

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M. Sc. Nico Bolse

M. Sc. Manuel Koppitz

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

1. Tutorium

Besprechung:

Tutorien 04. Mai - 08. Mai 2015

1. Dispersion I

- a) Skizzieren Sie die GAUSS-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (1)$$

für $\mu = 0$, $\sigma = 1$ sowie für $\mu = 2$, $\sigma = 4$. Welche Bedeutung haben die beiden Parameter?

- b) Was bedeutet der Begriff 'Dispersion' in Zusammenhang mit Wellenpaketen?
- c) Was bezeichnet man als Dispersionsrelation? Wie sehen die Dispersionsrelationen für ein freies Elektron sowie für ein Photon im Vakuum aus?
- d) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_G für das freie quantenmechanische Elektron und ein Vakuum-Photon.

2. Fourier-Transformation der GAUSS-Funktion

Die folgenden Gleichungen definieren eine Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jkx} dx & g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{jkx} dk & f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Diese Transformationen stellen eine Erweiterung der Fourierreihenentwicklung aus Aufgabe 1 auf nichtperiodische Funktionen dar.

- a) Zeigen Sie, daß die Fourier-Transformation einer GAUSS-Funktion $f(x) = \exp(-ax^2)$ mit $a > 0$ wieder eine GAUSS-Funktion ergibt (Hinweis: Quadratische Ergänzung im Exponenten).
- b) In der Ultra-Kurzzeitspektroskopie kommen gepulste Laser mit einer Pulslänge von wenigen Femtosekunden zum Einsatz. Schätzen Sie die spektrale Breite $\Delta\nu$ eines GAUSS-Pulses $f(t) \propto \exp(-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2})$ mit einer halben Breite von $\Delta t = 10$ fs ab. Vergleichen Sie hierzu die Fourier-Transformierte von $f(t)$ mit einem GAUSS-Puls im Frequenzraum $g(\omega) \propto \exp(-\frac{\omega^2}{2(\Delta\omega)^2})$.

3. Dispersion II

- a) Als Dispersionsparameter bezeichnet man den Ausdruck $\beta = 1/2 \cdot \partial^2 \omega / \partial k^2$. Berechnen Sie β für die beiden Teilchen aus Aufgabe 1d).
- b) Entwickeln Sie $\omega(k)$ um eine feste Wellenzahl k_0 . Brechen Sie die Entwicklung nach dem quadratischen Term ab und benutzen Sie die Ausdrücke aus den Aufgaben 1d) und 3a), um die Ableitungen zu ersetzen.
- c) Betrachten Sie folgendes GAUSSsche Wellenpaket:

$$\tilde{\psi}(k, t) = C \exp(-\alpha (k - k_0)^2) \exp(-j\omega(k)t) \quad (2)$$

Hier sind C und α positive Konstanten. Setzen Sie die Entwicklung bis zum quadratischen Glied aus der letzten Aufgabe für $\omega(k)$ ein. Nun leiten Sie den Ausdruck für die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x, t)$ durch Fourier-Transformation des Wellenpakets $\tilde{\psi}(k, t)$ her.

- d) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ρ für das Wellenpaket. Falls Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie:

$$\psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\exp(j(k_0 x - \omega(k_0)t))}{\sqrt{\alpha + j\beta t}} \exp\left(-\frac{(x - v_G t)^2}{4(\alpha + j\beta t)}\right) \quad (3)$$

- e) Was kann man über die Form des Wellenpakets aus Aufgabe 3d) sagen? Geben Sie den Ausdruck für die Breite des Wellenpakets an. Welchen fundamentalen Unterschied können Sie zwischen dem Wellenpaket des freien Elektrons und des Photons erkennen?
- f) Entnehmen Sie dem Ausdruck aus Aufgabe 3c) die Breite der Wellenfunktion im k -Raum. Setzen Sie diesen und die Breite im Ortsraum aus dem letzten Aufgabenteil in die Unschärferelation ein. Zeigen Sie, dass diese für ein freies Elektron für alle Zeiten erfüllt ist.