a^2} \\
\int x^2 e^{ax} dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \; (a > 0, n = 0,1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$



13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut