

Lichttechnisches Institut

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

**Institut für Angewandte Materialien -
Elektrochemische Technologien**

Prof. Dr.-Ing. Ulrike Krewer
Adenauerring 20b
76131 Karlsruhe

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	7	8,5	7	8,5	8	8	47

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 47, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 23,5.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Nur mit dokumentenechten Stiften schreiben (kein Bleistift und kein Rotstift!).

Fortsetzung auf der Rückseite!

-
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
 - Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
 - Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
 - Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
 - Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Grundlagen der Festkörperelektronik [7P]**Teil I - Photonen**

- a) Ein dünner Halbleiterkristall wird mit unterschiedlichen monochromatischen Strahlungen bestrahlt. Bei Wellenlängen λ größer als 1000 nm wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke des Halbleiters? [1P]

Teil II - Wellenfunktionen

- b) Die Wellenfunktion zur Beschreibung eines quantenmechanischen Teilchens darf komplexe Werte annehmen. Steht das im Widerspruch zu der physikalischen Tatsache, dass in der Natur nur reelle Messgrößen beobachtet werden können? (Begründung!) [1P]

c) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik? [1P]

- d) Am Large Hadron Collider (LHC) werden Protonen bis auf 99,999999 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Diese Protonen werden am vorgeschalteten Linearbeschleuniger mit einer kinetischen Energie von 50 MeV mit einer Ungenauigkeit von ± 1 keV erzeugt und in den LHC-Ring geschossen. Schätzen Sie ab, wie genau Sie den Ort des Protons beim Austritt aus dem Linearbeschleuniger bestimmen können? Vernachlässigen sie hierbei relativistische Effekte. (Hinweis: Aus der Fehlerfortpflanzung folgt $\Delta p = \frac{\partial p(W)}{\partial W} \Delta W$) [2P]

Teil III - Unschärfe und Dispersion

- e) Leiten Sie die Dispersionsrelation für freie Elektronen aus der Schrödingergleichung her. [2P]

2. Elektronen in Potentialen [8,5P]**Teil I**

Ein dünner Halbleiterfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Halbleiterfilm. Das Potential kann als Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden. Die Schichten seien in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt.

- a) Die Grundzustandsenergie des Elektrons beträgt $W_1 = 2,39 \text{ meV}$. Zeigen sie, dass der Halbleiter 12,5 nm dick ist. Geben sie die Formel in der Form $L(W)$ an! [1,5P]
(Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)

b) Das Elektron soll durch Licht vom Grundzustand in den 30. angeregten Zustand angeregt werden. Berechnen sie die Wellenlänge λ_{ph} der Photonen. In welchem spektralen Bereich sind diese einzuordnen (ultraviolettes, sichtbares, infrarotes Spektrum)? [1,5P]

c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ des Grundzustandes und des **zweiten angeregten Zustandes** und geben Sie die normierten Wellenfunktionen explizit an. [1,5P]

- d) Wie unterscheiden sich die Wellenfunktionen des Elektrons in den drei Raumrichtungen x , y und z im Bezug auf ihre Energieeigenwerte in der jeweiligen Richtung? [1P]
- e) Die unendlichen Potentiale außerhalb des Halbleiters werden durch endliche Potentiale ausgetauscht. Zusätzlich werden nach der ersten Halbleiterschicht an der Stelle L ein weiterer Isolator der Dicke d und eine weitere Halbleiterschicht der Dicke L eingebracht. Abschließend folgt wieder der unendlich ausgedehnte Isolator. Die Dicke d des Isolators zwischen den beiden Halbleiterschichten wird auf wenige nm begrenzt. Was passiert, wenn die Schichtdicke d des Isolators gering gewählt wird? Beschreiben Sie den zugrunde liegenden quantenmechanischen Effekt. Skizzieren Sie hierzu qualitativ das Potential in x -Richtung und die Grundzustands-Wellenfunktion der Elektronen. [1,5P]

Teil II

Folgendes Potential $V(x)$ sei gegeben:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ V_0 & : 0 \leq x \end{cases} \quad \text{mit } V_0 = 6 \text{ eV}$$

- f) Betrachten Sie ein von links ($x < 0$) einlaufendes Elektron mit dem Impuls $p = 1,48 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Energie des Elektrons in Elektronenvolt und zeichnen Sie entsprechend den Potentialverlauf mit der sich ausbreitenden Elektronenwelle in den Bereichen $x < 0$ und $0 \leq x$. Wie ändert sich der Impuls an der Stelle $x = 0$ qualitativ? [1,5P]

3. Kristalle [7P]

Das Leitungsband eines Halbleiters lässt sich im k -Raum im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W_L(k) = 3,6W_0 - 2W_0 \cdot \sin(ka)$ beschreiben. Das Valenzband wird durch das Potential $W_V(k) = -2,5W_0 \cdot (1,21 - \cos(ka))$ beschrieben. W_0 sei 1 eV.

- a) Zeichnen Sie das Leitungsband $W_L(k)$ und das Valenzband $W_V(k)$ in das bereitgestellte Diagramm in Abbildung 1! [1 P]

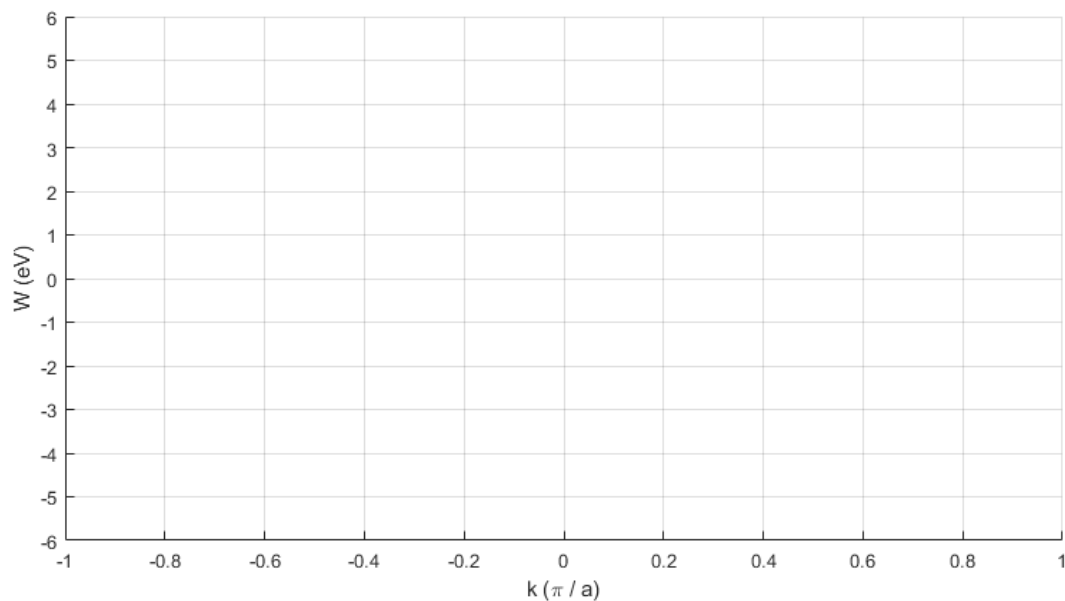


Abbildung 1: Potentiale für Leitungsband $W_L(k)$ und Valenzband $W_V(k)$

- b) Handelt es sich um einen indirekten oder direkten Halbleiter? Nennen Sie beispielhaft einen Vertreter dieser Gruppe von Halbleitern. [1P]
- c) Berechnen Sie die Bandlücke des Halbleiters! [1,5P]

-
- d) Bestimmen Sie für diesen Halbleiter die Gruppengeschwindigkeit $v_g(a, W_0)$ eines Elektrons im Leitungsbandminimum in Abhängigkeit der Gitterkonstante a und W_0 . Bestimmen Sie dazu zunächst die partielle Ableitung $\frac{\partial W_L(k)}{\partial k}$. [1P]

- e) Beschreiben Sie knapp und qualitativ, wie sich ein angelegtes elektrisches Feld (d.h. eine konstante Kraft) auf das Verhalten des in Teilaufgabe d) beschriebenen Elektrons auswirkt! Wird dieses Verhalten typischerweise bei Raumtemperatur beobachtet? Begründen Sie ihre Antwort! [1P]

- f) Die Besetzungswahrscheinlichkeit von Zuständen in Halbleitern wird über die Fermi-Dirac Verteilung beschrieben. Geben Sie die Formel $f(W,T)$ an. [0,5P]

- g) Ein Plot der Fermi-Dirac Verteilung ist in Abbildung 2 für die Temperatur $T_1 = 300\text{ K}$ gegeben. Zeichnen Sie in dieses Diagramm zusätzlich die Kurve für $T_2 = 500\text{ K}$ und $T_3 = 0\text{ K}$ ein. Identifizieren Sie die Kurven eindeutig! [1P]

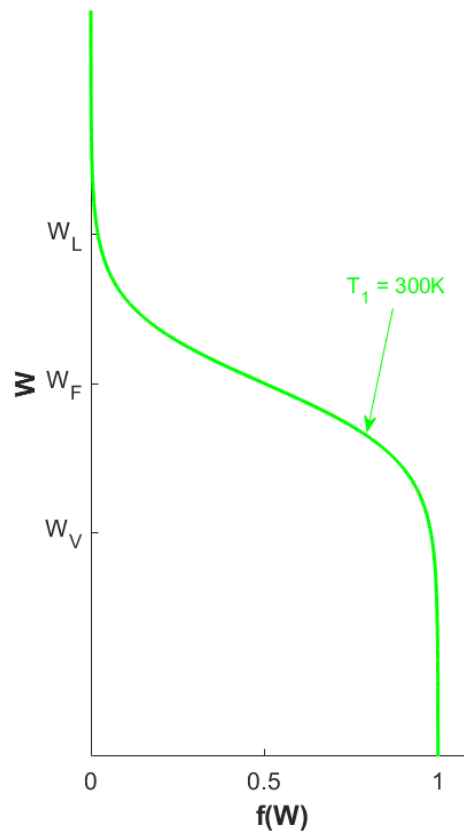


Abbildung 2: Die Fermi-Dirac Funktion bei $T_1 = 300\text{ K}$

4. Dotierte Halbleiter und der pn-Übergang [8,5P]**Teil I - Dotierte Halbleiter**

- a) Ein Stück p-dotierter Halbleiter wird einer elektrischen Feldstärke von $E = 4,22 \frac{V}{m}$ ausgesetzt. Es wird bei Raumtemperatur eine Stromdichte von $j = 5,2 \frac{mA}{cm^2}$ gemessen. Diffusionsströme treten nicht auf. Die Beweglichkeit der Löcher ist $\mu_p = 1,1 \cdot 10^3 \frac{cm^2}{Vs}$ und die intrinsische Ladungsträgerdichte ist $n_i = 8,34 \cdot 10^{12} cm^{-3}$. Berechnen Sie die Ladungsträgerdichte der Löcher, die im Halbleiter vorliegt! (Hinweis: Durch die Dotierung gilt $n_A \approx p \gg n$) [1P]

-
- b) Die Ionisierungsenergie eines Akzeptors in Germanium liege 10 meV oberhalb des Valenzbandes. Berechnen Sie die Lage des Fermi-Niveaus W_F relativ zum Akzeptorniveau W_A (d.h. $W_F - W_A$) und zum Valenzband W_V (d.h. $W_F - W_V$) und geben Sie diese jeweils in eV an. Gehen Sie von $T = 300\text{ K}$ und $N_V = 4.5 \cdot 10^{18}\text{ cm}^{-3}$ aus. [1,5P]

Teil II - Halbleiter im Nichtgleichgewicht

In Halbleitern entwickeln sich die vorhandenen Ladungsträgerdichten auf dynamische Weise basierend auf verschiedenen Beiträgen. Dazu gehören Generations- und Rekombinationsprozesse und Ladungsträgerströme. Diese werden durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben, die wie folgt lautet:

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n + e (g_n - r_n)$$

Gegeben ist ein stark n-dotierter Halbleiter (mit Donatorkonzentration n_D) bei Raumtemperatur. Der Halbleiter wird konstant von einer Lichtquelle beleuchtet, so dass im gesamten Halbleiter Elektron-Lochpaare ($\hat{=}$ Überschussladungsträgerdichte $\Delta p \ll n_D$) räumlich homogen mit der Generationsrate g_p erzeugt werden. Nehmen Sie für die Rekombinationsrate $r_p = \Delta p / \tau_p$ an, wobei τ_p die Lebensdauer der Elektron-Lochpaare ist. Weiterhin sei kein äußeres elektrisches Feld angelegt.

- c) Leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp einen Ausdruck für Δp in Abhängigkeit von g_p und τ_p ab! Beachten Sie hierbei die Annahmen aus der Aufgabenstellung! [1P]

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde nun die Beleuchtung des Halbleiters schlagartig abgeschaltet.

- d) Leiten Sie aus einer vereinfachten Kontinuitätsgleichung für Δp eine Differentialgleichung für $\Delta p(t)$ für $t > 0$ her! [1P]

- e) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der Überschussladungsträgerdichte $\Delta p(t)$ für $t > 0$ durch Lösen der Differentialgleichung aus Teilaufgabe II-b) und unter Beachtung der Randbedingungen für $\Delta p(t = 0)$ und $\Delta p(t \rightarrow \infty)$! [1,5P]

Teil III - Der pn- Übergang

- f) Ein n-dotierter und ein p-dotierter Halbleiter werden in Kontakt gebracht. Dabei sind die Dotierdichten im jeweiligen Halbleiter gegeben durch die Donatorkonzentration n_D und die Akzeptorkonzentration n_A . Skizzieren Sie den Verlauf des elektrischen Feldes über der Raumladungszone. Gehen Sie davon aus, dass der Zusammenhang $n_D = 2 \cdot n_A$ gilt. [1P]

- g) Was muss an der Kontaktfläche bei $x = 0$ für das elektrische Feld gelten? [0,5P]

- h) Zeichnen Sie nun das Banddiagramm des pn-Übergang für den Fall, dass eine Spannung in Sperrrichtung angelegt wird. Zeichnen Sie die Fermi-Niveaus ein! Bitte beschriften Sie eingezeichnete Bänder und Energieniveaus. [1P]

5. Dielektrika [8P]

a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie an falls die entsprechende Aussage korrekt ist. [2P]

- ☐ In Edelgasen tritt ausschließlich Elektronenpolarisation auf.
- ☐ Elektronenpolarisation bezeichnet die Auslenkung von Atomkern und -hülle.
- ☐ Raumladungspolarisation und Ionenpolarisation weisen im Wechselfeld Resonanzverhalten auf.
- ☐ Richten sich einzelne Atome im E-Feld räumlich aus, so führt dies zu Orientierungspolarisation.

b) Zur Bestimmung der Dielektrizitätszahl ε_r einer Polyesterprobe wird die unten dargestellte Schaltung (Sawyer-Tower-Schaltung) realisiert: Zwei baugleiche Plattenkondensatoren werden dazu in Reihe geschaltet. In einen davon wird die Polyesterprobe eingebracht. Der zweite Kondensator dient als Referenz und ist luftleer. Berechnen Sie die Dielektrizitätszahlen ε_r und die elektrischen Suszeptibilitäten χ_e des Dielektrikums für beide angegebenen Temperaturen $T_1 = 25\text{ °C}$ und $T_2 = 225\text{ °C}$ und tragen Sie diese in Tabelle 1 ein. [2P]

Hinweis: In Tabelle 1 ist die am Referenzkondensator gemessene Spannung U_{Mess} für zwei verschiedene Temperaturen bei einer angelegten Gleichspannung von $U_0 = 6\text{ V}$ gegeben.

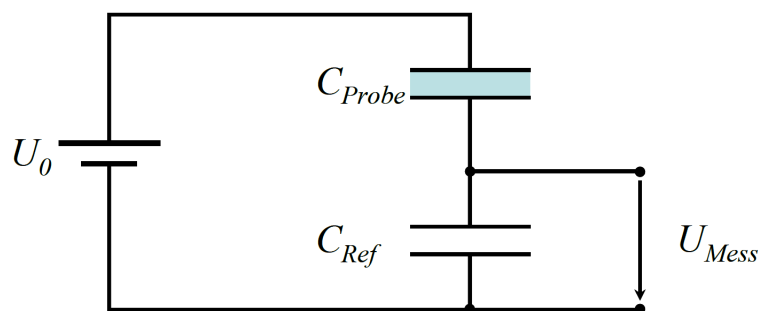


Abbildung 3: Sawyer-Tower-Schaltung

i	$T / \text{°C}$	U_{Mess} / V	$\varepsilon_r / -$	$\chi_e / -$
1	25	4,5		
2	225	4,25		

Tabelle 1: U_{Mess} bei unterschiedlichen Temperaturen.

- c) Die Dielektrizität der in Teilaufgabe b) beschriebenen Probe besteht aus Elektronenpolarisation und Orientierungspolarisation. Berechnen Sie die Suszeptibilitätsanteile der Elektronenpolarisation $\chi_{el,1}$ und der Orientierungspolarisation $\chi_{or,1}$ bei einer Temperatur von $T_1 = 25\text{ °C}$ auf Basis der Werte aus der vorangegangenen Teilaufgabe. Für die Berechnung soll die Konzentration der permanenten Dipole im Dielektrikum temperaturunabhängig sein. [2P]

Hinweis: Falls aus der vorangegangenen Teilaufgabe keine Werte vorhanden sind, rechnen Sie bitte mit: $\chi_{e,1} = 1,5$ und $\chi_{e,2} = 1,0$.

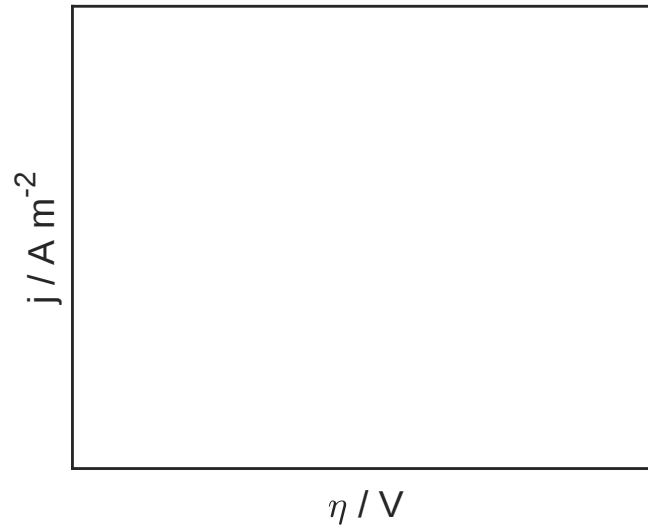
-
- d) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild durch welches die Polarisierung aus der vorangegangenen Teilaufgabe beschrieben werden kann. Beschriften Sie die Komponenten.
[2P]

6. Ionenleitung und Grenzflächen [8P]

- a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie an falls die entsprechende Aussage korrekt ist. [2P]
- ☐ Polymerelektrolyte bilden Schottky-Defekte aus.
 - ☐ In Flüssigelektrolyten sind gelöste Ionen nahezu frei beweglich.
 - ☐ In kristallinen Festkörpern ermöglicht der Vehikel-Mechanismus eine höhere Ionenleitfähigkeit.
 - ☐ Bei Raumtemperatur ist die Ionenleitfähigkeit in kristallinen Festkörpern geringer als in Flüssigelektrolyten.
- b) Eine ionenleitende Membran der Dicke $x = 200 \mu m$ trennt zwei wässrige Elektrolytlösungen in denen H_2SO_4 vollständig dissoziiert in den Konzentrationen 0 mol/L und 1 mol/L vorliegen. Berechnen Sie die Diffusionsstromdichte der Protonen unter der Annahme, dass in der Membran ausschließlich Protonentransport entlang eines konstanten Konzentrationsgradienten stattfindet. Der Diffusionskoeffizient $D_{H^+} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ sei für $T = 300 \text{ K}$ gegeben. [2P]

-
- c) Materialdefekte in kristallinen Festkörpern ermöglichen die Leitung von Sauerstoffionen O^{2-} . Der Diffusionskoeffizient sei für eine Temperatur von $T = 1000\text{ °C}$ mit $D = 5 \cdot 10^{-11}\text{ m}^2/\text{s}$ gegeben. Berechnen Sie die Beweglichkeit der Ionen. [2P]

- d) Skizzieren Sie den Verlauf der Stromdichte über dem Überpotential nach der Butler-Volmer Gleichung für eine reversible Redox-Reaktion. Skizzieren Sie zudem die Anteile der Stromdichte aus Oxidation und Reduktion. [2P]



Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	J s
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Gaskonstante	R	$=$	8,314	J/(mol K)
Faraday-Konstante	F	$=$	96485	As/mol
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp\{(j k x)\} + \exp\{(-j k x)\} = 2 \cos(k x)$$

$$\exp\{(j k x)\} - \exp\{(-j k x)\} = 2j \sin(k x)$$

$$\int (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int (\cos a x)^2 dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int \sin a x \cos a x dx = \frac{1}{2a} (\sin a x)^2$$

$$\int x (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4a} x \sin 2a x - \frac{1}{8a^2} \cos 2a x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{a x} dx = e^{a x} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-a x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut