

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie
 Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer /
 Dipl.-Phys. Manuel Reinhard /
 Dipl.-Ing. Jens Czolk
 Engesserstraße 13
 76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

1. Übungsblatt
 19. April 2012
 Besprechung:
 Übung 27. April 2012
 Tutorien 23.-27. April 2012

Dozent:	Prof. Uli Lemmer, Sprechstunde: nach Vereinbarung, Geb 30.34 (LTI)
Übungsdozenten:	Dipl.-Phys. Manuel Reinhard, Dipl.-Ing. Jens Czolk
Vorlesung:	Donnerstag 11:30 Uhr, MTI-Hörsaal, Geb. 30.33
Saalübung:	Freitag 11:30 Uhr (ca. 14-tg.), NTI-Hörsaal, Geb. 30.10
Übungstermine:	27.04., 11.05., 25.05., 15.06., 22.06., 06.07. und 13.07.
Tutorien:	Seminarraum des LTI (Raum 119), Geb. 30.34 Seminarraum des IEH (Raum 011), Geb. 30.35 Seminarraum des IBT (Raum -101), Geb. 30.31
Tutoriumstermine:	KW 17, 19, 21, 24, 26, 27, 29
Klausur:	5.10.2012, 11-13 Uhr
Informationen:	http://www.lti.kit.edu/4668_5707.php
Downloads:	https://studium.kit.edu/sites/vab/0xD3810054D3BDD345A01DE91352A4BE47 bzw. http://tinyurl.com/FE-SS12

Organisation der Übungen und Tutorien:

Die Saalübung und die Tutorien finden in einem ca. 14-tägigen Rhythmus an den oben angegebenen Terminen statt. Da erfahrungsgemäß Übung und Tutorien in den Wochen mit Donnerstagsfeiertagen schlecht besucht sind, wurden diese Wochen bei der Planung ausgespart, wodurch manchmal Übung und Tutorien in der gleichen Woche stattfinden. Insgesamt werden wir 14 Tutoriumsveranstaltungen pro Tutoriumswoche anbieten. Sie können sich online für die Tutorien anmelden, das Prozedere ist dort genauer erläutert. Die maximale Größe der Tutorien wird 15 Teilnehmer betragen. Um Ihnen allen die Teilnahme daran zu ermöglichen, ist Ihre Anmeldung *verbindlich* und verpflichtet Sie zur Teilnahme.

Fragen inhaltlicher und organisatorischer Art können in den Tutorien und in der Übung gestellt werden. Sehen Sie bitte von Anfragen per Mail oder Telefon ab.

Erklärung zur Einteilung der Aufgaben:

Hinter jeder Aufgabe finden Sie eine Kombination von Buchstaben. Der erste ordnet die Aufgabe einer der folgenden Gruppen zu:

- Aufgaben, die in der Saalübung besprochen werden (**Ü**)
- Aufgaben, die in den Tutorien besprochen werden (**T**)
- *Optionale* Aufgaben, die zum Selbststudium gedacht sind und weder in Übung noch im Tutorium besprochen werden. Sie sollen bei der Vertiefung des Stoffes und bei der Klausurvorbereitung helfen und können ruhig auch erst zu einem späteren Zeitpunkt bearbeitet

werden. Zur Lösung sollten Sie zusätzlich Sekundärliteratur aus der Bibliothek oder dem Internet nutzen. (S)

Des Weiteren findet sich hinter der Aufgabeneinteilung ein Hinweis darauf, in welcher Vorlesung der hauptsächlich zur Lösung der Aufgabe benötigte Stoff vorkommt (**V1, V2, etc.**).

Hinter den einzelnen Teilaufgaben geben ein bis drei Sterne einen Hinweis auf die Schwierigkeit der Teilaufgabe (\star = vergleichsweise leicht, $\star\star\star$ = knifflig).

Bonus-Punkte:

Da wir das Vorrechnen an der Tafel von Studierenden in den Tutorien sehr begrüßen, möchten wir dafür gerne einen Anreiz bieten. Durch das Vorrechnen von Aufgaben im Wert von 3 Sternen kann ein Bonus-Punkt erlangt werden, der auf die Klausur-Punktzahl angerechnet werden wird.

1. Welle-/Teilchen-Dualismus (Ü - V1)

- a) Der (durchschnittliche) Mensch kann Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm gerade noch mit bloßem Auge wahrnehmen, wenn es in den Sehzellen der Netzhaut eine Energie von mindestens $W_E = 2 \cdot 10^{-18}$ J umsetzt. Um wie viele Photonen muss es sich dabei mindestens handeln? (\star)
- b) Bestimmen Sie die DE-BROGLIE Wellenlänge einer Bowlingkugel mit der Masse $m_B = 8$ kg und der Geschwindigkeit $v_B = 4$ m/s. Erörtern Sie an diesem Beispiel, warum wir hier die Effekte der Wellennatur nicht beobachten. (\star)
- c) Bestimmen Sie die DE-BROGLIE Wellenlänge λ_e eines Elektrons mit der für ein Elektronenmikroskop typischen kinetischen Energie $W = 20$ keV. Sie können dabei die nicht-relativistische Formel für den Impuls benutzen. (\star)

2. Beugung hochenergetischer Elektronen in Reflexion (Ü - V1)

Bei der so genannten RHEED-Methode (Reflection High Energy Electron Diffraction) zur Untersuchung von Oberflächen wird ein Elektronen-Strahl unter einem flachen Winkel auf eine Oberfläche geschossen. Die reflektierte Intensität wird gemessen. Bei der Bragg-Reflexion zeigt sich erneut die Wellennatur der Elektronen. Aus den Mustern der unter verschiedenen Winkeln eingeschossenen Elektronen lassen sich Rückschlüsse auf die Struktur der Oberfläche ziehen. Das Verfahren kann zum Beispiel zum Überwachen des Wachstums von kristallinen Schichten verwendet werden.

- a) Nehmen Sie an, dass ein Material aus gleichartigen Schichten der atomaren Bausteine besteht, die parallel zur Oberfläche übereinander gestapelt sind (Abbildung 1). Ein solches Material zeigt beim Beschuss mit Elektronen einer definierten kinetischen Energie unter bestimmten Winkeln Maxima in der Reflexionsintensität. Erklären Sie dieses Phänomen! (\star)

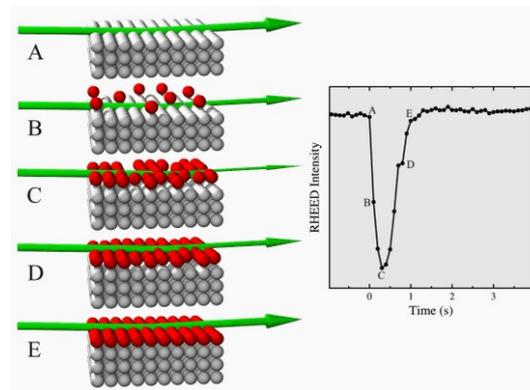


Abb. 1: Bei der RHEED-Methode wird die Intensität eines unter flachem Winkel reflektierten Elektronenstrahls gemessen. Während glatte Oberflächen (A und E) sehr gut reflektieren, sinkt die Intensität der Reflexion für raue Oberflächen (C). Durch zeitliche Aufnahme der RHEED Intensität kann so z.B. das Wachstum einzelner kristalliner Schichten beobachtet werden. [Quelle: <http://lippmaa.issp.u-tokyo.ac.jp>]

- b) LEED (Low Energy Electron Diffraction) ist ein ähnliches Verfahren. Versuchen Sie, die Unterschiede zwischen den beiden Methoden und daraus folgend ihre Einsatzgebiete zu bestimmen. (★)
- c) Bestimmen Sie die Formel für die Abhängigkeit zwischen Einfallswinkel ϕ , Abstand zwischen den Schichten d und Elektronenenergie für den Fall eines Intensitäts-Maximums. Die Energie-Impuls Beziehung des Elektrons kann in nicht-relativistischer Näherung verwendet werden. (★★)
- d) Nun haben die Schichten einen Abstand von $d = 5 \text{ \AA}$ und der Elektronenstrahl fällt unter einem Winkel von $\phi = 1^\circ$ ein. Bis zu welcher Energie müssen die Elektronen beschleunigt werden, um eine solche Oberfläche zu untersuchen? (★)
- e) Ähnliche Messungen wie mit RHEED können auch mit Röntgenbeugung, d. h. der Reflexion von Röntgenstrahlen an der Oberfläche durchgeführt werden. Wie verhalten sich die Energien der Röntgenquanten zu denen der Elektronen für die in 2d) benötigte Wellenlänge? (★)

3. Photoeffekt (T - V1)

- In welchem Wellenlängenbereich liegt der sichtbare Teil des Spektrums elektromagnetischer Strahlung? (★)
- Wie groß sind die Frequenzen (in Hertz) und Energiequanten (in Elektronenvolt bzw. Joule) einer Rundfunkwelle ($\lambda = 1000$ m), einer UKW-Welle ($\lambda = 3$ m) und weicher Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8}$ m)? (★)
- Eine Photozelle enthält eine Kaliumkathode ($W_a = 2,25$ eV). Berechnen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffekts. Welche Geschwindigkeit haben die schnellsten Elektronen bei Beleuchtung mit UV-Licht ($\lambda = 100$ nm). Wird die Geschwindigkeit bei Strahlung mit halber Wellenlänge doppelt so groß? (★★)
- Wie groß muss die angelegte Spannung U sein, damit die aus einer Magnesium-Kathode ($W_a = 3,7$ eV) durch Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 302$ nm herausgeschlagenen Elektronen gerade nicht die Anode erreichen? (★★)
- Zur richtigen Belichtung eines Films mit Silberkörnern benötigt man bei $\lambda = 550$ nm etwa 10^{-6} J/m². Wie viele Photonen sind für 1 mm² lichtempfindliche Fläche nötig? (★)

4. Doppelspalt-Experiment (T - V1)

- Skizzieren Sie ein Doppelspalt-Experiment für Wasserwellen und Gewehrkugeln. Was ist der gravierendste Unterschied zwischen beiden Fällen? (★)
- Nun wird das Doppelspalt-Experiment mit Elektronen ausgeführt. Welche überraschenden Ergebnisse erhält man? (★)
- Der Abstand des Detektionsschirms vom Doppelspalt sei L , der Abstand beider Spalte d . Leiten sie die Bedingung für das Auftreten konstruktiver Interferenz an einem Punkt x auf dem Schirm (siehe Abb. 2) in Abhängigkeit der Wellenlänge der einfallenden Elektronen her. Gehen Sie davon aus, dass der Abstand vom Spalt zum Schirm L im Vergleich zum Spaltabstand d und x sehr groß ist. (★★★)

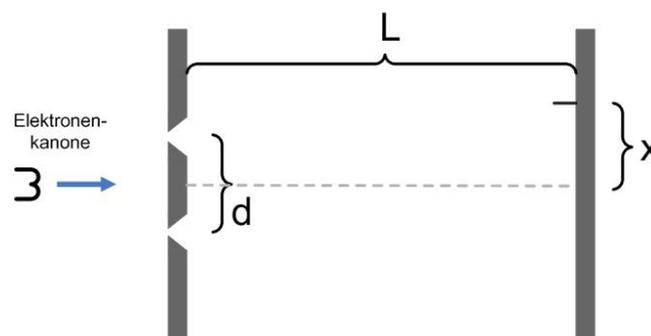


Abb. 2: Skizze zum Doppelspalt-Experiment

- Intensitätsmaxima treten nach den Berechnungen aus der vorherigen Aufgabe 4c) auf für $x = m\lambda L/d$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Wie groß ist der Abstand zweier benachbarter

- b) In der Ultra-Kurzzeitspektroskopie kommen gepulste Laser mit einer Pulslänge von wenigen Femtosekunden zum Einsatz. Schätzen Sie die spektrale Breite $\Delta\nu$ eines GAUSS-Pulses $f(t) \propto \exp(-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2})$ mit einer halben Breite von $\Delta t = 10$ fs ab. Vergleichen Sie hierzu die Fourier-Transformierte von $f(t)$ mit einem GAUSS-Puls im Frequenzraum $g(\omega) \propto \exp(-\frac{\omega^2}{2(\Delta\omega)^2})$. (★★)

9. Dispersion I (Ü - V2)

- a) Skizzieren Sie die GAUSS-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (1)$$

für $\mu = 0$, $\sigma = 1$ sowie für $\mu = 2$, $\sigma = 4$. Welche Bedeutung haben die beiden Parameter? (★)

- b) Was bedeutet der Begriff 'Dispersion' in Zusammenhang mit Wellenpaketen? (★)
 c) Was bezeichnet man als Dispersionsrelation? Wie sehen die Dispersionsrelationen für ein freies Elektron sowie für ein Photon im Vakuum aus? (★)
 d) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_G für das freie quantenmechanische Elektron und ein Vakuum-Photon. (★)

10. Unschärferelation (Ü - V2)

- a) Was bedeutet der Begriff „Unschärferelation“ konkret? Welche anderen Größen als Ort und Impuls sind ebenfalls über Unschärfe-Relationen verknüpft? (★)
 b) Die Position eines Wassertropfens von 1 mm Durchmesser soll mit einer Genauigkeit von 10^{-3} mm bestimmt werden. Was folgt daraus für die quantenmechanische Unschärfe der Geschwindigkeit? (★)
 c) Ein Elektron, das sich im attraktiven Coulombfeld $-e^2/4\pi\epsilon_0 r$ eines Protons bewegt, fällt nach der klassischen Physik (unter Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung) ins Zentrum. Schätzen Sie den Impuls des Elektrons ab, das sich im Abstand r um den Kern bewegt. Bestimmen Sie hieraus das Gesamtpotential Φ , in dem sich das Elektron befindet. Bestimmen Sie aus dem Minimum des Potentials den Abstand des Elektrons zum Proton und die Energie des Elektrons. (★★)

11. Dispersion II (S - V2)

- a) Als Dispersionsparameter bezeichnet man den Ausdruck $\beta = 1/2 \cdot \partial^2\omega/\partial k^2$. Berechnen Sie β für die beiden Teilchen aus Aufgabe 9d). (★)
 b) Entwickeln Sie $\omega(k)$ um eine feste Wellenzahl k_0 . Brechen Sie die Entwicklung nach dem quadratischen Term ab und benutzen Sie die Ausdrücke aus den Aufgaben 9d) und 11a), um die Ableitungen zu ersetzen. (★★)

- c) Betrachten Sie das GAUSSsche Wellenpaket der Form $\tilde{\psi}(k, t) = C \exp(-\alpha(k - k_0)^2) \exp(-j\omega(k)t)$. Hier sind C und α positive Konstanten. Setzen Sie die Entwicklung bis zum quadratischen Glied aus der letzten Aufgabe für $\omega(k)$ ein. Nun leiten Sie den Ausdruck für die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x, t)$ durch Fourier-Transformation des Wellenpakets $\tilde{\psi}(k, t)$ her. (***)
- d) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ρ für das Wellenpaket. Falls Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie:

$$\psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\exp(j(k_0x - \omega(k_0)t))}{\sqrt{\alpha + j\beta t}} \exp\left(-\frac{(x - v_G t)^2}{4(\alpha + j\beta t)}\right) \quad (2)$$

(**)

- e) Was kann man über die Form des Wellenpakets aus Aufgabe 11d) sagen? Geben Sie den Ausdruck für die Breite des Wellenpakets an. Welchen fundamentalen Unterschied erkennt man zwischen dem Wellenpaket des freien Elektrons und des Photons? (**)
- f) Entnehmen Sie dem Ausdruck aus Aufgabe 11c) die Breite der Wellenfunktion im k -Raum. Setzen sie diesen und die Breite im Ortsraum aus dem letzten Aufgabenteil in die Unschärferelation ein. Zeigen Sie, dass diese für ein freies Elektron für alle Zeiten erfüllt ist. (**)