

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M. Sc. Nico Bolse

M. Sc. Manuel Koppitz

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

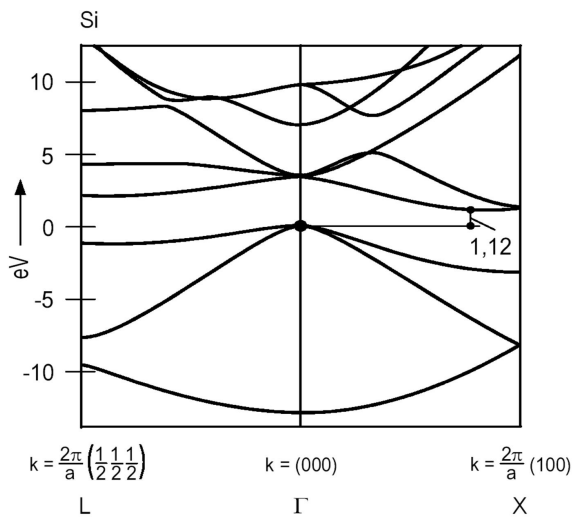
Lösung zum 5. Tutorium

Besprechung:

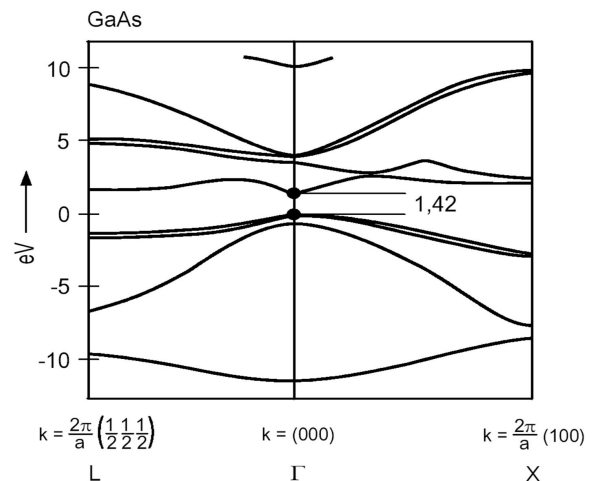
Tutorien 29. Juni - 3. Juli 2015

1. Die Bandstruktur II

- a) Bei der Betrachtung der realen Bandstruktur in der Abbildung 1 fällt auf, dass das Valenzband aus mehreren, energetisch nahe beieinander liegenden Bändern besteht. Versuchen Sie, die Ursache dieser Aufspaltung des Valenzbandes zu recherchieren.



(a) Silizium



(b) Gallium-Arsenid

Abb. 1: Reale Bandstrukturen von Silizium und Gallium-Arsenid.

Für die Aufspaltung der Bandstruktur spielen hauptsächlich Effekte eine Rolle, die Bahndrehimpulse und den Spin der Elektronen berücksichtigen. In unserer qualitativen Herleitung haben wir diese vernachlässigt. Mit unserem Wissen aus der Behandlung des Wasserstoffatoms kann man eine grobe Idee davon bekommen, was sich abspielt. Dazu ist es nützlich, sich den Kristall als aus einzelnen Atomen mit einer bestimmten Struktur von diskreten Energieniveaus zusammengesetzt vorzustellen. Für Silizium beispielsweise gibt es vier Valenzelektronen, von denen zwei ein s -Orbital und zwei ein p -Orbital füllen. Im p -Orbital ist somit noch Platz für vier weitere Elektronen.

Im Kristall spalten die diskreten Energieniveaus zu Bändern auf, wobei genau die eben beschriebenen Niveaus der Valenzelektronen Leitungs- und Valenzband bilden. Im Falle des GaAs sorgt die Aufspaltung dafür, dass drei p -Orbitale das Valenzband bilden, das s -Orbital bildet das Leitungsband. In erster Näherung koppeln

diese Orbitale zu so genannten hybridisierten Orbitalen im Kristall, das sind hier im Valenzband Mischungen der drei p-Orbitale, die energetisch entartet sind. Wir wissen aber, dass als Folge des Pauli-Gebots die in diesen Hybridorbitalen lokalisierten Elektronen unterschiedliche Quantenzahlen haben müssen.

Beim genaueren Hinsehen wirken sich diese dann doch auf die Energieniveaus aus. Je nach Orientierung des Spins im Vergleich zum Bahndrehimpuls eines Elektrons beispielsweise kann es zu einer Modifikation der Energieniveaus durch die so genannte Spin-Bahn Kopplung kommen. Man kann sich das im «Planetenmodell» des Atoms verdeutlichen. Der Spin des Elektrons erzeugt ein Dipolmoment, die Bewegung des Elektrons auf der Kreisbahn um den Kern ein Magnetfeld. Wie bei einer Kompassnadel (Dipol) im Erdmagnetfeld hat das Elektron mit Spin nun je nach Orientierung eine verschieden große potentielle Energie. Das wird in der Bandstruktur durch die Abspaltung des unteren der drei Valenzbänder, des so genannten «Split-off» Bandes sichtbar. Die Energiedifferenz zwischen diesem und den darüber befindlichen zwei Bändern entspricht gerade dieser Spin-Bahn-Kopplungsenergie.

Die beiden darüber liegenden Bänder mit unterschiedlichen Krümmungen bezeichnet man als «Heavy hole» Band und als «Light hole» Band. Die schweren Löcher befinden sich dabei, entsprechend ihrer effektiven Masse, im Band mit der flachen Krümmung, die leichten Löcher im Band mit der starken Krümmung. Die Aufspaltung dieser Bänder rührt daher, dass sich Elektronen, und damit auch Löcher, entlang der hybridisierten Orbitale leichter bewegen können als senkrecht dazu. Entlang der im Banddiagramm betrachteten Kristallrichtung hat ein Elektron, welches sich in einem dazu parallelen Hybridorbital befindet, also eine kleinere effektive Masse, als eines, welches sich in einem orthogonal dazu orientierten Orbital befindet.

- b) Was ist der Gunn-Effekt? Erläutern Sie diesen anhand des Banddiagramms in Abbildung 1(b) mit Hilfe der effektiven Massen.

Der Gunn-Effekt ist ein Hochfeldstärkeeffekt, der in manchen Halbleitermaterialien auftritt. Die Energiebänder dieser Halbleiter haben relative Maxima und Minima in einem nicht großen energetischen Abstand bei verschiedenen Wellenzahlen. Die ist in der Abbildung 1(b) in der Bandstruktur von Galliumarsenid zu sehen. Zunächst relaxieren die Elektronen im Leitungsband in das globale Minimum bei $k = (0, 0, 0)$. Erreichen diese Elektronen in einem elektrischen Feld eine Energie, die im Bereich der Energiedifferenz der beiden Minima liegt (bei GaAs 0,29 eV), so können sie durch Phononen in das benachbarte Nebenminimum im X-Punkt gestreut werden. Aufgrund der hohen effektiven Masse der Elektronen im Seitental haben sie dort eine kleinere Beweglichkeit, denn die effektive Masse ist antiproportional der Krümmung. Diese bedingt aber eine geringere Leitfähigkeit, und damit einen niedrigeren Strom. Insgesamt ergibt sich durch Erhöhen der Spannung in den kritischen Bereich also ein Absenken des Stromes, d.h. ein negativer differentieller Widerstand.

- c) Zeigen Sie, dass volle Bänder keinen Beitrag zum Gesamtstrom in einem Halbleiter liefern.

Ein Elektron trägt einen Anteil $\Delta j \propto v_G$ proportional zu seiner Gruppengeschwindigkeit v_G zur Gesamtstromdichte bei. Um diese Gesamtstromdichte in einem voll besetzten Band zu ermitteln, müssen wir über die gesamte erste Brillouinzone summieren:

$$j \propto \sum_{k=-\pi/a}^{\pi/a} v_G(k) \quad (1)$$

Die Gruppengeschwindigkeit errechnet sich gemäß $v_G(k) = 1/\hbar \partial W(k)/\partial k$ aus der Bandstruktur. Da das Gitter im k -Raum um $k = 0$ symmetrisch ist, folgt $W(-k) = W(k)$ und daraus weiterhin:

$$v_G(-k) = 1/\hbar \partial W(-k)/\partial k = -1/\hbar \partial W(k)/\partial k = -v_G(k) \quad (2)$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in die Gleichung der Stromdichte ergibt:

$$j \propto \sum_{k=-\pi/a}^{\pi/a} v_G(k) = \sum_{k=-\pi/a}^0 v_G(k) + \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(k) - \underbrace{v_G(0)}_{=0, \text{ da } W'(0)=0} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(-k) + \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(k) \quad (4)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} v_G(-k) + v_G(k) \quad (5)$$

$$= \sum_{k=0}^{\pi/a} -v_G(k) + v_G(k) \quad (6)$$

$$= 0 \quad (7)$$

Die Stromdichte in voll besetzten Bändern verschwindet also, da ebenso viele Ladungsträger in positiver wie in negativer Richtung zum Stromfluss beitragen. In der Herleitung haben wir benutzt, dass stets $v_G(0) = 0$ für $k = 0$ gilt, da dort ein Bandminimum oder Bandmaximum auftritt, also $W'(0) = 0$ gilt.

2. Leitfähigkeit

- a) Wie ist die Leitfähigkeit definiert? Welche Faktoren bestimmen die Leitfähigkeit im Halbleiter und wie kann man diese beeinflussen?

Die Leitfähigkeit ist definiert als

$$\sigma = e(\mu_e n + \mu_h p) \quad (8)$$

in den Einheiten $[\sigma] = \frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega m}$. Sowohl Elektronen, als auch Löcher tragen zu ihr bei. Die Beiträge hängen jeweils von der Beweglichkeit der Teilchensorte und ihrer

Dichte ab. Die Dichte der Teilchen ist beeinflussbar, vor allem durch das gezielte Einbringen von Fremdatomen (mehr dazu in Kürze). Die Beweglichkeit ist ein Materialparameter, der allerdings durch äußere Einflüsse verändert werden kann. Da man sich die Beweglichkeit als abhängig von der Summe der Effekte vorstellen kann, die zur Streuung des Elektrons führen, spielt zum Beispiel die Reinheit des Halbleiters eine entscheidende Rolle. Gitterfehlstellen, Versetzungen und Fremdatome vermindern die Beweglichkeit maßgeblich.

- b) In eine organische Dünnschicht-LED werden über 2 Metallkontakte Elektronen bzw. Löcher injiziert. Die Dicke der organischen Schicht ist typischerweise ca. 200 nm. Nehmen Sie an, dass Elektronen und Löcher die gleiche Mobilität von $\mu = 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ besitzen und etwa in der Mitte der Schicht unter Abstrahlung von Licht rekombinieren. Wie lange dauert es demnach, bis die ersten Ladungsträger nach dem Einschalten der Spannung $U=6 \text{ V}$ die Rekombinationszone erreicht haben?

Aus der Vorlesung ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ bekannt: $\bar{v} = \mu E = \frac{x}{t}$ mit $x = \frac{d}{2}$ und mit $E = \frac{U}{d}$ folgt für die Zeitdauer

$$t = \frac{x}{\mu E} = \frac{d}{2\mu U} = \frac{d^2}{2\mu U} \cong 33 \text{ ns} \quad (9)$$

- c) Ist diese organische LED damit für Datenübertragungen im GBit-Bereich durch aktive Modulation geeignet?

Um eine Diode einzuschalten sind also ca. 33 ns nötig. Nehmen wir die gleiche Zeit an, um die Diode wieder auszuschalten, dann lässt sich eine Diode maximal $1,5 \cdot 10^7$ mal in der Sekunde ein- und ausschalten. Dies entspricht einer maximalen Schaltfrequenz von 15 MHz.

Diese Abschätzung ist insofern optimistisch, als dass insbesondere in Polymeren viele Defekte zu einer Reduzierung des Ladungstransportes führen. Ferner wird Elektrolumineszenz (Abstrahlung von Licht als Resultat von Ladungsträger-Rekombination) erst beobachtet, wenn sich Raumladungen aufgebaut haben. Es ist auch davon auszugehen, dass sich injizierte Ladungen länger als angenommen im Material aufhalten können.

Demnach kann eine organische Leuchtdiode im Gigahertz-Bereich nicht aktiv (durch Ein- und Ausschalten) moduliert werden. Sollen Daten mit organischen Leuchtdioden als Signalquelle übertragen werden, so muß das Signal passiv, also durch einen externen Modulator, moduliert werden.

- d) Die Beweglichkeit der Elektronen in einem Film aus dem organischen Halbleitermaterial PFO ist abhängig vom angelegten Feld über:

$$\mu(E) = \mu_0 \exp(\alpha \sqrt{E}) \quad (10)$$

Hier ist $\mu_0 = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\alpha = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{1/2}/\text{V}^{1/2}$. Nun werden an einen 100 nm dicken Film 5 V Spannung angelegt. Wie groß müsste die Ladungsträger-

dichte sein, damit die Stromdichte erreicht wird, die in einem ebenso dicken Siliziumplättchen bei gleicher Spannung mit einer Elektronen-Konzentration von 10^{16} cm^{-3} (Löcher sind vernachlässigbar) fließt ($\mu_n = 1500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $\mu_p = 500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$)?

Die Stromdichte hängt vom angelegten Feld entsprechend $J = \sigma E$ mit $\sigma = e(\mu_n n + \mu_p p)$ ab. Der Löcheranteil an der Stromdichte darf laut Aufgabenstellung vernachlässigt werden. Wenn nun die gleiche Stromdichte in beiden Fällen fließen soll, setzen wir an:

$$J_{\text{Si}} = J_{\text{PFO}} \quad (11)$$

$$e\mu_{n,\text{Si}}n_{\text{Si}}\frac{U}{d} = en_{\text{PFO}}\mu_0 \exp(\alpha\sqrt{U/d})\frac{U}{d} \quad (12)$$

mit der Feldstärke $E = U/d$. Wir können diese Gleichung nach der gesuchten Größe n_{PFO} auflösen und erhalten:

$$n_{\text{PFO}} = \frac{\mu_{n,\text{Si}}n_{\text{Si}}}{\mu_0 \exp(\alpha\sqrt{U/d})} = 2,98 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad (13)$$

Die Ladungsträgerdichte muss also in der Organik sechs Größenordnungen höher liegen als in Silizium. Bei so hohen Ladungsträgerdichten spielen auch hier nicht betrachtete Effekte eine Rolle, die zur weiteren Reduktion der Stromdichte führen.

3. Messung der Leitfähigkeit

Sie halten einen Galliumarsenid-Wafer in der Hand (giftig! Handschuhe anziehen!). Dummerweise ist das Etikett auf der Verpackung nicht mehr lesbar, d.h. Sie können keine Aussage über die Dichte der zum Strom beitragenden Elektronen machen (der Anteil der Löcher zum Strom kann vernachlässigt werden). Sie wissen aber, dass die Mobilität von Elektronen in Galliumarsenid $\mu_e = 8500 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ beträgt.

- a) Wie können Sie mit einer SMU (Source-Meter-Unit) zum Vermessen von Strom-Spannungs-Kennlinien die Dichte der am Ladungstransport teilnehmenden Elektronen bestimmen?

Zunächst werden Sie eine U/I -Kennlinie vermessen, also den Strom, der durch den Wafer fließt, in Abhängigkeit der angelegten Spannung. Entsprechend

$$I = \frac{1}{R}U \quad (14)$$

können Sie aus der Geraden-Steigung den Widerstand R bestimmen. Die Leitfähigkeit ergibt sich unter Kenntnis der Länge l und der Querschnittsfläche A des Leiters aus

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \quad (15)$$

zu

$$\sigma = \frac{1}{R} \frac{l}{A} \quad (16)$$

Entsprechend

$$\sigma = e\mu_e n_e$$

können Sie nun die Anzahl der Elektronen bestimmen, die am Ladungstransport teilnehmen.

- b) Was sind Widerstand, spezifischer Widerstand, Leitwert und spezifischer Leitwert und wie hängen sie zusammen? Geben Sie die Bereiche an, in denen der spezifische Leitwert (oder der spezifische Widerstand) für Metalle, Halbleiter und Isolatoren üblicherweise liegt.

Der Widerstand eines Bauteils gibt an, wie viel Spannung erforderlich ist, um einen bestimmten Strom fließen zu lassen. Der spezifische Widerstand, meistens bezeichnet mit ρ , enthält den materialabhängigen Teil des Widerstands. So kann man unabhängig von der Geometrie des Bauteils Aussagen zum Widerstand bestimmter Stoffe machen. Der Leitwert beziehungsweise der spezifische Leitwert sind die jeweils reziproken Größen zum Widerstand ($G = 1/R$) und zum spezifischen Widerstand ($\sigma = 1/\rho$). Typische Werte für die materialspezifischen Größen sind:

	Metall	Halbleiter	Isolator
σ	$> 10^6 \text{ S/m}$	dazwischen	$< 10^{-8} \text{ S/m}$
ρ	$< 10^{-6} \Omega\text{m}$	dazwischen	$> 10^8 \Omega\text{m}$

- c) Finden Sie heraus, was der Flächenwiderstand einer Schicht ist und wie dieser mit dem Widerstand sowie dem spezifischen Widerstand zusammenhängt.

Der Widerstand eines Leiters lässt sich berechnen mittels

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (17)$$

Im Falle dünner Schichten separiert man die Dicke d der Schicht von der Breite w und der Länge l und erhält

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{d \cdot w} = \frac{\rho}{d} \frac{l}{w} \quad (18)$$

Die Größe

$$\rho_{\square} := \frac{\rho}{d} \quad (19)$$

bezeichnet man als Flächenwiderstand. Der Flächenwiderstand wird zur Beschreibung dünner Schichten benutzt und wird für diese zum Ersatz des materialspezifischen Parameters ρ . Seine Einheit ist $[\rho_{\square}] = \Omega$. Um Verwechslungen mit dem Widerstand R zu vermeiden schreibt man auch oft $[\rho_{\square}] = \frac{\Omega}{\square}$, in Worten: «Ohms per Square».

- d) Warum ist der Widerstand einer quadratischen leitenden Fläche immer gleich?

Aus

$$R = \rho \frac{l}{d \cdot w} \quad (20)$$

folgt für $w = l$, also quadratische Flächen, direkt

$$R = \frac{\rho}{d} = \rho_{\square}. \quad (21)$$

Dieser Wert ist aber unabhängig von w , und damit unabhängig von der Größe der quadratischen Fläche. Dies erklärt auch die gewählte Bezeichnung $[\rho_{\square}] = \frac{\Omega}{\square}$: Der Flächenwiderstand beschreibt den Widerstand eines Materials für eine quadratische Fläche in «Ohm pro Quadratfläche».

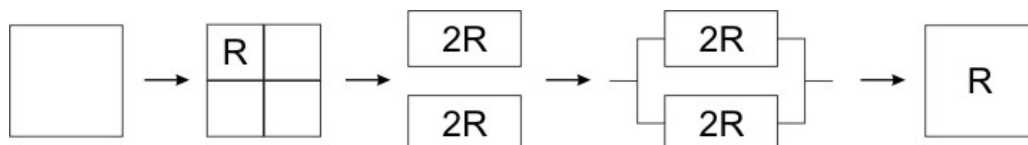


Abb. 2: Bestimmung des Widerstandes einer quadratischen, leitenden Fläche

Abbildung 2 zeigt schematisch eine andere Möglichkeit, wie man den Widerstand für eine quadratische Fläche berechnen kann. Man unterteilt die Fläche in vier gleichgroße Subflächen, jede mit dem Widerstand R . Zuerst bestimmt man den Serienwiderstand, er beträgt $2R$. Der Parallelwiderstand berechnet sich zu $\frac{1}{R_{\text{Gesamt}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \rightarrow R_{\text{Gesamt}} = R$. Da man dieses Verfahren bis zu beliebig großen oder kleinen Quadraten durchführen kann, folgt erneut die Unabhängigkeit des Widerstands einer quadratischen Fläche von deren Größe.

- e) Informieren Sie sich, wie eine Vier-Punkt-Messung zur Bestimmung des Flächenwiderstands eines Halbleiters durchgeführt wird. Skizzieren Sie den Aufbau. Welche Vorteile hat eine solche Messung gegenüber der Messung mit einer SMU oder einem Multimeter?

Für eine Vier-Punkt-Messung werden vier Kontaktstifte in gleichem Abstand in einer Reihe angeordnet. Zwischen den beiden äußeren wird ein bestimmter Strom eingepreßt. Nun kann über den beiden inneren Stiften die Potentialdifferenz abgegriffen werden, aus der sich der Flächenwiderstand berechnet. Der Vorteil dieser Methode ist, dass man keinen Einfluss von Kontaktwiderständen mehr berücksichtigen muss, da über die Kontakte des Spannungsmessers kein Strom fließt.

- f) Eine weitere gebräuchliche Messmethode für Flächenwiderstände ist die van-der-Pauw-Methode. Beschreiben Sie auch diese kurz und nennen Sie Vorteile dieser Methode.

Wie auch die Vier-Punkt-Messung dient die Van-der-Pauw-Messmethode zur Bestimmung des elektrischen Flächenwiderstandes dünner, homogener Schichten. Zunächst werden am Rand eines beliebig geformten Gebiets vier beliebige Punkte kontaktiert. Dann wird die Spannung über zwei der Kontakte gemessen, während über

den übrigen zwei ein Strom eingeprägt wird. Die Messung wird nach zyklischer Vertauschung der Kontakte wiederholt. Aus den gemessenen Daten kann nun unabhängig von der Position der Kontakte der Flächenwiderstand ermittelt werden.