

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

Prof. Dr.-Ing. Ulrike Krewer

Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

Klausur

08. April 2021

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								
Max	7	7,5	8,5	7,5	8	7	6,5	52

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 52, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 26.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift und kein Rotstift!).
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
- Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
- Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
- Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
- Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Optik [7P]

Teil 1: Brechung und Reflexion

- a) Leiten Sie die Formel der Totalreflexion aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz her und berechnen Sie den Totalreflexionswinkel eines sich in Luft befindlichen Prismas mit $n_{Prisma} = 1,75$ [1,5P].

Das Snelliussche Brechungsgesetz lautet:

$$\sin \vartheta_1 \cdot n_1 = \sin \vartheta_2 \cdot n_2 \quad (1)$$

Totalreflexion tritt beim Übergang vom optisch dickeren in das optisch dünnere Medium auf ($n_1 > n_2$). In diesem Fall existiert ein Winkel, bei dem der einfallende Strahl in die Grenzfläche gebrochen wird. Es gilt $\vartheta_2 = 90^\circ$:

$$\sin \vartheta_1 \cdot n_1 = \sin 90^\circ \cdot n_2 = n_2 \quad (2)$$

Dadurch folgt für den Totalreflexionswinkel $\vartheta_{tot} = \vartheta_1$:

$$\vartheta_{tot} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{n_{Luft}}{n_{Prisma}} = \arcsin \frac{1}{1,75} = 34,85^\circ \quad (3)$$

- b) Gegeben sei ein Prisma mit zwei 45° Winkel und einem Brechungsindex von $n_{Prisma} = 1,75$, das sich in Luft befindet. Geben Sie für die Fälle A bis F in Abbildung 1 an ob es sich hierbei um einen möglichen Strahlengang handelt oder nicht. Begründen Sie ihre Entscheidung, falls der Strahlengang fehlerhaft ist und markieren Sie die fehlerhafte Stelle. Achtung: Für eine falsch getroffene Entscheidung gibt es 0,5 Punkte Abzug innerhalb des Aufgabenteils. Keine Antwort führt auch zu keinem Abzug! [4,5P]

Die Lösung mit Begründung kann der Zeichnung entnommen werden.

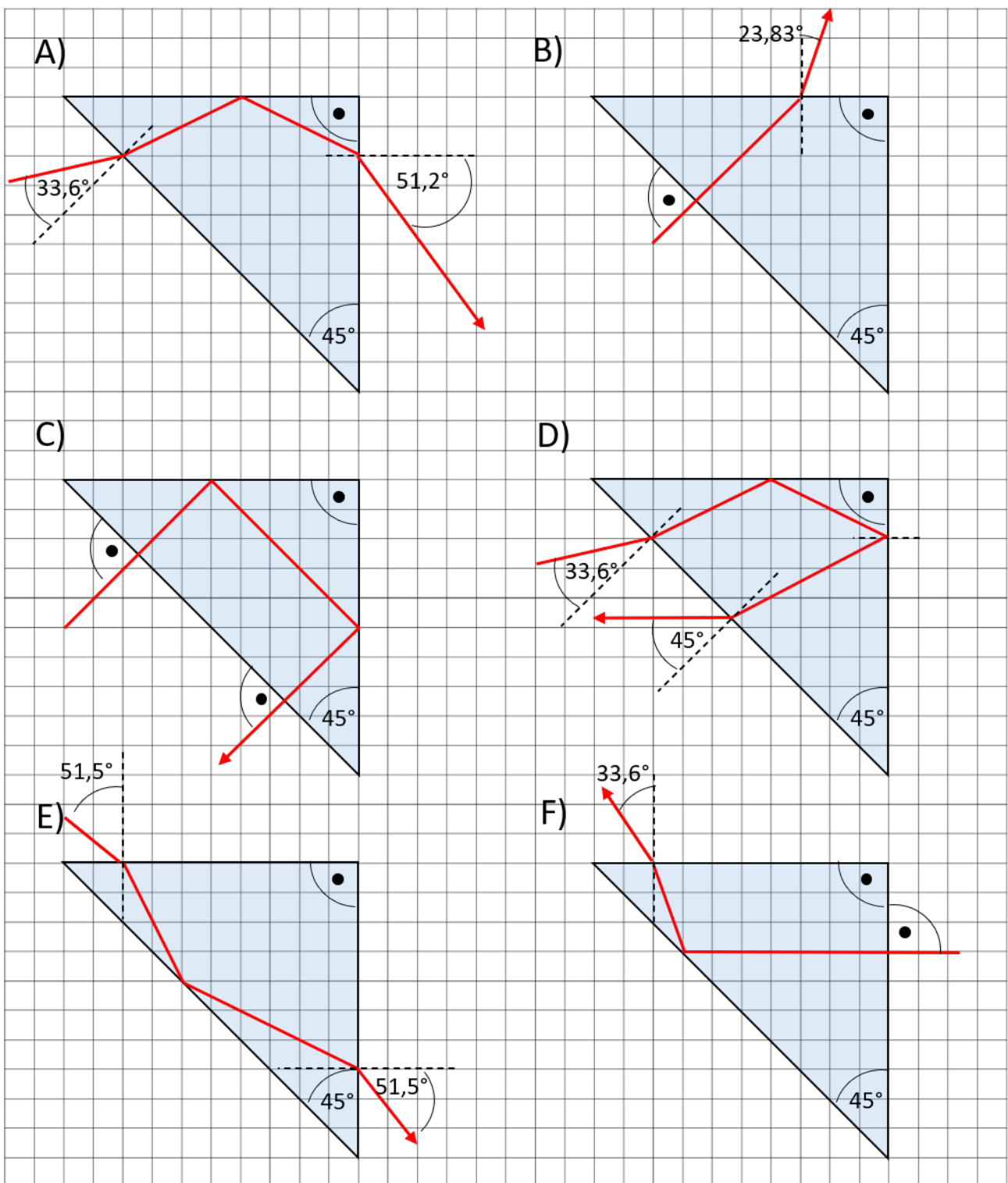
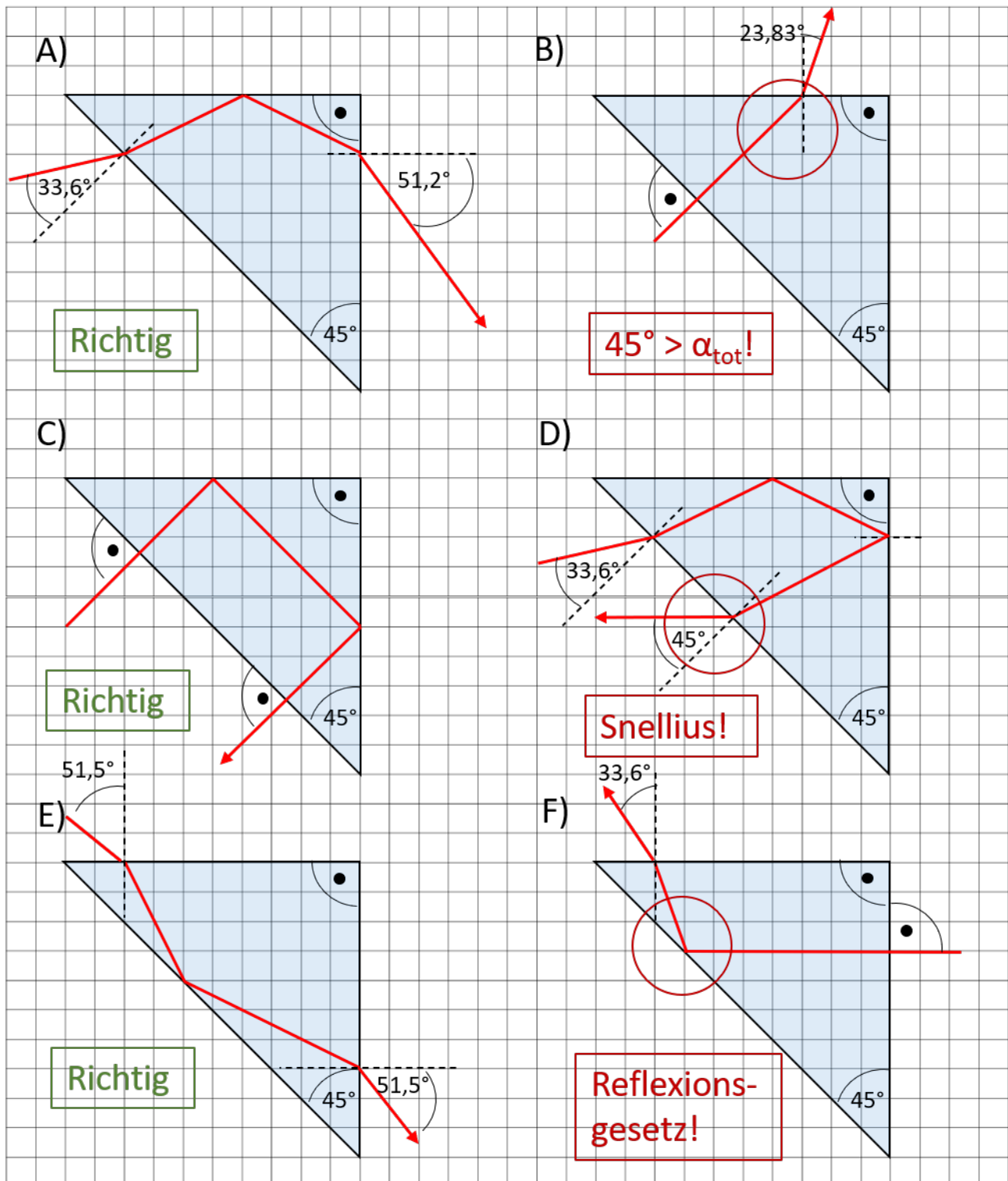


Abbildung 1: Strahlengänge A bis F unter Angabe von Ein- und Ausfallswinkel.



Teil 2: Geometrische Optik

- c) Gegeben sei eine dünne bikonkave Linse, für die gilt $|r_1| = 2 \cdot |r_2|$. Der Radius r_1 ist einem Gegenstand zugewandt. Berechnen Sie die Radien der Linse, wenn die Brennweite $|f| = 50 \text{ mm}$ betragen soll und die Linse aus Flintglas mit einem Brechungsindex von $n_{\text{Linse}} = 1,75$ gefertigt ist. Die Linse befindet sich in Luft. [1 P]

Es gilt, $n_{Medium} = n_{Luft} = 1$. Die Radien der Linse betragen $r_1 = -r$ und $r_2 = r/2$ mit $r > 0$. Da es sich um eine Zerstreuungslinse handelt ist $f = -50 \text{ mm}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{n_{Linse} - n_{Medium}}{n_{Medium}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{-50 \text{ mm}} &= \frac{1,75 - 1}{1} \left(\frac{1}{-r} - \frac{2}{r} \right) \\ \frac{1}{-50 \text{ mm}} &= 0,75 \left(-\frac{3}{r} \right) \\ r &= 112,5 \text{ mm} \\ r_1 &= -112,5 \text{ mm} \\ r_2 &= 56,25 \text{ mm}\end{aligned}\tag{4}$$

2. Grundlagen der Festkörperelektronik [7,5P]

- a) Der stationäre Zustand eines quantenmechanischen Teilchens der Masse m im Potential $V(x)$ sei durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für dieses Teilchen? Benennen Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. [1P]

$$\underbrace{\hat{H}}_{\text{Operator Gesamtenergie}} \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

oder

$$\left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{\text{Operator kinetische Energie}} + \underbrace{V(x)}_{\text{Operator potentielle Energie}} \right) \psi(x) = \underbrace{W}_{\text{Energieeigenwert}} \psi(x)$$

- b) Physikalische Messgrößen werden in der Quantenmechanik durch Operatoren $\hat{A}$ beschrieben. Wie lautet der formale Zusammenhang für den Erwartungswert $\langle A \rangle$, welcher sich bei oftmaliger Messung der Grösse A an einem quantenmechanischen System ergibt? Wie ist der Operator $\hat{p}$ definiert, welcher dem Impuls p zugeordnet wird? [1P]

Bei oftmaliger Messung einer Größe A an einem quantenmechanischen System ergibt sich als Erwartungswert:

$$\langle A \rangle = \frac{\int \psi^*(x,t) \hat{A} \psi(x,t) dx}{\int \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx}$$

Dem Impuls p wird der Operator

$$\hat{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

zugeordnet.

- c) Gegeben seien zwei Lösungen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Zeigen Sie, dass gemäß des Superpositionsprinzips auch die Wellenfunktion $\psi_3(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung löst! [1P]

Gemäß der Aufgabenstellung lösen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_1(x,t) &= j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x,t) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_2(x,t) &= j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(x,t) \end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) (\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t))$$

Mithilfe der Definition von $\psi_3(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$ erhalten wir:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_3(x,t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_3(x,t)$$

Wir haben somit gezeigt, dass auch $\psi_3(x,t)$ die zeitabhängige Schrödingergleichung löst.

- d) Ein dünner Halbleiterkristall wird mit unterschiedlichen monochromatischen Strahlungen bestrahlt. Bei Wellenlängen λ oberhalb von 370 nm wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke des Halbleiters? [1P]

Die Bandlücke W_G des Halbleiters lässt sich mithilfe der Energie der eingestrahnten Photonen bei der angegebenen Grenzwellenlänge 370 nm abschätzen:

$$W_G = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{370 \text{ nm}} = 5,38 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,36 \text{ eV}$$

- e) Geben sie jeweils den allgemeinen formellen Zusammenhang der Phasengeschwindigkeit v_P und der Gruppengeschwindigkeit v_G in Abhängigkeit des Wellenvektors k an! [1P]

$$v_P = \frac{\omega}{k}$$

$$v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

- f) Ein Elektron und ein Proton haben jeweils eine kinetische Energie von 3,3 KeV. Berechnen Sie jeweils die de-Broglie-Wellenlänge. Gehen Sie dabei von nichtrelativistischen Teilchen aus! [1,5P]

Nach de-Broglie ergibt sich die Wellenlänge zu:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Die kinetische Energie im nichtrelativistischen Fall ist $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ und damit ergibt sich:

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2m_p W_{kin}}} = 4,99 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e W_{kin}}} = 2,14 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- g) Gehen Sie davon aus, dass der Impuls eines Elektrons genau bestimmt ist. Was lässt sich dann über den Ort des Elektrons sagen? Begründen Sie Ihre Antwort! [1P]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation folgt $\Delta x \rightarrow \infty$. Der Ort ist also komplett unbestimmt.

3. Potentialtopf und stückweise stetige Potentiale [8,5P]

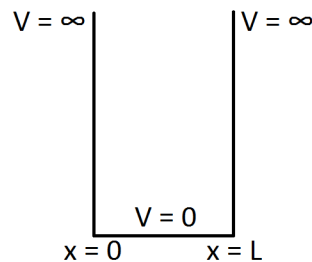


Abbildung 2: Unendlicher Potentialtopf

Gegeben sei zunächst der in Abbildung 2 dargestellte unendlich hohe 1D-Potentialtopf.

- a) Bestimmen Sie für diesen Topf die Eigenwerte der Energie für die Wellenfunktion $\psi(x) = A \cdot \sin(kx)$. Berücksichtigen sie die Randbedingungen. [2P]

1. Ableitung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \cdot \cos(kx)$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -Ak^2 \cdot \sin(kx)$$

Einsetzen in SGL liefert:

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

An den Rändern muss die Welle verschwinden:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Nicht-triviale Lösung für:

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

Lösung für:

$$W_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \frac{n^2}{L^2}$$

- b) Nennen Sie die Lösung für die Eigenwerte der Energie eines 2D unendlichen Potentialtopfs, welcher in x-Richtung eine Breite L_x und in y-Richtung eine Breite L_y aufweist! Geben Sie darüber hinaus für $L := L_x = L_y$ ein Beispiel eines entarteten Zustands an und erklären Sie, was Entartung bedeutet! [1,5P]

$$W_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} \right)$$

Beispiel für entarteten Zustand:

$$W_{1,2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1^2 + 2^2}{L^2} \right) = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{2^2 + 1^2}{L^2} \right) = W_{2,1}$$

Unter Entartung versteht man in diesem Fall, dass der Energieeigenwert $\frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ nicht mehr eindeutig einer einzigen Eigenfunktion zugeordnet werden kann.

Gegeben sei nun das Folgende, in Abbildung 3 dargestellte, stückweise stetige 1D-Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \text{ (Bereich 1)} \\ V_{\text{Step}} & a \leq x < b \text{ (Bereich 2)} \\ 2V_{\text{Step}} & b \leq x < c \text{ (Bereich 3)} \\ +\infty & x \geq c \text{ (Bereich 4)} \end{cases}$$

mit $V_{\text{step}} > 0$. Von $x = 0$ laufe die ebene Welle $\psi(x) = Ae^{+jkx}$ ein.

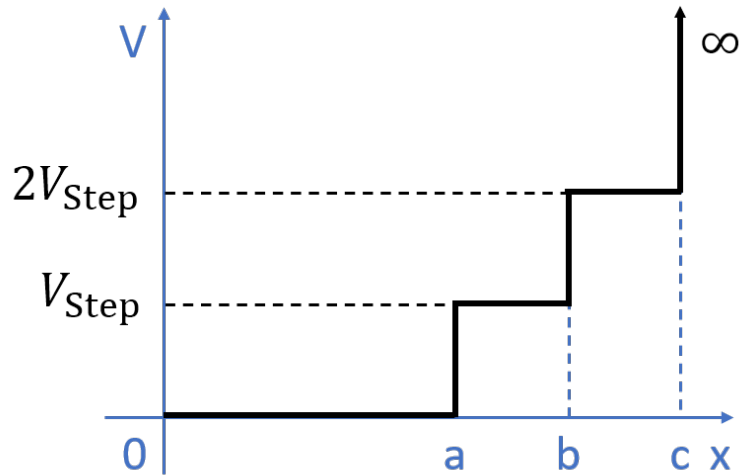


Abbildung 3: Stückweise stetiges Potential

c) Geben Sie die Randbedingungen zur Lösung des Problems an! [1P]

Randbedingungen für jeden Bereichsübergang liefern die Forderungen:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a)$$

$$\psi'_1(a) = \psi'_2(a)$$

$$\psi_2(b) = \psi_3(b)$$

$$\psi'_2(b) = \psi'_3(b)$$

$$\psi_3(c) = \psi_4(c) = 0$$

(Angabe von $' = 0$ nicht erforderlich!)

d) Geben Sie die Wellenzahl k für die Bereiche 1,2 und 3 ($0 \leq x < a$, $a \leq x < b$ und $b \leq x < c$) an! Die ebene Welle trage die Energie $W_e = \frac{3}{2}V_{\text{step}}$. In welchen Bereichen kann die Welle propagieren und in welchen wird sie gedämpft? (Hinweis: Ansatz der ebenen Welle in Schrödingergleichung einsetzen) [2P]

$$0 \leq x < a: k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{3mV_{\text{step}}}{\hbar^2}}$$

$$a \leq x < b: k_2 = \sqrt{\frac{2m(W-V_{\text{step}})}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{mV_{\text{step}}}{\hbar^2}}$$

$$b \leq x < c: k_3 = j\sqrt{\frac{2m(2V_{\text{step}}-W)}{\hbar^2}} = j\sqrt{\frac{mV_{\text{step}}}{\hbar^2}}, \text{ für } V_{\text{step}} < W_e < 2V_{\text{step}}$$

Die Welle kann in den Bereichen $0 \leq x < a$ und $a \leq x < b$ propagieren und wird im Bereich $b \leq x < c$ gedämpft (imaginärer Wellenvektor).

- e) Beschreiben Sie qualitativ das Verhalten eines von $x = 0$ einlaufenden Elektrons der Energie $W_e = \frac{3}{2}V_{\text{step}}$ für $0 \leq x < a$ und $a \leq x < b$! Beschreiben und vergleichen sie das Verhalten als quantenmechanisches und als klassisches Teilchen in den gleichen Bereichen! [1,5P]

Quantenmechanisch:

$0 \leq x < a$: Welle breitet sich ungestört aus

$a \leq x < b$: Welle kann mit gewisser Wahrscheinlichkeit in der Barriere mit verringerter Energie weiter propagieren und/oder anteilig reflektiert werden

Klassisch:

$0 \leq x < a$: Teilchen bewegt sich ungestört fort

$a \leq x < b$: Die zur Überwindung der Stufe benötigte Energie liegt nach der Barriere in Form von potentieller Energie vor und das Teilchen bewegt sich mit verringerter Energie fort

- f) Geben Sie die Wellenfunktion im Bereich $x \geq c$ an! [0,5P]

Im Bereich $x \geq c$ kann die Welle aufgrund des unendlichen Potentials nicht existieren. Es gilt: $\psi_4(x) = 0$.

4. Fermi-Dirac und Zustandsdichten [7,5P]

- a) Geben Sie die Formel der Fermi-Dirac-Verteilung in Abhängigkeit der Energie W und der Temperatur T an. Was gibt die Fermi-Dirac Verteilung an und was beschreibt die Fermi-Energie? [1P]

Die Fermi-Dirac-Verteilung ist durch die folgende Formel $f(W, T)$ gegeben:

$$f(W, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

(5)

Die Fermi-Dirac-Verteilung gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit $f(W,T)$ ein quantenmechanischer Zustand der Energie W bei der Temperatur T besetzt ist. Die Fermienergie ist die Energie, bei der die Wahrscheinlichkeit genau 50% beträgt.

- b) Unter welcher Bedingung kann statt der Fermi-Dirac-Verteilung die Boltzmann-Verteilung verwendet werden? [0,5P]

Die Boltzmann-Näherung ist gültig für $|W - W_F| \gg k_b T$.

- c) Wir gehen nun von einem intrinsischen dreidimensionalen Halbleiter mit gleichen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur aus. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 4 ein: [2P]

- Energie über der Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$
- Energie über Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
 - Für $T = 300K$
 - Für $T = 0K$
- Energie über Ladungsträgerdichte $\tilde{n}(W)$ und $\tilde{p}(W)$ bei $T = 300K$.

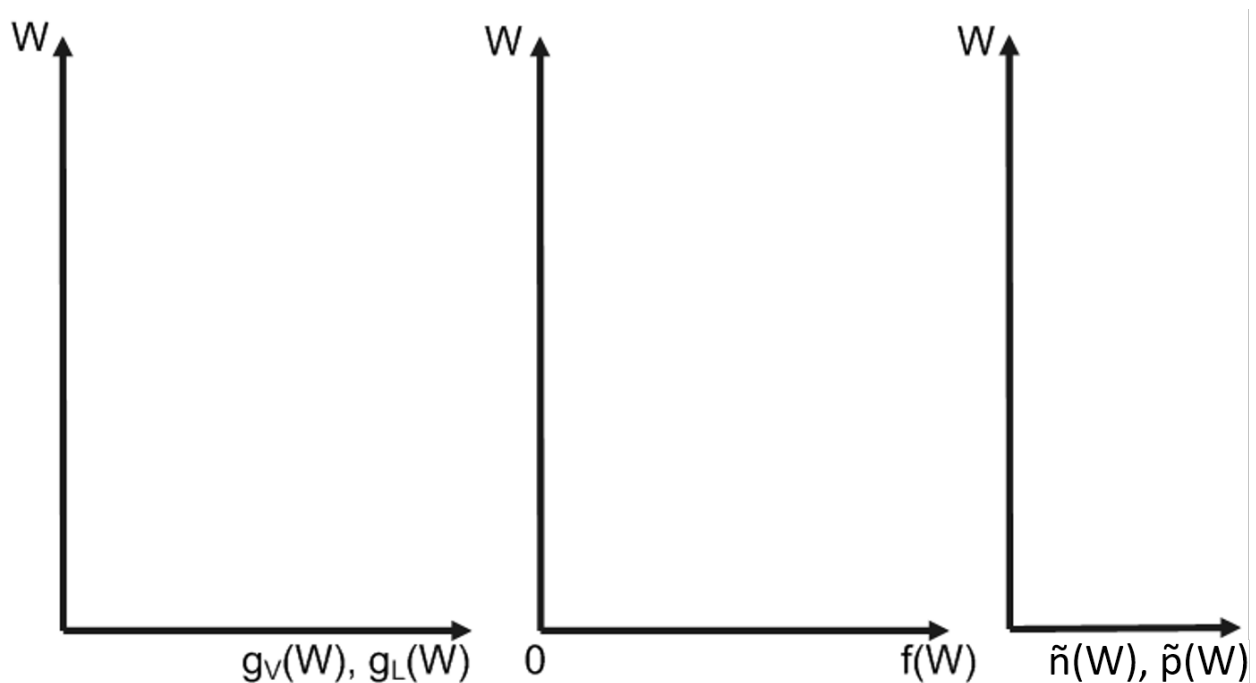


Abbildung 4: Koordinatensysteme für Aufgabe 4c)

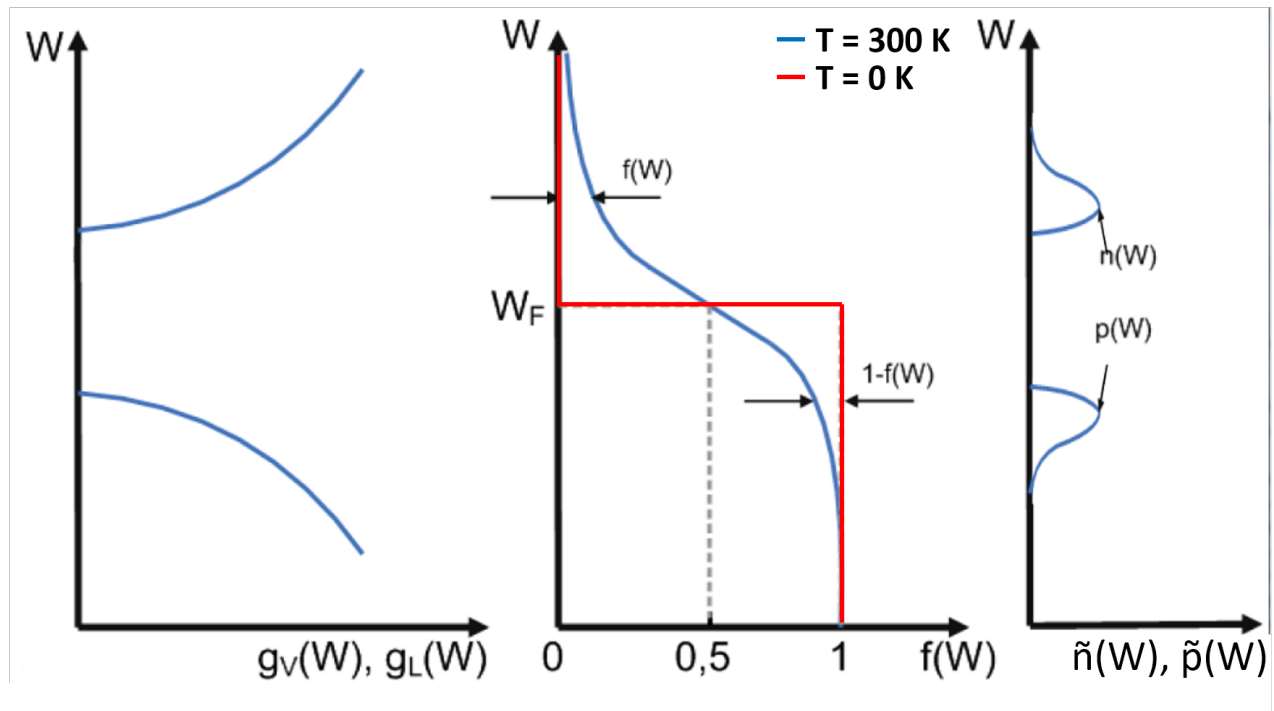


Abbildung 5: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte.

Gegeben sei nun ein intrinsischer, **dreidimensionaler** Halbleiter bei $T = 300\text{K}$. Die effektive Zustandsdichte für Elektronen im Leitungsband sei $N_L = 7,65 \cdot 10^{24}\text{cm}^{-3}$ und die intrinsische Ladungsträgerdichte $n_i = 1,14 \cdot 10^{14}\text{cm}^{-3}$. Gehen Sie davon aus, dass der Halbleiter eine Bandlücke von $W_G = 1,1\text{eV}$ aufweist.

d) Berechnen Sie die effektiven Massen $m_{eff,e}$ und $m_{eff,h}$. [1,5P]

Um die Masse von $m_{eff,h}$ zu errechnen, benötigt man zunächst die unbekannte Zustandsdichte der Löcher im Valenzband N_V . Diese kann über das Massenwirkungsgesetz bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 n_i &= \sqrt{n_{th}p_{th}} = \sqrt{N_L N_V} \cdot e^{-\frac{W_G}{2k_B T}} \\
 \Rightarrow N_V &= \frac{n_i^2}{N_L} \cdot e^{\frac{W_G}{k_B T}} \\
 &= \frac{(1,14 \cdot 10^{14})^2 \text{cm}^{-3}}{7,65 \cdot 10^{24} \text{cm}^{-3}} \cdot \exp\left(\frac{1,1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{J}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{K}}\right) = 5,20 \cdot 10^{21} \text{cm}^{-3}
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Bandlücke in eV angegeben ist und dass N_L und N_V die Einheit $\frac{1}{\text{cm}^3}$ haben! Für die Berechnung von $m_{eff,e}$ und $m_{eff,h}$ gilt dann Folgendes:

$$N_L = 2 \left(\frac{2\pi m_{eff,e} k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \Rightarrow m_{eff,e} = \left(\frac{10^6 * N_L}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{h^2}{2\pi k_B T}$$

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_{eff,h} k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \Rightarrow m_{eff,h} = \left(\frac{10^6 * N_V}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{h^2}{2\pi k_B T}$$

$$\Rightarrow m_{eff,e} = 4,12 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow m_{eff,h} = 3,19 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

- e) Leiten Sie eine Formel her, in der die Fermi-Energie in Abhängigkeit von W_L und W_V dargestellt wird. Nutzen Sie dafür als Ausgangspunkt, dass Ladungsträger in intrinsischen Halbleitern immer paarweise anzutreffen sind. Beschreiben Sie basierend darauf, wie sich das Fermi-Niveau über die Temperatur T verschiebt. (Hinweis: Gehen Sie von der Boltzmann-Näherung aus.) [1,5P]

Eine Herleitung einer Formel für W_F ist möglich über den Ansatz $n_{th} = p_{th}$. Zur Vereinfachung nehmen wir dabei die Boltzmann-Näherung an.

$$N_L e^{-\frac{W_L - W_F}{k_B T}} = N_V e^{\frac{W_V - W_F}{k_B T}}$$

Umformen ergibt:

$$\frac{N_L}{N_V} = e^{\frac{W_V - W_F + W_L - W_F}{k_B T}}$$

Dieser Term wird nun nach W_F aufgelöst, indem der Logarithmus auf beiden Seiten benutzt wird.

$$\ln \left(\frac{N_L}{N_V} \right) = \frac{W_V - W_F + W_L - W_F}{k_B T}$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2}(W_V + W_L) - \frac{1}{2}k_B T \cdot \ln \left(\frac{N_L}{N_V} \right)$$

Unter Beachtung des Zusammenhangs $-\ln(x) = \ln(\frac{1}{x})$ folgt dann die leicht veränderte Schreibweise:

$$W_F = \frac{1}{2}(W_V + W_L) + \frac{1}{2}k_B T \cdot \ln \left(\frac{N_V}{N_L} \right)$$

Für $T = 0K$ findet sich die Fermi-Energie genau in der Bandmitte und verschiebt sich mit steigender Temperatur zu dem Band hin, welches die kleinere effektive Masse aufweist.

Im Folgenden betrachten wir einen unbekannten Halbleiter dessen Zustandsdichte $g(W)$ und dessen Fermi-Niveau W_F in Abbildung 6 dargestellt sind. Die Temperatur sei $300K$.

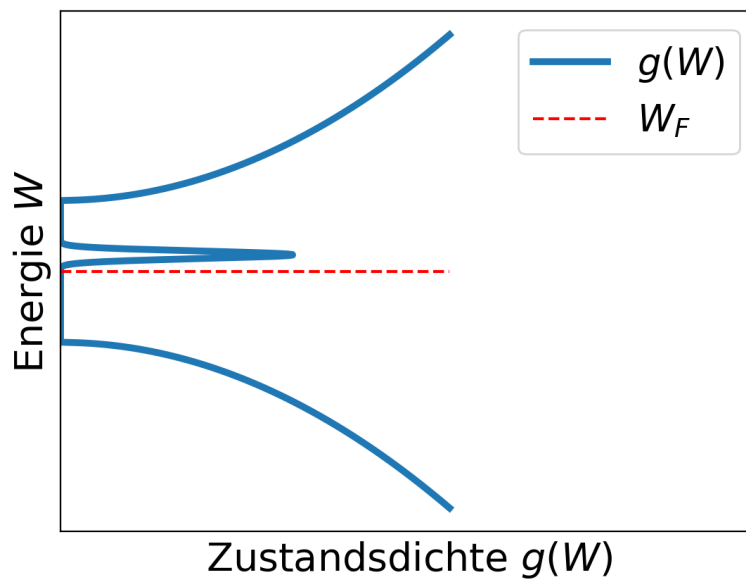


Abbildung 6: Zustandsdichten $g(W)$ eines unbekannten Halbleiters mit eingezeichnetem Fermi-Niveau W_F .

- f) Was unterscheidet die abgebildete Zustandsdichte von der Zustandsdichte eines intrinsischen Halbleiters? Benennen Sie die Technik, mit der man einen Halbleiter mit einer solchen Zustandsdichte erzeugen kann. [1P]

- Zusätzlich eingebrachte Störstellen oberhalb der Bandmitte und des Fermi-Niveaus.
- Dies kann durch Dotierung des Halbleiter erzeugt werden.

5. Dotierte Halbleiter und der pn-Übergang [8P]

- a) Betrachten wir nun das Element Germanium. Geben Sie jeweils beispielhaft ein Element zur n und zur p-Dotierung an. Benennen Sie außerdem, wie eine solche Störstelle im Gitter genannt wird! [1P]

Zur p-Dotierung können Elemente aus der dritten Hauptgruppe des Periodensystems verwendet werden, beispielsweise Gallium. Eine durch ein Gallium-Atom erzeugte Störstelle im Kristallgitter wird als Akzeptor bezeichnet. Zur n-Dotierung können Elemente aus der fünften Hauptgruppe verwendet werden, beispielsweise Phosphor. Die zugehörige Störstelle wird als Donator bezeichnet.

- b) Gegeben Sei der Graph in Abbildung 7, in dem die Ladungsträgerkonzentration eines Halbleiters in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt ist. Handelt es sich hierbei um einen intrinsischen oder dotierten Halbleiter? Unterteilen Sie den Graphen in Bereiche und beschriften Sie diese! [1,5P]

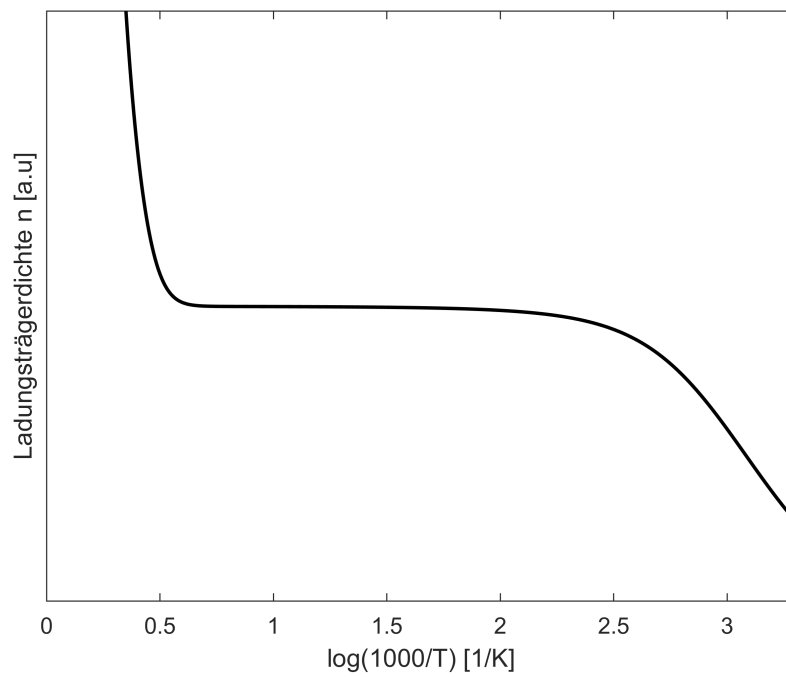


Abbildung 7: Ladungsträgerkonzentration im Halbleiter in Abhängigkeit von der Temperatur.

Es handelt sich um einen dotierten Halbleiter.

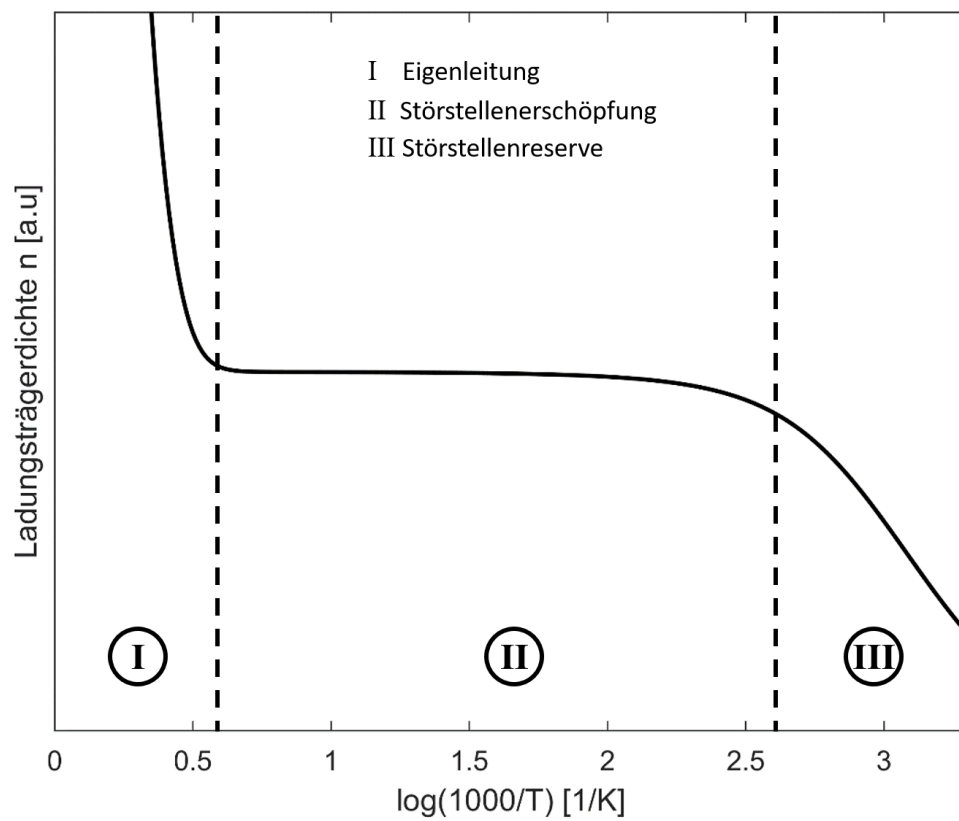


Abbildung 8: Majoritäts-Ladungsträgerkonzentration im Halbleiter in Abhängigkeit von der Temperatur.

- c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit eines dotierten Halbleiters. Die Beweglichkeit der Löcher und Elektronen ist jeweils $\mu_p = 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$ und $\mu_n = 2,1 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$. Gehen Sie dabei von einem n-dotierten Halbleiter mit einer intrinsischen Ladungsträgerdichte von $n_i = 8,34 \cdot 10^{12} cm^{-3}$ und einer Donatorkonzentration $n_D = 8,7 \cdot 10^{14} cm^{-3}$ aus (Hinweis: Gehen Sie von Störstellenerschöpfung aus!). [1P]

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

Da n-dotiert kann der Beitrag der Löcher vernachlässigt werden und die Ladungsträgerdichte entspricht der Dichte der ionisierten Störstellen n_D .

$$\sigma = en\mu_n = en_D\mu_n$$

$$\sigma = 1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 8,7 \cdot 10^{14} \frac{1}{cm^3} \cdot 2,1 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{V \cdot s} = 0,2923 \frac{A}{V \cdot cm} = 29,23 \frac{A}{V \cdot m}$$

Falls der Beitrag der Löcher nicht vernachlässigt wird, muss die Lochkonzentration über das Massenwirkungsgesetz berechnet werden:

$$n_i^2 = n \cdot p$$

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{n_D} = \frac{8,34^2 \cdot 10^{24}}{8,7 \cdot 10^{14}} cm^{-3} = 7,99 \cdot 10^{10} cm^{-3}$$

Daraus berechnet sich dann die Leitfähigkeit zu:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 1,6 \cdot 10^{-19} (8,7 \cdot 10^{14} \cdot 2,1 \cdot 10^3 + 7,99 \cdot 10^{11} \cdot 10^3) \frac{A}{V \cdot cm}$$

$$\sigma = 0,2923 \frac{A}{V \cdot cm} = 29,23 \frac{A}{V \cdot m}$$

Anhand dieser Rechnung wird nochmal deutlich, dass man den Beitrag der Löcher vernachlässigen kann.

Wird ein n-dotierter Halbleiter mit einem p-dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht, bildet sich an der Grenzfläche eine in beide Regionen ausgedehnte Raumladungszone. Dies ist schematisch in Abbildung 9 dargestellt. ρ ist die Raumladungsdichte und l_n und l_p beschreibt je die räumliche Ausdehnung im n-dotierten und p-dotierten Halbleiter. Für alle folgenden Betrachtungen gelte die Schottky-Näherung.

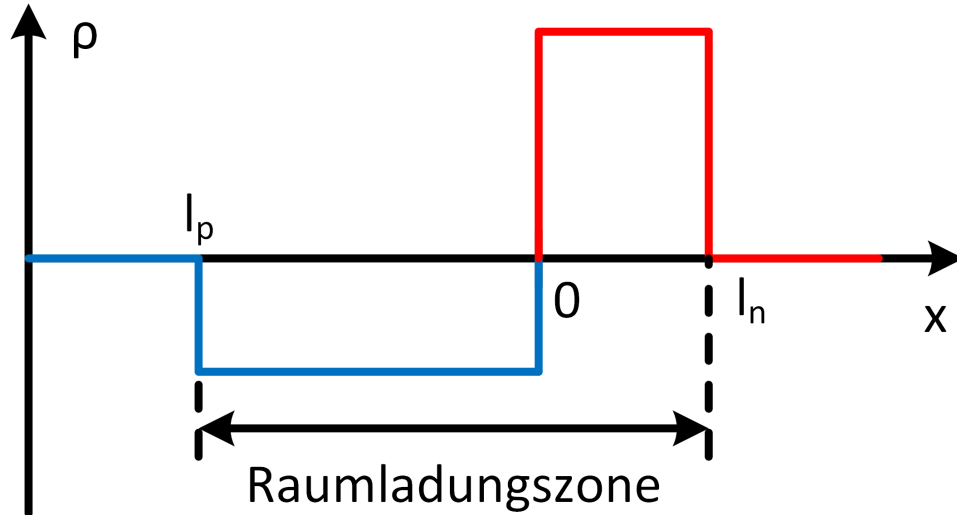


Abbildung 9: Raumladungsdichten in n- und p-Halbleitern und die resultierende Raumladungszone.

- d) Die Ausdehnung der Raumladungszone l_p ist doppelt so groß wie l_n . Berechnen Sie das Verhältnis der Ladungsträgerdichten n_D und n_A . [0,5P]

Es gilt: $n_D \cdot l_n = n_A \cdot l_p$. Für den Fall, dass $\frac{l_p}{l_n} = 2$ folgt: $\frac{n_D}{n_A} = 2$. Die Donatorkonzentration n_D ist somit doppelt so groß wie die Akzeptorkonzentration n_A . Alternativ kann das Verhältnis aus dem Diagramm abgelesen werden.

- e) Zeichnen Sie das Banddiagramm für einen pn-Übergang für den Fall, dass sich die Halbleiter ohne externe Vorspannung im Kontakt befinden. Zeichnen Sie zusätzlich die Diffusionsspannung U_D ein. Bitte vergessen Sie nicht eingezeichnete Bänder und Energieniveaus zu beschriften! [1P]

Werden zwei dotierte Halbleiter in Kontakt gebracht, verschiebt sich die Bandstruktur wie in Abbildung 10 gezeigt. Ohne externe angelegte Spannung gleicht sich das Fermi-Level in beiden Gebieten an.

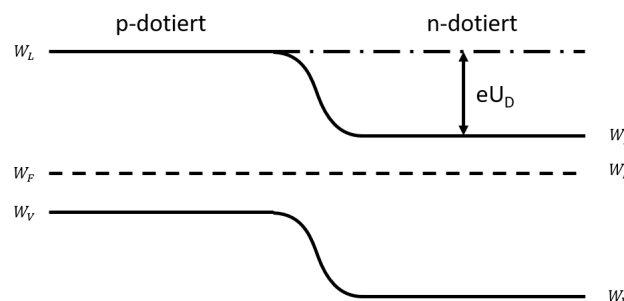


Abbildung 10: Banddiagramm eines p- und n-Halbleiters in Kontakt ohne angelegte externe Spannung.

- f) Bestimmen Sie den Wert der Diffusionsspannung U_D , die sich im pn-Übergang

ausbildet, sobald die Halbleiter im Kontakt sind. Gegeben Sei dazu die Ausdehnung der Raumladungszone im n-Halbleiter $l_n = 428nm$, die Ladungsträgerdichten $n_A = 1,615 \cdot 10^{15} cm^{-3}$ und $n_D = 3,23 \cdot 10^{15} cm^{-3}$. Nehmen Sie eine Temperatur von $T = 300K$ und eine Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 16$ an. (Hinweis: Nutzen Sie die Stetigkeit des Potentials $\Phi(x)$.) [1,5P]

Der Ausgangspunkt der Berechnung ist die Potentialfunktion $\Phi(x)$. Über die Stetigkeit des Potentials Φ bei $x = 0$ findet der folgende formelle Zusammenhang:

$$\frac{en_A}{2\epsilon_r\epsilon_0}l_p^2 = -\frac{en_D}{2\epsilon_r\epsilon_0}l_n^2 + U_D$$

Diese Formel wird nach U_D umgestellt. Die fehlende Variable l_p kann berechnet werden über:

$$n_D \cdot l_n = n_A \cdot l_p \rightarrow l_p = 856nm$$

Einsetzen ergibt den Wert U_D .

$$U_D = \frac{e}{2\epsilon_r\epsilon_0} (n_A l_p^2 + n_D l_n^2) = 1,0V$$

- g) Skizzieren Sie die ideale U-I-Kennlinie einer pn-Diode in das Diagramm 11. Welche Spannung U muss an das Bauteil angelegt werden, damit bei einer Temperatur von $T = 300K$ ein Strom $I = 12mA$ fließt? Der Sperrstrom der Diode beträgt $1pA$. Geben Sie eine Formel für die Spannung U an. [1,5P]

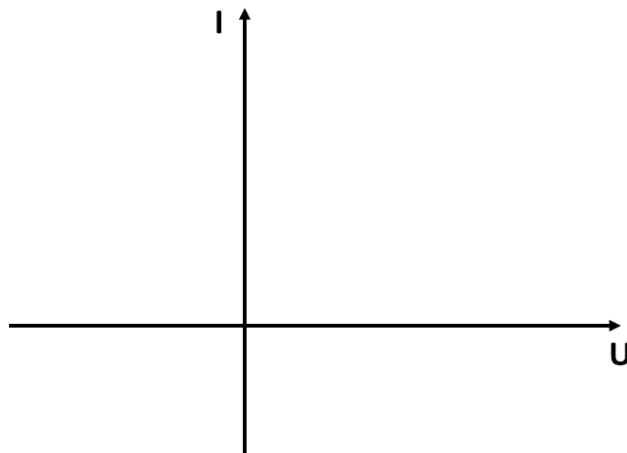


Abbildung 11: U-I Diagramm einer idealen pn-Diode.

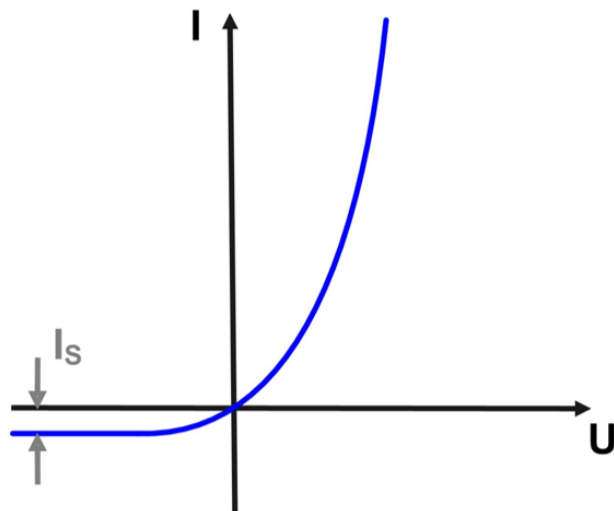


Abbildung 12: U-I-Kennlinie einer pn-Diode

Es gilt:

$$I = I_S(e^{U/U_T} - 1) \quad \text{wobei} \quad U_T = \frac{k_B T}{e}$$

Umformen nach U , um über den gegebenen Strom die Spannung zu errechnen.

$$U = U_T \cdot \ln\left(\frac{I}{I_S} + 1\right)$$

$$\rightarrow U \approx 0,6V$$

6. Dielektrika [7P]

Ein luftgefüllter Plattenkondensator wird auf eine Spannung von $U_0 = 10 \text{ V}$ aufgeladen, danach wird die Spannungsquelle abgeklemmt (bzw. der Schalter geöffnet), siehe gegebene Verschaltung in Abb. 13. Bei geöffnetem Schalter wird nun bei einer Umgebungstemperatur von $T_1 = 20 \text{ °C}$ ein polares, verlustfreies Dielektrikum (passgenau ohne Luftspalte) zwischen die Elektroden eingeführt. Dadurch sinkt die Spannung auf $U_1 = 4,645 \text{ V}$.

Hinweis: Für die weitere Berechnungen sollen nur Elektronen- und Orientierungspolarisation berücksichtigt werden.

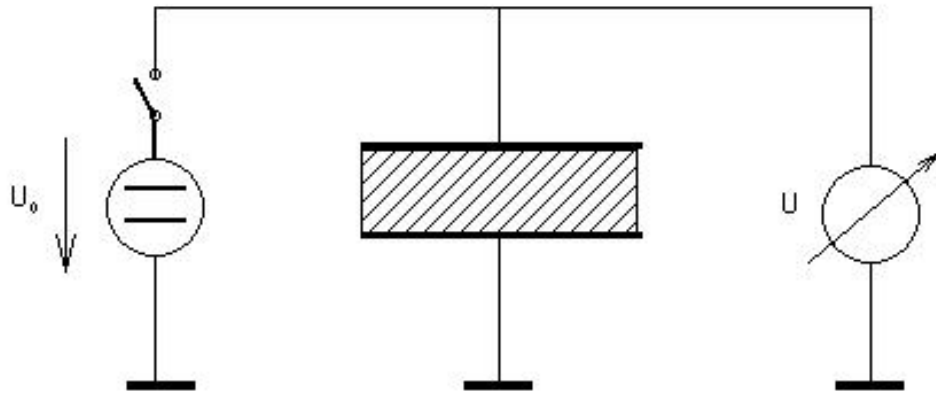


Abbildung 13: Plattenkondensator mit polarem Dielektrikum

- a) Berechnen Sie die Dielektrizitätszahl $\epsilon_{r,1}$ des Dielektrikums für $T_1 = 20^\circ\text{C}$. [1P]

$$\begin{aligned} \text{Ladung } Q &= C_0 \cdot U_0 = C_1 \cdot U_1 = \epsilon_{r,1} \cdot C_0 \cdot U_1 \\ \Rightarrow \epsilon_{r,1} &= \frac{U_0}{U_1} = 2,153 \end{aligned}$$

- b) Die Temperatur des Plattenkondensators wird nun von $T_1 = 20^\circ\text{C}$ auf $T_2 = 250^\circ\text{C}$ erhöht. Die Spannung über dem Kondensator steigt dadurch auf $U_2 = 5,695\text{ V}$. Berechnen Sie die Gesamt-Suszeptibilität $\chi_{e,2} = \chi_{\text{elektron},2} + \chi_{\text{or},2}$ bei $T_2 = 250^\circ\text{C}$. [1P]

Bei $T_2 = 250^\circ\text{C}$ ist $\epsilon_{r,2} = U_0/U_2 = 1,756$.

$$\chi_{e,1} = \epsilon_{r,1} - 1 = 1,153$$

$$\chi_{e,2} = \epsilon_{r,2} - 1 = 0,756$$

- c) Berechnen Sie die Suszeptibilitäts-Anteile $\chi_{\text{elektron},1}$ und $\chi_{\text{or},1}$ aufgrund von Elektronen- bzw. Orientierungspolarisation des Materials bei $T_1 = 20^\circ\text{C}$. Für die Berechnung soll die Konzentration der permanenten Dipole im Dielektrikum temperaturunabhängig sein. [3P]

Die Orientierungspolarisierbarkeit α_{or} ist der Temperatur umgekehrt proportional, die Elektronenpolarisierbarkeit α_{el} ist praktisch temperaturunabhängig. Da zudem die Konzentration der permanenten Dipole im Dielektrikum temperaturunabhängig sei, gilt:

$$\chi_{\text{or},1} \propto T^{-1} \text{ und Temperaturkoeff. } \text{TK}_{\chi_{\text{elektron},1}} \approx 0$$

$$\chi_{e,1} = \epsilon_{r,1} - 1 = \chi_{\text{elektron},1} + \chi_{\text{or},1} = 1,153$$

$$\chi_{e,2} = \epsilon_{r,2} - 1 = \chi_{\text{elektron},2} + \chi_{\text{or},2} = 0,756$$

$$\Rightarrow \frac{\chi_{or,1}}{\chi_{or,2}} = \frac{T_2}{T_1} \text{ und } \chi_{elektron,1} = \chi_{elektron,2} = \chi_{elektron}$$

Subtraktion der ersten beiden Gleichungen und anschließendes Einsetzen in die dritte ergibt (nach Auflösen nach $\chi_{or,1}$):

$$\chi_{or,1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}(\chi_{e,1} - \chi_{e,2}) = \frac{523 \text{ K}}{523 \text{ K} - 293 \text{ K}}(1,153 - 0,756) = 0,903$$

$$\chi_{elektron,1} = \chi_{e,1} - \chi_{e,2} = 1,153 - 0,903 = 0,250$$

- d) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild durch welches die Polarisierung aus den vorangegangenen Teilaufgaben beschrieben werden kann. [2P]

Die Beiträge beider Polarisationsmechanismen bestehend aus Widerstand, Kapazität und bei der Elektronenpolarisation mit Induktivität sind parallel geschaltet:

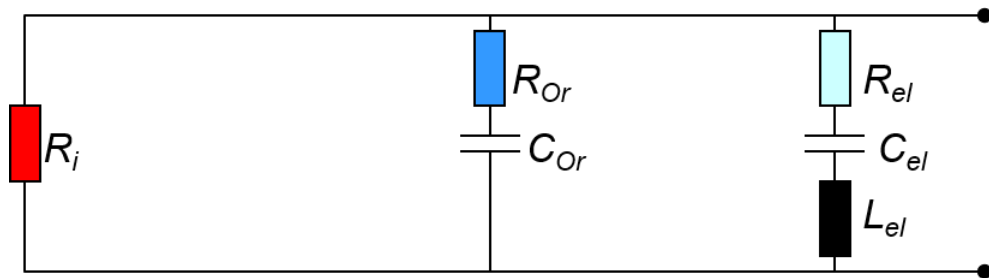


Abbildung 14: Ersatzschaltbild der Elektronen- und Orientierungspolarisation

7. Ionenleitung und Grenzflächen [6,5P]

- a) Erklären Sie die ionischen Transportprozesse durch Flüssigelektrolyte, Polymere und Feststoffe qualitativ. [3P]

Flüssigelektrolyt: Durch freie/Brownsche Bewegung werden gelöste Ionen transportiert.

Polymere: Innerhalb der ortsfesten Polymerstrukturen können die Gegenionen der funktionellen Gruppen über den Vehikel-Mechanismus oder den Grotthuss-Mechanismus/das Protonen-Hopping transportiert werden.

Festkörper: Die Bewegung von Fehlstellen wie z.B. der Schottky- oder der Frenkel-Defekte führt zum Ionentransport.

- b) Eine ionenleitende Membran trennt zwei Elektrolytlösungen in denen H_2SO_4 in gleichen Konzentrationen gelöst in H_2O vorliegt. Berechnen Sie die ionische Leitfähigkeit des Membranmaterials unter den Annahmen, dass in der Membran ausschließlich Protonentransport stattfindet und eine konstante Ladungsträgerkonzentration $c_k = 0,5 \text{ mol/L}$ vorliegt. Die Diffusionskonstante $D_{H^+} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ sei für $T = 300 \text{ K}$ gegeben. [1,5P]

In die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Leitfähigkeit wird die Einstein-Relation $\mu = \frac{ze}{k_B T} D_{H^+}$ eingesetzt und die Ladungsträgerdichte mit $k = c_k \cdot N_A$ berücksichtigt.

$$\sigma = z e k \mu = \frac{z^2 e^2 c_k N_A}{k_B T} \cdot D_{H^+} \approx 0,56 \frac{S}{m} \quad (6)$$

- c) Nennen Sie ein Membranmaterial, das die Eigenschaften aus der vorangegangenen Teilaufgabe erfüllt. Begründen Sie Ihre Antwort. [2P]

Nafion/Polymer/Copolymer. Das Material ist für Protonen leitend und weist entsprechende Werte für Diffusionskoeffizienten schon bei der in den Aufgaben angenommenen Temperatur von $T = 300 \text{ K}$ auf.

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Gaskonstante	R	$=$	8,314	J/(mol K)
Faraday-Konstante	F	$=$	96485	As/mol
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp(jkx) + \exp(-jkx) = 2 \cos(kx)$$

$$\exp(jkx) - \exp(-jkx) = 2j \sin(kx)$$

$$\int (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int (\cos ax)^2 dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} (\sin ax)^2$$

$$\int x (\sin ax)^2 dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4a}x \sin 2ax - \frac{1}{8a^2} \cos 2ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
n(W,T) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_L}{k_B T} \sqrt{\frac{W - W_L}{k_B T}} e^{-\frac{W - W_L}{k_B T}} \\
p(W,T) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_V}{k_B T} \sqrt{\frac{W_V - W}{k_B T}} e^{-\frac{W_V - W}{k_B T}} \\
n_{th} &= N_L \cdot e^{-\frac{W_L - W_F}{k_B T}} \\
p_{th} &= N_V \cdot e^{-\frac{W_F - W_V}{k_B T}} \\
N_{L,V} &= 2 \left(\frac{2\pi m_{e,h} k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
\text{Raumladungszone} & \quad p - \text{Bereich} \\
\rho &= \frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
\Phi(x) &= \frac{en_A}{2\epsilon\epsilon_0} (x + l_p)^2 \\
E(x) &= -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (x + l_p) \\
\text{Raumladungszone} & \quad n - \text{Bereich} \\
\rho &= -\frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0} \\
\Phi(x) &= -\frac{en_D}{2\epsilon\epsilon_0} (l_n - x)^2 + U_D \\
E(x) &= \frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - l_n) \\
l = l_p + l_n &= \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0}{e} U_D \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_D} \right)}
\end{aligned}$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut