

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer /

Dipl.-Phys. Manuel Reinhard /

Dipl.-Ing. Jens Czolk

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

Lösung zum 7. Übungsblatt

20. Juli 2012

Besprechung:

Übung 13. Juli 2012

Tutorien 16.-20. Juli 2012

45. Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung (Ü - V10)

Ein Halbleiter habe eine Bandlücke von $W_g = 1 \text{ eV}$. Elektronen und Löcher sollen eine effektive Masse gleich der freien Elektronenmasse haben. Der Halbleiter sei p-dotiert mit einer Akzeptorkonzentration von $p = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Das Akzeptorniveau liege $0,065 \text{ eV}$ über dem Valenzband.

- a) Wie groß ist die Dichte der Löcher bei $T=300 \text{ K}$ (Die Lage des Fermi-niveaus kann aus Abbildung 1 abgeschätzt werden)? Vergleichen Sie diese mit der Dichte der Löcher in einem undotierten Halbleiter mit sonst gleichen Eigenschaften. (★★)

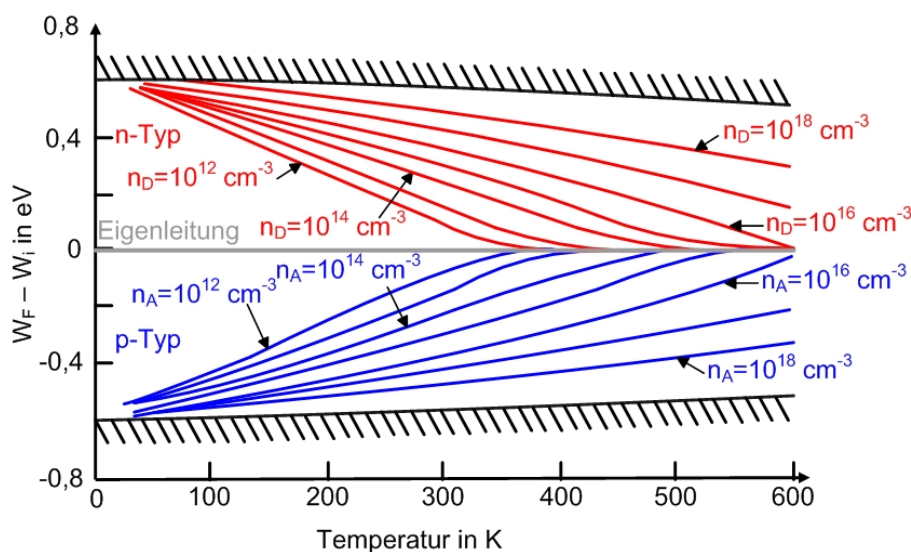


Abbildung 1: Fermienergie über Temperatur

Wir betrachten zunächst den undotierten Halbleiter. In diesem sind die Dichten der Löcher und der freien Elektronen gleich der intrinsischen Ladungsträgerdichte. Für die Löcherdichte gilt also:

$$p = n_i = \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (1)$$

Nun schauen wir uns den dotierten Halbleiter an. Die Dichte der ionisierten Störstellen, d.h. der mit Elektronen besetzten Akzeptorniveaus im p-dotierten Halbleiter

ergibt sich zu:

$$n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)} \quad (2)$$

Zur Berechnung lesen wir aus der Abbildung 1 ab, dass bei $T = 300 \text{ K}$ das Fermi-niveau ungefähr $0,2 \text{ eV}$ oberhalb des Valenzbandes liegt, also $W_F = W_V + 0,2 \text{ eV}$. Das Akzeptorniveau liegt bei $W_A = W_V + 0,065 \text{ eV}$. Somit erhalten wir:

$$W_A - W_F = W_V + 0,065 \text{ eV} - W_V - 0,2 \text{ eV} = -0,135 \text{ eV} \quad (3)$$

Eingesetzt in unsere Gleichung folgt mit $k_B T = 0,026 \text{ eV}$.

$$n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{0,135 \text{ eV}}{0,026 \text{ eV}}\right)} = 0,99 n_A = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (4)$$

Fast alle Akzeptoren sind ionisiert, die Dichte der Löcher liegt also ungefähr bei der Dotierdichte der Akzeptoren.

Vergleichen wir die Dichte der ionisierten Störstellen mit der intrinsischen Löcherdichte, so gilt $n_A^- \gg n_i$. Damit können wir annehmen, dass gilt

$$p \approx n_A^- = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (5)$$

Die Anzahl der Löcher im intrinsischen Halbleiter liegt damit weit unter der Löcherdichte im dotierten. Im hinreichend dotierten Halbleiter können also die durch Band-Band-Übergänge erzeugten freien Ladungsträger bei Raumtemperatur vernachlässigt werden.

- b) Bestimmen Sie nun die Dichten der freien Elektronen für beide Fälle in a). (★)

Im intrinsischen Halbleiter ist die Anzahl der freien Elektronen gleich der der Löcher, da freie Ladungsträger immer in Paaren erzeugt werden. Es gilt also:

$$n = p = n_i = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (6)$$

Im dotierten Halbleiter nutzen wir das Massenwirkungsgesetz $np = n_i^2$ und erhalten:

$$n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (7)$$

Die Dichte der freien Elektronen bleibt also bei p-Dotierung nicht gleich, sondern wird durch die Dotierung erniedrigt!

- c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ bei $T=300 \text{ K}$ unter der Annahme einer Löcherbeweglichkeit von $100 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $1500 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$. (★)

Die Leitfähigkeit ist:

$$\sigma = e_0(\mu_p p + \mu_n n) \quad (8)$$

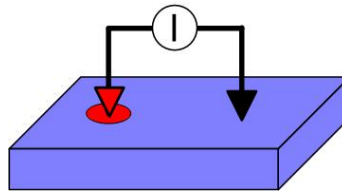
Mit den Informationen aus den vorhergehenden Aufgabenteilen können wir die freien Elektronen im dotierten Halbleiter vernachlässigen. Es gilt also:

$$\sigma = e_0(\mu_p p) = 0,16 \text{ AV}^{-1}\text{cm}^{-1} \quad (9)$$

46. n oder p? (T/S - V10)

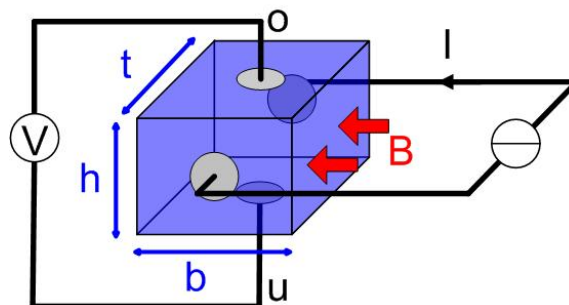
Sie müssen die Dotierung in einem unbekannten Halbleiterplättchen bestimmen.

- a) Ihnen steht die abgebildete Anordnung zur Verfügung. Das Messgerät besteht aus zwei Messspitzen und einem Amperemeter, das zwischen die beiden Messspitzen geschaltet werden kann. Eine der beiden Messspitzen kann erhitzt werden. Erläutern Sie, wie mit Hilfe dieser Apparatur bestimmt werden kann, wie die Halbleiterprobe dotiert ist. (★★★)



Bei dieser Messmethode nutzt man Diffusions-Effekte aus. In der Nähe der heißen Messspitze werden die freien Ladungsträger erhitzt, der Diffusionskoeffizient erhöht sich und die Ladungsträger können sich weiter verteilen. Daraus resultiert ein Mangel der Majoritäten in der Nähe der Messspitze, zum Beispiel baut sich in einem n-dotierten Halbleiter eine positive Ladung auf. Damit liegt zwischen beiden Messspitzen der Apparatur ein Feld an und ein Ausgleichsstrom kann fließen. Die Richtung des Stromes hängt von der Art der Dotierung ab. Diese kann somit bestimmt werden.

- b) Zum gleichen Zweck kann eine Hall-Messung durchgeführt werden. Hierbei werden vier Kontakte an das Halbleiterplättchen angebracht. Durch die Kontaktierung an den Stirnflächen lässt man einen Strom fließen, senkrecht dazu kann die Spannung gemessen werden. Zu guter letzt wird noch ein Magnetfeld angelegt. Wie funktioniert die Bestimmung der Dotierung mit dieser Methode? (★★)



Auf bewegte Ladungsträger mit der Ladung q wirkt im magnetischen Feld die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (10)$$

Diese wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung der Teilchen und zu dem angelegten Magnetfeld. In unserer Konfiguration (siehe Abbildung) bewegen sich die Teilchen zwischen den Stirnflächen des Halbleiterklotzes. Wenn der Pluspol der Spannungsquelle mit dem hinteren Kontakt verbunden ist, werden sich die Elektronen in Richtung diesen Kontaktes, die Löcher in die Gegenrichtung bewegen. Elektronen und Löcher werden also beide nach unten abgelenkt, an der Unterseite der Probe bildet sich ein Ladungsträgerüberschuss. Misst man nun die Spannung zwischen Ober- und Unterseite und stellt deren Richtung fest, folgt daraus, ob die Majoritätsträger Elektronen oder Löcher sind. Somit kann mit einer Hall-Messung die Dotierung des Halbleiters ermittelt werden.

- c) Es fließe ein Strom durch die Stirnflächen und ein Magnetfeld sei angelegt. Leiten Sie einen Ausdruck für den Widerstand der Halbleiterprobe senkrecht zu Magnetfeld und Strom (zwischen Anschlüssen o und u) her. (★★)

Mit der Argumentation aus der letzten Aufgabe bildet sich eine Ladungsträger-Überschuss an der Unterseite der Probe. Ladungsträger werden aber nur so lange angehäuft, bis die Lorentzkraft durch die entgegengesetzt wirkende elektrische Kraft der getrennten Ladungen ausgeglichen wird. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst einen stark p-dotierten Halbleiter, bei dem sich an der Unterseite praktisch nur Löcher anlagern. Für diese gilt das Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_E \quad (11)$$

$$e_0 \vec{v} \times \vec{B} = e_0 \vec{E}_H \quad (12)$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}_H \quad (13)$$

Wenn wir uns die Ladungsanhäufung wie einen Plattenkondensator vorstellen, folgt für die Hallspannung U_H :

$$E_H = \frac{U_H}{h} \quad (14)$$

Der so genannte «Hall-Widerstand» ist nun der Quotient aus gemessener Hall-Spannung zu angelegtem Strom (bei einer gegebenen angelegten magnetischen Flussdichte):

$$R_H = \frac{U_H}{I} \quad (15)$$

Der Hall-Widerstand beschreibt also keinen ohmschen Widerstand im üblichen Sinne, sondern schlicht ein Verhältnis der zueinander senkrecht stehenden Größen Spannung und Strom.

Um den anliegenden Strom mit der Hall-Spannung in Verbindung zu bringen, müssen wir diesen durch die Geschwindigkeit der p Teilchen pro Volumen mit dem Strom durch die Fläche $A = h \cdot b$ ausdrücken. Es gilt:

$$I = e_0 v p A \quad (16)$$

Einsetzen in Gleichung 13 liefert

$$vB = E_H \quad (17)$$

$$\frac{I}{e_0 p A} B = \frac{U_H}{h} \quad (18)$$

$$U_H = \frac{IB}{e_0 p b} \quad (19)$$

Damit ergibt sich der Hall-Widerstand zu:

$$R_H = \frac{B}{e_0 p b} \quad (20)$$

Führt man die gleiche Rechnung für einen stark n-dotierten Halbleiter durch, so ergibt sich ein negativer Hall-Widerstand:

$$R_H = -\frac{B}{e_0 n b} \quad (21)$$

Eine Betrachtung für schwach dotierte oder intrinsische Halbleiter, in denen sowohl Elektronen als auch Löcher zur Hallspannung beitragen, ist deutlich schwieriger zu berechnen, weil in die Geschwindigkeit v der Elektronen bzw. Löcher die unterschiedliche Beweglichkeit der jeweiligen Ladungsträger eingeht und diese damit gegeneinander über die Beweglichkeit zu gewichten sind. Ohne die Rechnung hier auszuführen gilt allgemein:

$$R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e_0(n\mu_n + p\mu_p)^2} \frac{B}{b} \quad (22)$$

Daraus ergeben sich auch die vorher beschriebenen Sonderfälle für stark dotierte Halbleiter, wenn n bzw. p zu 0 gesetzt werden.

47. Photodioden (T - V11)

Sie beleuchten einen Galliumarsenid-Kristall (direkter Halbleiter mit $W_g = 1,43$ eV bei Raumtemperatur) mit Licht.

- a) Können Sie infrarotes Licht mit einem solchen Kristall detektieren? (★)

In einem Halbleiterkristall können nur Photonen mit einer Energie, die die Bandlückenenergie übertrifft, absorbiert werden. Wir berechnen daher:

$$W_G = h\nu_G \rightarrow \lambda_G = \frac{hc}{W_G} = 868 \text{ nm} \quad (23)$$

Nur Licht mit geringerer Wellenlänge kann absorbiert werden. Der infrarote Bereich beginnt etwa bei 800 nm, daher kann nur das ganz nahe Infrarot detektiert werden.

- b) Welchen Einfluß hat die Temperatur auf die Absorptions-Kurve? (★)

Steigende Temperatur versetzt die Atomrümpfe des Gitters in Schwingungen. Dementsprechend benötigen die Atome mehr Platz, das Gitter dehnt sich aus und die Gitterkonstante wird größer. Analog zum ∞ -Potentialtopf rücken die Energieniveaus bzw. Bänder dann näher zusammen. Die Bandlücke wird damit kleiner und es können größere Wellenlängen absorbiert werden. Dieses Verhalten ist auch in Abbildung 1 illustriert.

- c) Sie bestrahlen den Kristall 100 fs lang mit rotem Licht der Wellenlänge 780 nm und der Pulsenergie 10 nJ. Wieviele Elektronen werden durch diesen Lichtpuls in das Leitungsband angeregt? Wegen der Kürze des Pulses können Diffusionsprozesse vernachlässigt werden. (★★)

Die Energie des Pulses setzt sich aus den einzelnen Energiequanten der Photonen zusammen.

$$W_{Puls} = N \cdot W_{Photon} = N \frac{hc}{\lambda_{Photon}} \rightarrow N = \frac{W_{Puls} \lambda_{Photon}}{hc} = 3,9 \cdot 10^{10} \quad (24)$$

Geht man vereinfacht davon aus, dass jedes Photon ein Elektron erzeugt, ist die Zahl der Elektronen $3,9 \cdot 10^{10}$.

- d) Sie wollen nun einen Detektor bauen, der 90 Prozent des einfallenden Lichts mit der Wellenlänge 618 nm auffängt. Wie dick muss der Detektor sein? Benutzen Sie Abbildung 2, um die Absorptionsdaten von GaAs zu ermitteln. (★★)

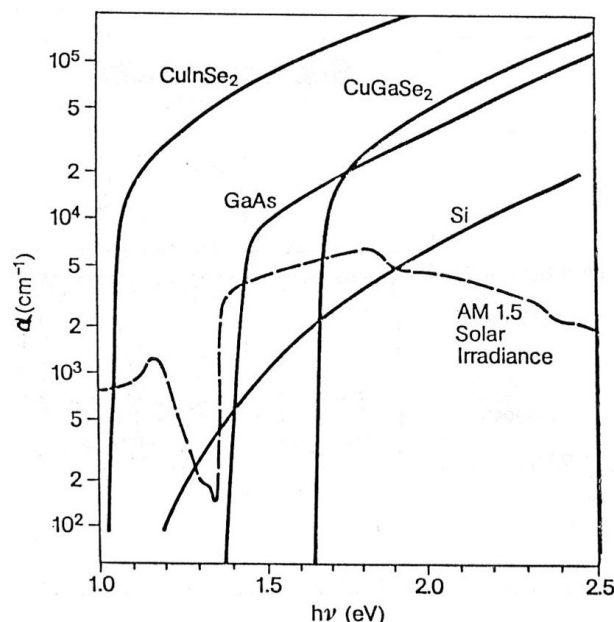


Abbildung 2: Absorption verschiedener Halbleiter

Die Absorption eines Halbleiters erlaubt eine Aussage darüber, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Photon einer bestimmten Wellenlänge absorbiert wird,

wenn es eine bestimmte Länge im Material propagiert. Die Photonenzahl ändert sich mit dieser Rate, also:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -rN \quad (25)$$

Das ist eine einfache Differenzialgleichung erster Ordnung, die wir durch Integrieren lösen können.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -rN \quad (26)$$

$$\int_{N_0}^N \frac{1}{N} dN = \int_0^x -r dx \quad (27)$$

$$\ln N - \ln N_0 = -rx \quad (28)$$

$$N = N_0 \exp(-rx) \quad (29)$$

Wir erhalten also einen exponentiellen Abfall der Photonenzahl N mit der Propagationslänge im Kristall. Die Rate r entspricht dem Absorptionskoeffizienten α (beachten Sie, dass dieser üblicherweise in der Einheit cm^{-1} angegeben wird.)

Nun müssen wir diesen Koeffizienten bei der gewünschten Wellenlänge aus der Abbildung ermitteln. Für 618 nm erhalten wir eine Energie von 2 eV und damit $\alpha_{\text{GaAs}} = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$. In unserem Detektor der Dicke d sollen 90 Prozent der einfallenden Photonen absorbiert werden, somit bleiben nach dem Durchdringen des Detektors nur noch 10 Prozent der Photonen übrig, also:

$$\frac{N}{N_0} = 0,1 = \exp(-\alpha d) \quad (30)$$

$$\rightarrow d = -\frac{\ln 0,1}{\alpha} = 767,5 \text{ nm} \quad (31)$$

Der Gallium-Arsenid-Detektor muss folglich 767,5 nm dick sein.

- e) Wie dick muss ein entsprechender Silizium-Detektor sein, um die gleiche Absorption zu erreichen? (★★)

Mit der Argumentation der letzten Aufgabe erhalten wir (das Ablesen aus der Abbildung ergibt $\alpha_{\text{Si}} = 6 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$) eine Dicke von 3,8 μm für den Silizium-Detektor. Silizium absorbiert also wesentlich schlechter als GaAs, da Silizium ein indirekter Halbleiter ist. Trotzdem verwendet man für Solarzellen bevorzugt Silizium, da GaAs ungleich teurer und vor allem giftig ist.

48. Diffusion (Ü/S - V11)

Ein Halbleiter-Stab vom p-Typ wird beleuchtet. Im ganzen Volumen des Halbleiters werden gleichmäßig mit der Rate g_L Ladungsträgerpaare erzeugt. Gleichzeitig werden an der Stelle $x = 0$, am Anfang des Stabes, Ladungsträger entzogen, was zu $\Delta n_p = 0$ bei $x = 0$ führt. In die positive x -Richtung kann der Stab als unendlich ausgedehnt angenommen werden. Bestimmen Sie $\Delta n_p(x)$ unter der Annahme, dass $\Delta n_p(x) \ll p_0$ und stationäre Bedingungen gelten. (★★★)

Wir müssen die Kontinuitätsgleichung für diesen Fall anpassen. Dazu machen wir zunächst zwei Annahmen. Erstens können wir nach Aufgabentext von stationären Bedingungen ausgehen, die Zeitableitung wird also Null. Zum Zweiten werden bei Photogeneration nur Ladungsträgerpaare erzeugt. Die Ladungsneutralität im Halbleiter bleibt also erhalten, weswegen sich kein elektrisches Feld ausbildet. Zuletzt ist es erlaubt, die Kontinuitätsgleichung nur für die Überschussladungsträger aufzustellen. Damit erhalten wir:

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + g_L - r \quad (32)$$

Die Rekombinationsrate nehmen wir zu $r = \Delta n / \tau_n$ an.

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + g_L - \Delta n / \tau_n \quad (33)$$

$$0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} + g_L \tau_n - \Delta n \quad (34)$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Lösung erhalten wir aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung plus einer beliebigen Lösung der inhomogenen:

$$\Delta n = C_1 y_{1h} + C_2 y_{2h} + y_i \quad (35)$$

Die homogene Gleichung folgt zu:

$$0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n \quad (36)$$

Die zweite Ableitung der gesuchten Funktion gleicht bis auf eine Konstante der Funktion, das trifft für die Exponentialfunktion zu.

$$y_h = C_1 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} x\right) \quad (37)$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung wird im Allgemeinen durch Variation der Konstanten berechnet. Im Falle konstanter Inhomogenitäten und Vorfaktoren kann man eine Lösung jedoch leicht erraten.

$$y_i = g_L \tau_n \quad (38)$$

Durch Einsetzen verifiziert man schnell, dass diese Funktion die Gleichung löst. Insgesamt erhalten wir:

$$\Delta n = C_1 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} x\right) + g_L \tau_n \quad (39)$$

Nun benötigen wir noch zwei Randbedingungen, um die Konstanten zu bestimmen. Die erste ist im Aufgabentext gegeben $\Delta n(x = 0) = 0$. Als zweites fordern wir, dass weit weg von $x = 0$ die Störung der Überschussladungsträgerdichte verschwindet ($\Delta n \rightarrow \text{const.}$ für $x \rightarrow \infty$), damit muss C_1 Null sein, um den exponentiell wachsenden Term zu unterdrücken. C_2 bestimmen wir zu:

$$\Delta n(x = 0) = 0 = +C_2 + g_L \tau_n \rightarrow C_2 = -g_L \tau_n \quad (40)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich somit zu:

$$\Delta n(x) = g_L \tau_n \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{D_n \tau_n}} x \right) \right) \quad (41)$$

49. Diffusionslänge (T - V11)

In einem stark n-dotierten Halbleiter wird bei $T = 300$ K an der Stelle $x = 0$ eine Überschussladungsträgerdichte p_0 aufrecht erhalten. Die Lebensdauer der überschüssigen Ladungsträger betrage τ_p . Die Ladungsträger seien entsprechend

$$p(x) = p_0 \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right)$$

verteilt. Bestimmen Sie mittels der Kontinuitätsgleichung den Zusammenhang zwischen der Diffusionslänge L_D und der Diffusionskonstante D_p . Warum muß $p(x)$ die angegebene Form haben? Berechnen Sie die Diffusionslänge L_D bei einer Beweglichkeit $\mu = 10^3 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ und einer Lebensdauer $\tau_p = 10^{-6} \text{ s}$. (★★)

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e} \nabla j - r_p \stackrel{1-\text{dim}}{=} -\frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x} - r_p \quad (42)$$

Diese Gleichung wird durch Exponentialfunktionen gelöst, wobei hier nur der exponentielle Abfall physikalisch Sinn macht. Der Diffusionsstrom j berechnet sich also aus:

$$j = -e D_p \frac{\partial p}{\partial x} = -e D_p \frac{\partial}{\partial x} \left(p_0 \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) \right) \quad (43)$$

Für die Rekombinationsrate r_p gilt

$$r_p = \frac{p}{\tau_p}, \quad (44)$$

d.h. wenn p Teilchen eine Lebensdauer von τ_p haben, dann „zerfallen“ p Teilchen in einer Zeitspanne τ_p .

Da laut Aufgabenstellung die Ladungsträgerdichte erhalten wird, gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (45)$$

$$-\frac{1}{e} \frac{\partial j}{\partial x} - r_p = 0 \quad (46)$$

$$-\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial x} \left(e D_p \frac{p_0}{L_D} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) \right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) = 0 \quad (47)$$

$$D_p \frac{p_0}{L_D^2} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) - \frac{p_0}{\tau_p} \exp \left(-\frac{x}{L_D} \right) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{D_p}{L_D^2} - \frac{1}{\tau_p} = 0 \quad (49)$$

$$\Rightarrow L_D = \sqrt{D_p \tau_p} \quad (50)$$

Mit Hilfe der Einsteinbeziehung $D = k_B T \mu / e$ erhalten wir für die angegebenen Werte

$$L_D = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{k_B T \mu}{e} \tau_p} = 50.8 \mu\text{m} \quad (51)$$

50. Halbleiter unter Beleuchtung (T - V11)

Wir betrachten einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d . An der Oberseite wird er homogen mit Licht bestrahlt. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

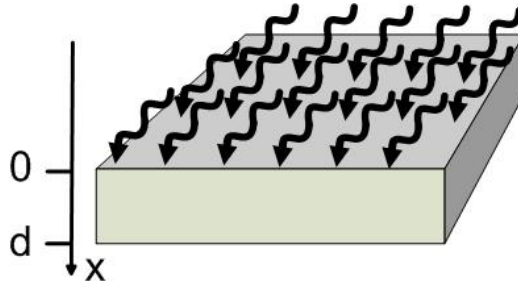


Abbildung 3: Absorption in einem Halbleiter der Dicke d

- a) Stellen Sie nun die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf und erklären Sie Ihr Vorgehen. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussträgerdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus. (★★)

Wir können uns auf die Überschussladungsträgerdichte beschränken, stellen also die Kontinuitätsgleichung für Δn auf. Da Ladungsneutralität herrscht, betrachten wir nur einen Diffusionsstrom. Außerhalb der Randzone gibt es keine Generation, für die Rekombination verwenden wir nach Aufgabenstellung $r = \Delta n / \tau_n$. Insgesamt gilt also:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (52)$$

Da die Bestrahlung stationär ist, erwarten wir zudem keine zeitliche Änderung, d.h. $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$. Somit gilt:

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (53)$$

Auf der oberen Seite des Quaders legt die Injektion der Ladungsträger durch Bestrahlung die Randbedingung fest.

$$\Delta n(x=0) = \Delta n_0 \quad (54)$$

Alle Elektronen, die die Unterseite erreichen, werden sofort weggesaugt.

$$\Delta n(x=d) = 0 \quad (55)$$

- b) Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte. (★★)

Wir multiplizieren mit τ_n und erhalten:

$$0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n \quad (56)$$

Gesucht ist also eine Funktion, die gleich ihrer zweiten Ableitung multipliziert mit einer Konstanten ist. Dies trifft zum Beispiel für die Exponentialfunktion zu. Zwei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind also:

$$\Delta n(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right) \quad (57)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\Delta n_0 = C_1 + C_2 \quad (58)$$

$$0 = C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \quad (59)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems:

$$C_1 = -\Delta n_0 \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)} = -\Delta n_0 \frac{1}{\exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right) - 1} \quad (60)$$

$$C_2 = \Delta n_0 \left(1 + \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}\right) \quad (61)$$

$$= \Delta n_0 \left(\frac{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}\right) = \Delta n_0 \left(\frac{1}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}\right) \quad (62)$$

- c) Ein allgemeinerer Ausdruck für die Rekombinationsrate eines konstant beleuchteten Halbleiters habe die folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

Der Halbleiter sei stark n-dotiert. Weiterhin seien die Löcheranzahl und die Elektronenanzahl durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im dotierten unbeleuchteten Halbleiter (n_{dot} und p_{dot}) auf n bzw. p erhöht, wobei $p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ gelten soll. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen die Gleichung so weit wie möglich. (★)

Wir schreiben für die Anzahl der Ladungsträger $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$. Für die Störstellen-Rekombinationsrate gilt dann:

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (63)$$

$$= \frac{\overbrace{n_{dot} p_{dot}}^{=n_i^2} + \Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (64)$$

$$= \frac{\Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (65)$$

Aus den Informationen der Aufgabenstellung lässt sich schließen, dass durch die Ladungsträgerinjektion die Anzahl der Majoritäten fast unverändert bleibt, die der Minoritäten aber stark steigt. Daher können wir im Nenner alle Größen bis auf n_{dot} vernachlässigen. Im Zähler sind aus dem gleichen Grund gegenüber $\Delta p n_{dot}$ die anderen Terme klein. Es folgt somit, dass die Rekombinationsrate hauptsächlich durch die Lebensdauer der Minoritäten bestimmt wird:

$$r = \frac{\Delta p n_{dot}}{\tau_p n_{dot}} = \frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (66)$$

51. pn-Übergang (Ü - V12)

Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Ferminiveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

a) ...ohne äußere Vorspannung. (★)

Solange kein äußeres elektrisches Feld am pn-Übergang anliegt, befindet er sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Das elektrochemische Potential (gleichbedeutend mit dem Ferminiveau, siehe Skript Kapitel 9.1) ist im gesamten Halbleiter identisch. Weiterhin sind die Energieniveaus weit entfernt von der Raumladungszone unverändert, da hier noch die gleichen Ladungsträgerdichten vorherrschen wie vor dem Kontakt. Als letztes müssen nur noch die Valenz- und Leitungsbandkanten in den unterschiedlich dotierten Bereichen des Siliziums über die Raumladungszone hinweg verbunden werden. Dazu wird eine quadratische Verlauf angenommen, der sich aus der Poisson-Gleichung unter Annahme der Schottky-Näherung für die Raumladungen ergibt. Man erhält das in Abbildung 4 gezeigte Banddiagramm für den pn-Übergang ohne Vorspannung.

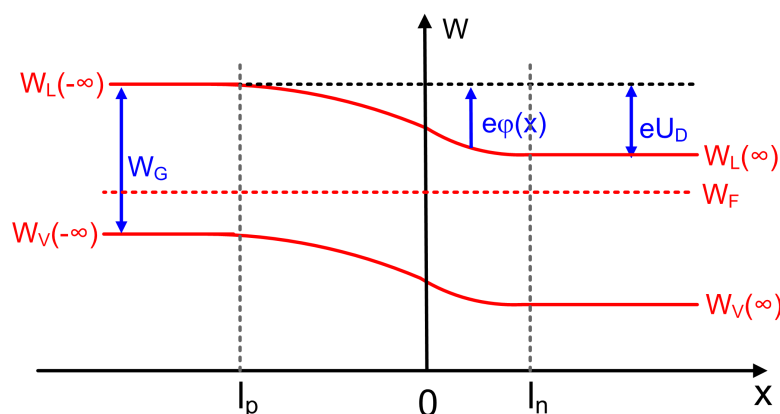


Abbildung 4: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

b) ...mit äußerer Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung) in Durchlassrichtung. (★★)

Sobald ein äußeres elektrisches Feld angelegt wird, befindet sich der pn-Übergang nicht mehr im Gleichgewicht. Ein einheitliches Ferminiveau für Löcher und Elektronen kann nicht mehr angegeben werden. Das Massenwirkungsgesetz gilt in der

Raumladungszone nicht. Da die Raumladungszone in erster Näherung als frei von beweglichen Ladungsträgern angenommen wird, ist ihr ohmscher Widerstand im Vergleich zum Rest des Halbleiters sehr hoch. Deshalb fällt die gesamte angelegte äußere Spannung U über der Raumladungszone ab. Die Ladungsträgerdichten für Löcher und Elektronen werden getrennt voneinander über sogenannte Quasi-Fermi-niveaus beschrieben. Die energetische Aufspaltung der Quasi-Fermi-niveaus entspricht dabei genau der angelegten äußeren Spannung multipliziert mit der Elementarladung e (siehe Abbildung 5). In Durchlassrichtung ($U > 0$) führt dies zu einer Verringerung der Potentialbarriere $e(U_D - U)$ und einer Verkleinerung der Raumladungszone. In Sperrrichtung ($U < 0$) verhält es sich genau umgekehrt.

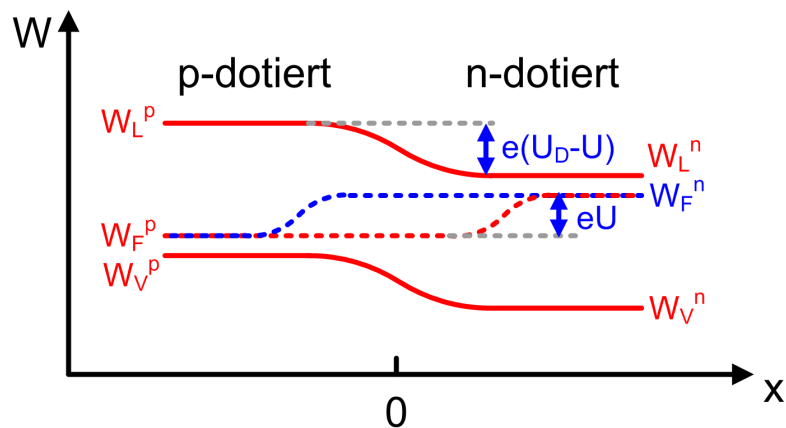


Abbildung 5: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung.

Entspricht die äußere Spannung genau der Diffusionsspannung U_D wird die Bandkrümmung genau ausgeglichen und man erhält den sogenannten Flachbandfall (Abbildung 6).

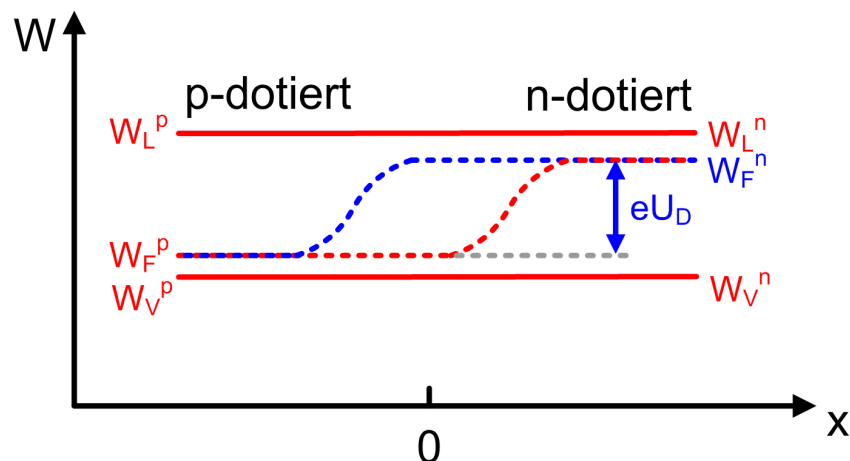


Abbildung 6: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung U_D (Flachbandfall) in Durchlassrichtung.

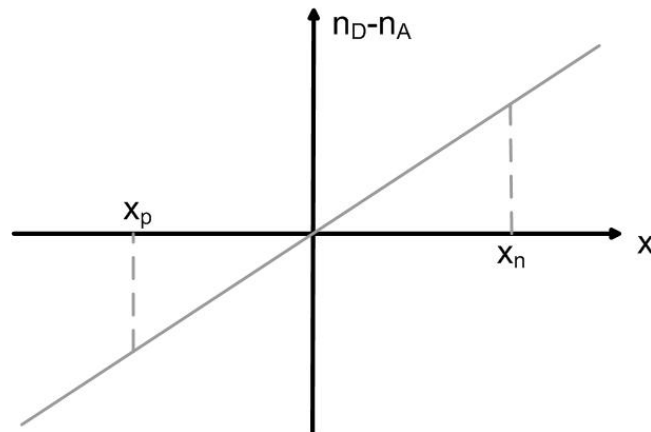


Abbildung 7: Dotierprofil eines pn-Übergangs

52. Elektrostatik einer pn-Diode mit linearem Dotierprofil (S - V12)

Gegeben sei ein pn-Übergang mit dem in Abbildung 7 dargestellten Dotierprofil. Aufgetragen ist die Differenz der Dichten der Donatoren n_D und der Akzeptoren n_A , mathematisch wird das Profil ausgedrückt durch $n_D - n_A = ax$ mit einer Konstanten $a > 0$. Ein solches Modell ist gut geeignet für einen pn-Übergang, der durch das tiefe Eindiffundieren von Akzeptoren in einen moderat bis stark dotierten n-Halbleiter hergestellt wurde.

- a) Nennen Sie ein weiteres Verfahren zur Dotierung von Halbleiterkristallen. Erläutern Sie, wie die beiden Verfahren funktionieren. (★)

Bei der Diffusionsmethode wird die zu behandelnde Oberfläche des Halbleiters mit dem gasförmigen, flüssigen oder festen Dotiermaterial in Kontakt gebracht. Das Konzentrations-Gefälle sorgt dann dafür, dass die Dotanden in den Halbleiter diffundieren. Bei epitaktischem Schichtwachstum kann das Dotiermaterial beim Herstellungsprozess beigemischt und so direkt ins Kristall-Gitter eingebaut werden. Ein weiteres Verfahren ist die Ionenimplantation, wo geladene Dotier-Ionen in den Halbleiter „geschossen“ werden.

- b) Beim abrupten pn-Übergang bildet sich eine Raumladungszone um den Punkt $x = 0$ aus. Beschreiben Sie, wie es zur Ausbildung der Raumladungszone kommt. (★)

Am pn-Übergang treffen sich Raumbereiche, in denen jeweils viele freie Elektronen oder Löcher existieren. Da beide Ladungsträgersorten frei beweglich sind, diffundieren sie ins jeweils andere Gebiet. Durch die damit verbundene Ladungstrennung (die ionisierten Dotieratom-Rümpfe bleiben zurück) baut sich ein elektrisches Feld auf, dass der Diffusion entgegenwirkt. An einem bestimmten Punkt wiegen sich der Diffusionsstrom und der Strom durch das elektrische Feld gerade auf, ein Gleichgewichtszustand ist die Folge. Allerdings gibt es dann auf beiden Seiten des Übergangs einen Bereich, in dem die Ladung der ionisierten Rümpfe nicht mehr durch freie Ladungsträger ausgeglichen wird. Diesen Bereich bezeichnet man als Raumladungszone.

- c) Die Raumladungszone erstreckt sich von $x_p < 0$ im p-dotierten Bereich bis $x_n > 0$ im n-dotierten Teil. Wie verhalten sich die Längen der beiden Bereiche zueinander, wenn man davon ausgeht, dass in der Raumladungszone keine beweglichen Ladungsträger existieren? (★)

Da die positive Ladung im n-dotierten Bereich und die negative Ladung im p-dotierten Bereich gleich groß sein müssen, gilt bei symmetrischer Dotierung $|x_n| = |x_p|$.

- d) Berechnen Sie den Verlauf des Feldes und des Potentials innerhalb des Halbleiters von einem Punkt $x < x_p$ bis zu einem Punkt $x > x_n$. Die dielektrische Konstante des verwendeten Materials ist $\epsilon_r = 12$. (★★★)

Das Vorgehen ist vollkommen analog zu dem beim abrupten pn-Übergang, wie er in der Vorlesung diskutiert wurde. Wir nehmen analog zum Schottky-Modell an, dass die Ladungsträgerdichte nur von der Dichte der Dotieratome bestimmt wird. Mit dem gegebenen Ladungsträgerdichteprofil $n_D - n_A = ax$ erhalten damit die Ladungsdichte $\rho = e(n_D - n_A) = eax$. Die Poisson-Gleichung liefert:

$$\rho = eax = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial x} \quad (67)$$

Da außerhalb der Raumladungszone der Kristall neutral ist, ist auch das elektrische Feld hier Null. Wir integrieren also ab dem linken Rand der Raumladungszone ($x = -d/2$):

$$\int_{-d/2}^x \rho(x) dx = \epsilon_0 \epsilon_r \int_{-d/2}^x \frac{\partial E}{\partial x} dx \quad (68)$$

$$\int_{-d/2}^x eax dx = \epsilon_0 \epsilon_r \int_{E(-d/2)}^{E(x)} dE \quad (69)$$

$$\frac{ea}{2} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) = \epsilon_0 \epsilon_r E(x) \quad (70)$$

Im letzten Schritt wurde dabei $E(-d/2) = 0$ verwendet. Für das elektrische Feld finden wir also:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & : x < -d/2 \\ \frac{ea}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) & : -d/2 \leq x \leq d/2 \\ 0 & : x > d/2 \end{cases} \quad (71)$$

Zum Potential kommt man über $E(x) = -d\phi/dx$:

$$\int_{-d/2}^x \frac{d\phi}{dx} dx = - \int_{-d/2}^x E dx \quad (72)$$

$$\int_{\phi(-d/2)}^{\phi(x)} d\phi = - \int_{-d/2}^x \frac{ea}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left(x^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) dx \quad (73)$$

$$\phi(x) - \phi(-d/2) = \frac{ea}{6\epsilon_0 \epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right) \quad (74)$$

Mit der Eichung $\phi(-\infty) = \phi(-d/2) = 0$ erhalten wir:

$$\phi(x) = \frac{ea}{6\epsilon_0\epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right) \quad (75)$$

Damit gilt für das Potential:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & : x < -d/2 \\ \frac{ea}{6\epsilon_0\epsilon_r} \left(2 \left(\frac{d}{2} \right)^3 + 3 \left(\frac{d}{2} \right)^2 x - x^3 \right) & : -d/2 \leq x \leq d/2 \\ \frac{4ea}{6\epsilon_0\epsilon_r} d^3 & : x > d/2 \end{cases} \quad (76)$$

- e) Skizzieren Sie den Verlauf der Bänder im Halbleiter in dem in Aufgabenteil d) beschriebenen Bereich. (★)

Die Form der Bänder entspricht dem negativen Verlauf des Potentials, da als Band in der Regel die Energie der negativ geladenen Elektronen $W(x) = -e\phi(x)$ aufgetragen wird, wohingegen das Potential selbst die Energie pro positiver Ladung beschreibt.