

Lichttechnisches Institut

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

**Institut für Angewandte Materialien -
Elektrochemische Technologien**

Prof. Dr.-Ing. Ulrike Krewer
Adenauerring 20b
76131 Karlsruhe

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

E-Mail-Adresse:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Max	9	7	8	7,5	8	8	47,5

Bitte beachten Sie:

- Zugelassene Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 Blatt (2 DIN A4 Seiten) eigene handschriftliche Notizen, ausgeteiltes Blatt (letzte Seite Ihrer Klausur) mit Konstanten-, Formel- und Integralsammlung.
- Maximal erreichbare Punktzahl: 47,5, zum Bestehen hinreichende Punktzahl: 23,5.
- Eckige Klammern am Aufgabenende geben die maximal erreichbaren Punkte je (Teil-)Aufgabe an.
- Prüfungsdauer: 120 min.
- Schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Blätter ohne Namen und Matrikelnummer können bei der Korrektur **keine** Berücksichtigung finden!
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis während der Klausur bereit.
- Es werden nur Aufgaben gewertet, die auf vom KIT bereitgestelltem Papier bearbeitet wurden. Sollte Ihnen das ausgehändigte Papier nicht ausreichen, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Es sind nur dokumentenechte Stifte zum Schreiben erlaubt (kein Bleistift und kein Rotstift!).

Fortsetzung auf der Rückseite!

-
- Versehen Sie jede Aufgabe, die Sie auf einem Zusatzblatt (weiter) bearbeiten, mit einem Hinweis. Sie erleichtern damit die Korrektur.
 - Begründungen, Erklärungen und ähnliches können in Stichworten verfasst werden.
 - Sofern nicht anders angegeben, ist der Rechenweg nachvollziehbar darzustellen.
 - Bei allen Rechnungen ist das Ergebnis bis auf die zweite signifikante Nachkommastelle anzugeben.
 - Skizzen sind grundsätzlich mit den notwendigen Beschriftungen zu versehen.

1. Wellenfunktion [9P]

- a) Die Wellenfunktion zur Beschreibung eines quantenmechanischen Teilchens darf komplexe Werte annehmen. Steht das im Widerspruch zu der physikalischen Tatsache, dass in der Natur nur reelle Messgrößen beobachtet werden können? (Begründung!) [1P]

- b) Können mit einem grünen Laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$) Elektronen aus einer Zink-Kathode ($W_a = 4,34 \text{ eV}$) gelöst werden? Wenn ja, wie schnell sind diese? [1P]

-
- c) Leiten Sie die Dispersionsrelation für das freie Elektronen aus der Schrödingergleichung her. Nehmen sie für das freie Elektron eine ebene Welle an. [2,5P]

- d) Leiten Sie die Phasengeschwindigkeit v_p für ein freies Elektron im Vakuum her! Beginnen Sie mit der Betrachtung eines Punktes zeitlich konstanter Phase und setzen Sie am Ende das Ergebnis aus Aufgabenteil c) ein. [1,5P]

-
- e) Welche räumliche Abhängigkeit ergibt sich für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ eines freien Elektrons? Erklären Sie die physikalische Bedeutung Ihres Ergebnisses! [1P]
- f) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert $\langle \hat{p}(t) \rangle$ und das Impulserwartungswertquadrat $\langle \hat{p}^2(t) \rangle$ für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2}$. Bestimmen sie die Ortsunschärfe Δx mit Hilfe der Unschärferelation. [2P]

2. Elektronen in Potentialen [7P]**Teil I: Unendlicher Potentialtopf [3,5P]**

Ein dünner Halbleiterfilm der Dicke L ist zwischen zwei unendlich ausgedehnten, perfekten Isolatorschichten eingebracht. Betrachten Sie ein Elektron im Halbleiterfilm. Das Potential kann als Potentialtopf $V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < L \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$$

angenähert werden. Die Schichten seien in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt.

- a) Die Energie des 7. angeregten Zustands des Elektrons beträgt $W_{7.ang.} = 106,5 \text{ meV}$. Berechnen Sie die Dicke L des Potentialtopfs. Geben sie die Formel in der Form $L(W)$ an! [1,5P] (Hinweis: Rechnen Sie mit der freien Elektronenmasse m_e .)

b) Das Elektron in diesem Potentialtopf soll durch ein anregendes Photon vom 7. angeregten Zustand in den 42. angeregten Zustand angeregt werden. Berechnen sie die Wellenlänge λ_{ph} des Photons. [1P]

c) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ des Grundzustandes und des zweiten angeregten Zustandes und geben sie den jeweiligen Energieeigenwert an. [1P]

Teil II: 2D harmonischer Oszillator [3,5P]

- d) Geben sie ein zweidimensionales parabolisches Potential sowie die Grundgleichung zur Bestimmung der Eigenfunktionen an. (keine Berechnung notwendig) [2P]

-
- e) Nun sei $\omega_x = \omega_y$. Welche Energien haben die Eigenzustände allgemein? Sind diese Eindeutig? [1,5P]

3. Intrinsische Halbleiterkristalle [8P]**Teil I: Kristalle [3,5P]**

- a) Wie viele Atome befinden sich in der Einheitszelle eines kubisch-flächenzentrierten (fcc) Kristallgitters mit zweiatomiger Basis? Zeichnen Sie die Gitterpunkte inklusive Basis eines solchen Kristallgitters in die vorgegebene Zeichnung in Abbildung 1 ein! Die Basis besteht aus zwei Atomen an den Stellen $\{(0,0,0), (\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a)\}$ (Diamantgitter). [1,5P]

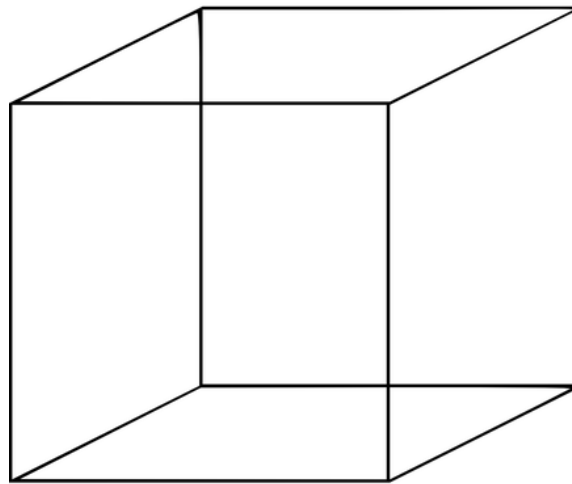


Abbildung 1: Vorlage für fcc-Gitter

- b) Wir betrachten einen Germanium-Halbleiter entsprechend Aufgabe a), der in einem fcc-Gitter mit zweiatomiger Basis kristallisiert. Er hat eine Gitterkonstante $a = 0,565 \text{ nm}$ und eine molare Masse von $M = 72,61 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Berechnen Sie die Dichte ρ ! [1P]

-
- c) Nennen Sie mindestens zwei charakteristische elektrische Eigenschaften eines Halbleiters! [1P]

Teil II: Zustandsdichten und Absorption [4,5P]

- d) Betrachten wir nun einen intrinsischen, dreidimensionalen Halbleiter mit identischen effektiven Massen für Elektronen und Löcher bei Raumtemperatur. Zeichnen Sie folgende Zusammenhänge in die dafür vorgesehenen Schaubilder in Abbildung 2: [1,5P]

- Energie über der Zustandsdichte für Elektronen und Löcher $g_L(W)$ und $g_V(W)$
- Energie über Fermi-Dirac-Verteilung $f_{FD}(W)$
- Energie über Ladungsträgerdichte $n(W)$ und $p(W)$

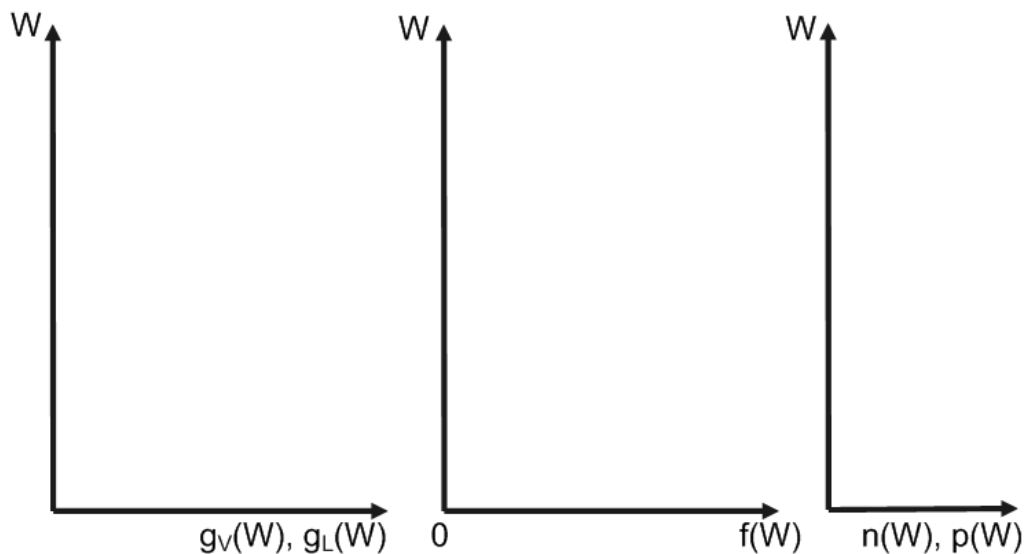


Abbildung 2: Energie über Zustandsdichte, Fermi-Dirac-Verteilung und Ladungsträgerdichte

- e) Berechnen Sie für den gleichen Halbleiter die Ladungsträgerdichte n eines Energieniveaus W_0 , welches $0,24\text{ eV}$ oberhalb des Fermi-Niveaus W_F liegt. Die Leitungsbandkante W_L liegt 54 meV oberhalb des Fermi-Niveaus. Gehen Sie von einer effektiven Zustandsdichte von $N_L = 8.87 \cdot 10^{24} \frac{1}{\text{m}^3}$ aus. [2P]

- f) Sie wollen nun einen Gallium-Arsenid-Detektor bauen, der 92 Prozent der einfallenden Strahlung mit der Wellenlänge $\lambda = 729,9 \text{ nm}$ absorbiert. In Abbildung 3 ist der Absorptions-Koeffizient verschiedener Halbleiter dargestellt in Abhängigkeit der Wellenlänge. Wie dick muss der Detektor sein? (Hinweis: Für die Absorption im Halbleiter gilt das Lambert-Beersche Gesetz: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\alpha(\lambda) \cdot x}$) [1P]

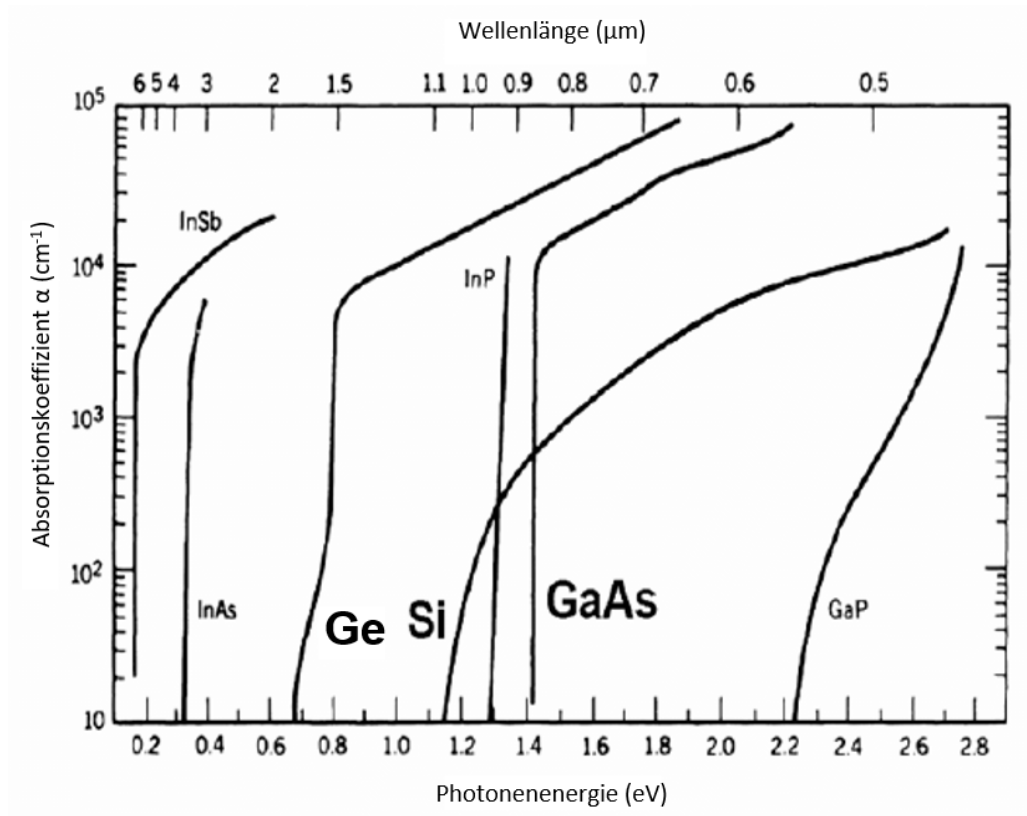


Abbildung 3: Absorptionskoeffizienten verschiedener Halbleiter

4. Dotierte Halbleiter und der pn-Übergang 7,5P]

Teil I: Dotierte Halbleiter [5,5P]

- a) Was versteht man unter Dotierung? Welchen Einfluss hat das auf einen Halbleiter und dessen Eigenschaften? [1P]
- b) In Abbildung 4 sind Lochkonzentrationen p in Abhängigkeit der Temperatur abgebildet. Ordnen Sie die beiden Kurven einem intrinsischen und einem dotierten Halbleiter zu und unterteilen Sie den Verlauf in drei signifikante Bereiche! Beschriften Sie diese! [2,5P]

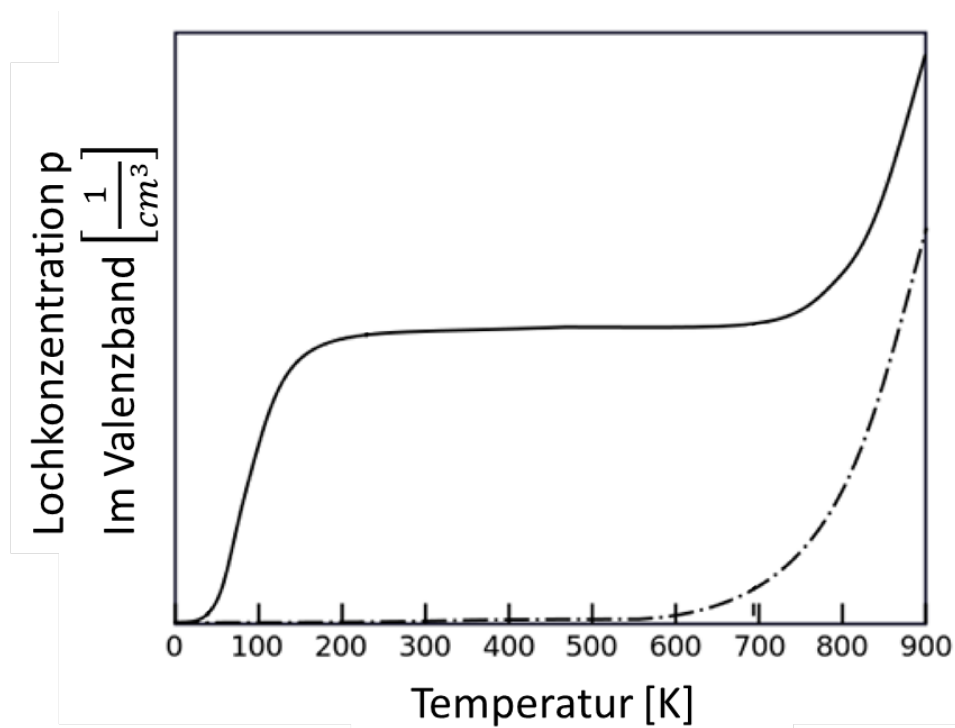


Abbildung 4: Lochkonzentrationen im Valenzband in Abhängigkeit von der Temperatur

- c) Die Fermi-Dirac-Verteilung ist durch die folgende Formel $f(W,T)$ gegeben:

$$f(W,T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

In einem intrinsischen Halbleiter liegt das Fermi-Level W_F genau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband. Dies ist für $T = 300K$ dargestellt in Abbildung 5. Dabei

gehen wir davon aus, dass in Valenz- und Leitungsband die effektiven Massen der Ladungsträger identisch sind.

Wie verändert sich die Funktion, wenn ein p-dotierter Halbleiter betrachtet wird? Skizzieren Sie die neue Kurve in das bestehende Diagramm in Abbildung 5. [0,5P].

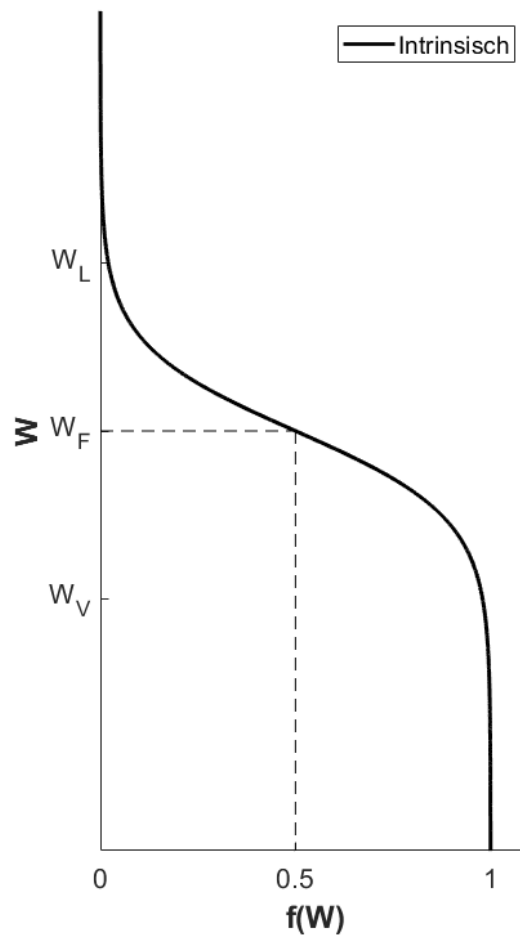


Abbildung 5: Fermi-Dirac Funktion für $T = 300$ K im Falle eines intrinsischen Halbleiters

- d) Die Ionisierungsenergie eines Akzeptors im Germanium liege 20 meV oberhalb des Valenzbandes. Berechnen Sie die Lage des Fermi-niveaus W_F relativ zum Akzeptorniveau W_A ($W_F - W_A$) und zum Valenzband W_V ($W_F - W_V$) und geben Sie diese jeweils in eV an. Gehen Sie von $T = 300\text{ K}$, $n_A = 5 \cdot 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ und $N_V = 9,3 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-3}$ aus. (Hinweis: Es gilt Störstellenerschöpfung.) [1,5P]

Teil II: Der pn-Übergang [2P]

Es werden ein p-dotiertes und ein n-dotiertes Stück Silizium in Kontakt gebracht, welche einen pn-Übergang bilden. Die Dotierungen der einzelnen Gebiete sind aus Abbildung 6 ersichtlich. Für die Raumladungszone (RLZ) gelte die Schottky-Näherung.

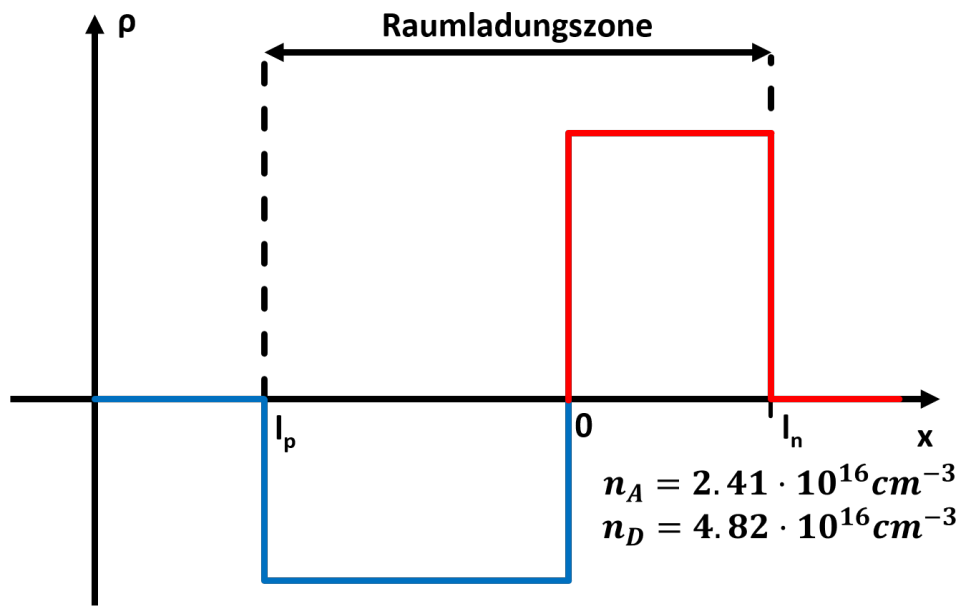


Abbildung 6: Raumladungen am pn-Übergang mit den zugehörigen Dotierdichten.

- e) Es wird nun eine externe Vorspannung U an den pn-Übergang (Diode) angelegt. Skizzieren Sie das Banddiagramm für den Fall einer Spannung in Sperrrichtung. [1P]

-
- f) Skizzieren Sie den Verlauf des elektrischen Feldes über der Raumladungszone.
Beachten Sie eventuelle Vorzeichen! [1P]

5. Dielektrika [8P]

a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. [2P]

- ☐ Eine Erhöhung der Temperatur führt zu einer Verringerung der Orientierungspolarisation.
- ☐ Piezoelektrische Werkstoffe zeichnen sich durch ihre isotrope Struktur aus.
- ☐ Edelgase haben einen Atomkern und eine Elektronenhülle und weisen daher Ionenpolarisation auf.
- ☐ Orientierungspolarisation beschreibt die Ausrichtung permanent vorhandener Dipole.

b) Zur Bestimmung der Dielektrizitätszahlen ε_r von **zwei** Proben aus PVC (PVC1 und PVC2) wird die unten dargestellte Schaltung (Sawyer-Tower-Schaltung) realisiert: Zwei Plattenkondensatoren mit gleicher Fläche A werden dazu in Reihe geschaltet. C_{Ref} ist luftleer, C_{Probe} enthält die zu untersuchende PVC-Probe. Idealerweise wird die Schaltung mit gleichem Plattenabstand der Kondensatoren C_{Ref} und C_{Probe} realisiert, allerdings weist eine PVC-Probe die 1,5-fache Dicke auf, Sie müssen daher den Plattenabstand von C_{Probe} zur Vermessung der Probe PVC2 erhöhen. Eine Erhöhung des Plattenabstands von C_{Ref} ist nicht möglich! Berechnen Sie die Dielektrizitätszahlen ε_r und die elektrischen Suszeptibilitäten χ_e beider Proben und tragen Sie diese in Tabelle 1 ein. [2,5P]

Hinweis: In Tabelle 1 ist die am Referenzkondensator gemessene Spannung U_{Mess} für die Proben PVC1 und PVC2 bei einer angelegten Gleichspannung von $U_0 = 10\text{ V}$ gegeben.

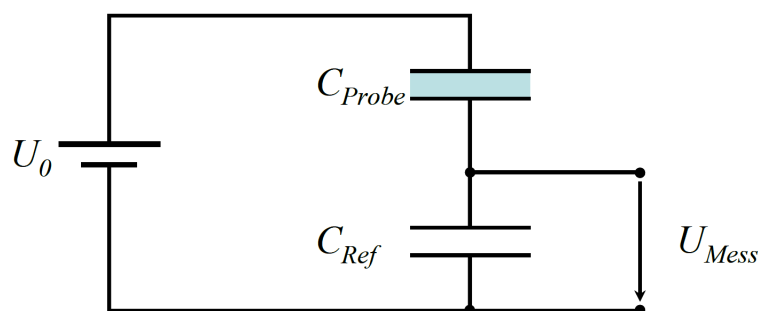


Abbildung 7: Sawyer-Tower-Schaltung

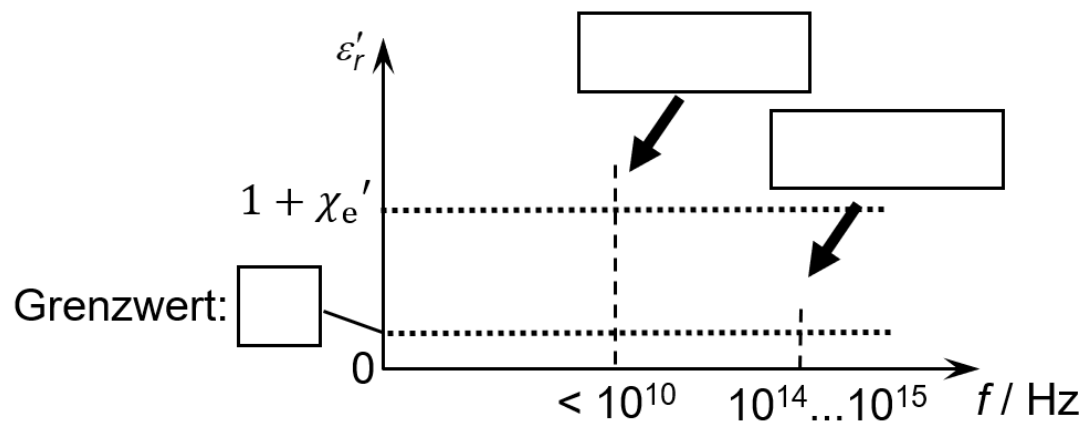
Probe	Abstand C_{Probe}	Abstand C_{Ref}	U_{Mess} / V	$\varepsilon_r / -$	$\chi_e / -$
PVC1	d	d	7,5		
PVC2	d	1,5d	6,6		

Tabelle 1: U_{Mess} der untersuchten Dielektrika.

- c) Quarzkristalle können bei mechanischer Belastung ein elektrisches Feld erzeugen. Ein Quarzkristall mit einer Dielektrizitätszahl von $\varepsilon_r = 3$ wird zwischen zwei Kondensatorplatten mit der Fläche 1 cm^2 eingespannt. Im Leerlauf ($D=0$) wird eine Kraft $F = 50 \text{ N}$ auf den Quarzkristall ausgeübt. Die piezoelektrische Ladungskonstante d_p des Kristalls beträgt $5 \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}}{\text{V}}$. Berechnen sie die den Betrag der elektrischen Feldstärke $|E|$ im Kondensator. [1 P]

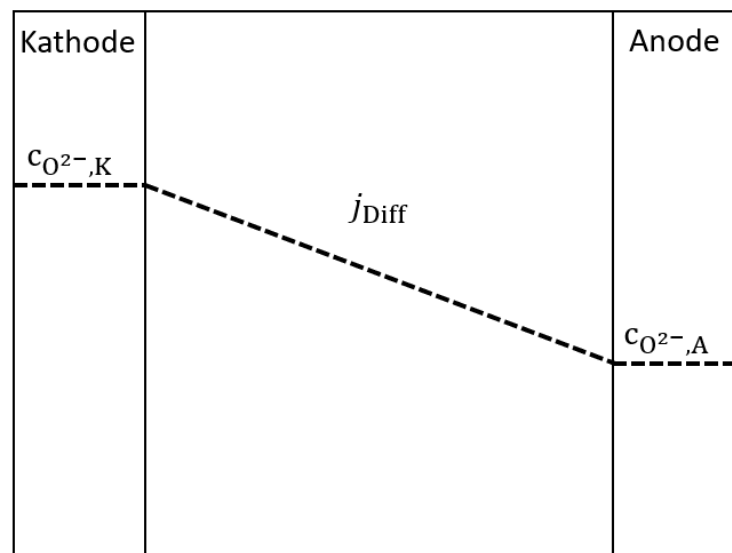
- d) Zeichnen Sie das Dispersionsspektrum von Wasser in das untenstehende Diagramm. Markieren Sie auftretende Relaxation und Resonanz. Gegen welchen Grenzwert läuft ε' für sehr hohe Frequenzen? [2,5P]

Hinweis: Wasser kann als frei von jeglichen Ionen betrachtet werden. Es sollen nur Orientierungspolarisation und Elektronenpolarisation betrachtet werden.



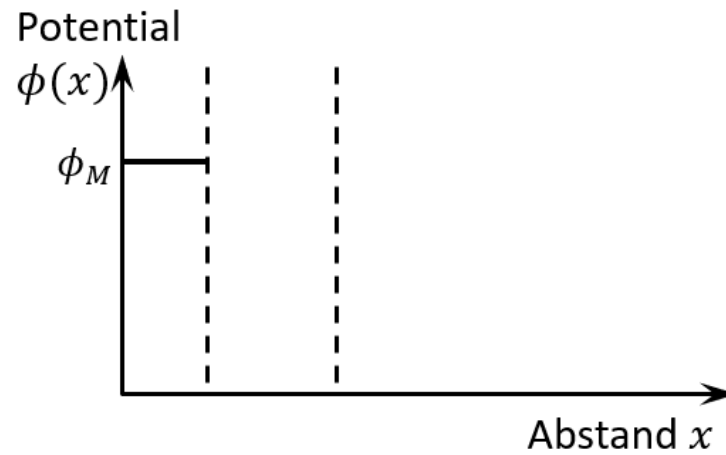
6. Ionenleitung und Grenzflächen [8P]

- a) Prüfen Sie jede der folgenden Aussagen einzeln. Kreuzen Sie an falls die entsprechende Aussage korrekt ist. [2P]
- ☐ Die Leitfähigkeit von Flüssigelektrolyten kann mithilfe von Dotierung erhöht werden.
 - ☐ An einer Elektrode-Elektrolyt-Grenzfläche bildet sich eine elektrochemische Doppelschicht aus.
 - ☐ Eine höhere Anzahl an Defekten in kristallinen Festkörpern hat einen positiven Einfluss auf deren Ionenleitfähigkeit.
 - ☐ Kristalline Festkörper sind meist bei Raumtemperatur ionenleitfähig.
- b) Hochtemperatur-Brennstoffzellen machen sich einen Konzentrationsgradienten an Sauerstoffionen (O^{2-}) zwischen Anode und Kathode zu nutze. Berechnen Sie den Betrag der Diffusionsstromdichte in einem Festelektrolyten bei einer Sauerstoffionenkonzentration von $c_{K,O^{2-}} = 200 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$ an der Kathode und $c_{A,O^{2-}} = 20 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$ an der Anode. Berücksichtigen Sie hier nur Diffusion und keine Migration! Die Dicke des Elektrolyten beträgt $200 \mu\text{m}$. Der Konzentrationsgradient kann als linear angenommen werden. Der Diffusionskoeffizient sei mit $4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ gegeben. Zeichnen Sie zudem in das untenstehende Diagramm die Richtung des Diffusionsstroms j_{Diff} ein. [1,5P]



-
- c) Wie verändert sich die Diffusionsstromdichte bei einer Erhöhung der Temperatur?
Erklären Sie Ihre Antwort mithilfe einer geeigneten Formel! [1P]

- d) Die Modellvorstellung nach Otto Stern fasst die von Helmholtz definierten Flächen als starre Schicht zusammen und postuliert eine zusätzliche diffuse Schicht. Zeichnen Sie den nach diesem Modell resultierenden Potentialverlauf qualitativ über der senkrecht zur Elektrode stehenden Raumrichtung. Kennzeichnen Sie die starre Schicht und die diffuse Schicht.[2P]



-
- e) Erklären Sie die Begriffe elektrochemische Oxidation und Reduktion. Wie kann der Ladungsübertritt zwischen Elektrode und Elektrolyt bei einer elektrochemischen Reaktion extern gesteuert werden? [1,5P]

Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum	h	$=$	$6,63 \cdot 10^{-34}$	Js
	$\hbar$	$=$	$\frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$	Js
Avogadro-Konstante	N_A	$=$	$6,02 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Bohr'scher Radius	a_0	$=$	$5,29 \cdot 10^{-11}$	m
Elementarladung	e	$=$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	As
Atomare Masseneinheit	u	$=$	$1,66 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronenmasse	m_e	$=$	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$=$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	kg
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$=$	$8,85 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Permeabilitätskonstante	μ_0	$=$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$=$	$3,0 \cdot 10^8$	m/s
Boltzmann-Konstante	k_B	$=$	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J/K
Gaskonstante	R	$=$	8,314	J/(mol K)
Faraday-Konstante	F	$=$	96485	As/mol
Kreiszahl	π	$=$	3,14	
Euler'sche Zahl	e	$=$	2,72	
Imaginäre Einheit	j	$=$	$\sqrt{-1}$	

Konversion von Einheiten

Atomare Masseneinheit → Kilogramm	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt → Joule	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Fortsetzung auf der Rückseite!

Formeln und Integrale

$$\exp\{j k x\} + \exp\{-j k x\} = 2 \cos(k x)$$

$$\exp\{j k x\} - \exp\{-j k x\} = 2j \sin(k x)$$

$$\int (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int (\cos a x)^2 dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2a x$$

$$\int \sin a x \cos a x dx = \frac{1}{2a} (\sin a x)^2$$

$$\int x (\sin a x)^2 dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4a} x \sin 2a x - \frac{1}{8a^2} \cos 2a x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = 0$$

$$\int x^2 e^{a x} dx = e^{a x} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-a x^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-a x} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Formeln pn-Übergang:

$$n(W,T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_L}{k_B T} \sqrt{\frac{W - W_L}{k_B T}} e^{-\frac{W - W_F}{k_B T}}$$

$$p(W,T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N_V}{k_B T} \sqrt{\frac{W_V - W}{k_B T}} e^{-\frac{W_F - W}{k_B T}}$$

$$n_{th} = N_L \cdot e^{-\frac{W_L - W_F}{k_B T}}$$

$$p_{th} = N_V \cdot e^{-\frac{W_F - W_V}{k_B T}}$$

$$N_{L,V} = 2 \left(\frac{2\pi m_{e,h} k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Raumladungszone *p - Bereich*

$$\rho = \frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$\Phi(x) = \frac{en_A}{2\epsilon\epsilon_0} (x + l_p)^2$$

$$E(x) = -\frac{en_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (x + l_p)$$

Raumladungszone *n - Bereich*

$$\rho = -\frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$\Phi(x) = -\frac{en_D}{2\epsilon\epsilon_0} (l_n - x)^2 + U_D$$

$$E(x) = \frac{en_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - l_n)$$

13 III. Hauptgruppe	14 IV. Hauptgruppe	15 V. Hauptgruppe
5 10,81 2,0 B Bor	6 12,01 2,5 C Kohlenstoff	7 14,007 3,0 N Stickstoff
13 26,98 1,5 Al Aluminium	14 28,09 1,8 Si Silicium	15 30,97 2,1 P Phosphor
31 69,72 1,6 Ga Gallium	32 72,59 1,8 Ge Germanium	33 74,92 2,0 As Arsen
49 114,82 1,7 In Indium	50 118,69 1,8 Sn Zinn	51 121,75 1,9 Sb Antimon
81 204,38 1,8 Tl Thallium	82 207,2 1,8 Pb Blei	83 208,98 1,9 Bi Bismut