Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Dipl.-Phys. Jan Mescher
M. Sc. Nico Bolse
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
1. Übungsblatt
17. April 2014
Besprechung:
Übung 25. April 2014
Tutorien 05. Mai - 08. Mai 2014

Organisatorisches:
Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung und Vorbereitung der Aufgaben die Markierungen hinter dem Aufgabentitel: Die mit einem **Ü** markierten Aufgaben werden in der Saalübung, die mit einem **T** markierten Aufgaben werden in den Tutorien besprochen.

1. **Photoeffekt (T)**

   a) In welchem Wellenlängenbereich liegt der sichtbare Teil des Spektrums elektromagnetischer Strahlung?

   b) Wie groß sind die Frequenzen (in Hertz) und Energiequanten (in Elektronenvolt bzw. Joule) einer Rundfunkwelle ($\lambda = 1000$ m), einer UKW-Welle ($\lambda = 3$ m) und weicher Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8}$ m)?

   c) Eine Photozelle enthält eine Kaliumkathode ($W_a = 2,25$ eV). Berechnen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffekts. Welche Geschwindigkeit haben die schnellsten Elektronen bei Beleuchtung mit UV-Licht ($\lambda = 100$ nm)? Wird die Geschwindigkeit bei Strahlung mit halber Wellenlänge doppelt so groß?

   d) Wie groß muss die anglegte Spannung U sein, damit die aus einer Magnesium-Kathode ($W_a = 3,7$ eV) durch Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 302$ nm herausgeschlagenen Elektronen gerade nicht die Anode erreichen?

   e) Zur richtigen Belichtung eines Films mit Silberkörnern benötigt man bei $\lambda = 550$ nm etwa 10^{-6} J/m^2. Wie viele Photonen sind für 1 mm^2 lichtempfindliche Fläche nötig?

2. **Doppelspalt-Experiment (Ü)**
Laserlicht der Wellenlänge 633 nm fällt senkrecht auf einen Doppelspalt mit dem Spaltmittenabstand von $d = 0,30$ mm (siehe Abb. 1). Der Einfluss der Einzelspalte ist vernachlässigbar. Parallel zum Doppelspalt befindet sich im Abstand $L = 1,00$ m ein ebener Schirm.

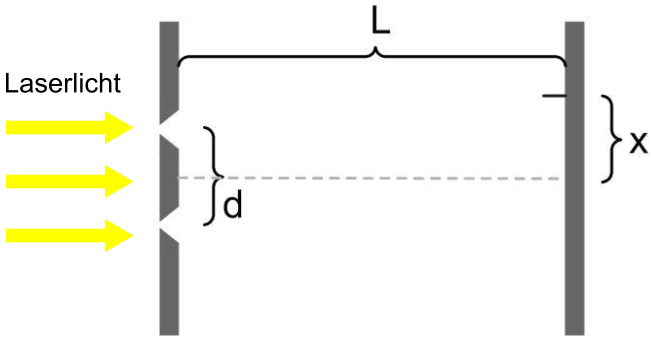

Abb. 1: Skizze zum Doppelspalt-Experiment

a) Was ist auf dem Schirm zu beobachten? Erläutern Sie, wie das Phänomen entsteht.

b) Welchen Abstand x haben benachbarte Maxima auf dem Schirm?

c) Nun fällt Licht eines anderen Lasers auf die gleiche Anordnung, wobei die beiden Maxima 2. Ordnung einen Abstand von $6,8$ mm besitzen. Berechnen Sie die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

3. **Schrödingergleichung, Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte (Ü)**

a) Vergleichen Sie die Schrödingergleichung für $V(x,\ t) = 0$ mit der Wellengleichung des elektrischen Feldes. Welches sind die wichtigsten Gemeinsamkeiten, wo unterscheiden sich die beiden?

b) Zeigen Sie, dass ebene Wellen Lösungen der Schrödingergleichung für ein zeitlich konstantes Potential sind.

c) Zeigen Sie, dass eine Überlagerung mehrerer ebener Wellen, die Lösungen der Schrödingergleichung sind, diese ebenfalls löst.

4. **Dispersion I (Ü)**

a) Skizzieren Sie die Gauss-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \tag{1}$$

für $\mu = 0$, $\sigma = 1$ sowie für $\mu = 2$, $\sigma = 4$. Welche Bedeutung haben die beiden Parameter?

b) Was bedeutet der Begriff 'Dispersion' in Zusammenhang mit Wellenpaketen?

c) Was bezeichnet man als Dispersionsrelation? Wie sehen die Dispersionsrelationen für ein freies Elektron sowie für ein Photon im Vakuum aus?

d) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_G für das freie quantenmechanische Elektron und ein Vakuum-Photon.

5. **Fourier-Transformation der Gauss-Funktion (T)**

Die folgenden Gleichungen definieren eine Fourier-Transformation:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jkx} dx \qquad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{jkx} dk \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a) Zeigen Sie, daß die Fourier-Transformation einer Gauss-Funktion $f(x) = \exp(-ax^2)$ mit $a > 0$ wieder eine Gauss-Funktion ergibt (Hinweis: Quadratische Ergänzung im Exponenten).

b) In der Ultra-Kurzzeitspektroskopie kommen gepulste Laser mit einer Pulslänge von wenigen Femtosekunden zum Einsatz. Schätzen Sie die spektrale Breite $\Delta\nu$ eines Gauss-Pulses $f(t) \propto \exp(-\frac{t^2}{2(\Delta t)^2})$ mit einer halben Breite von $\Delta t = 10$ fs ab. Vergleichen Sie hierzu die Fourier-Transformierte von $f(t)$ mit einem Gauss-Puls im Frequenzraum $g(\omega) \propto \exp(-\frac{\omega^2}{2(\Delta\omega)^2})$.

6. **Unschärferelation (Ü)**

a) Erläutern Sie den Begriff der *Unschärferelation*.

b) Mit Hilfe einer neuen Torlinientechnik können beim Fußball die Geschwindigkeit und Position des Balls gleichzeitig gemessen werden. Die Geschwindigkeit des Balls (m = 0,5 kg) kann dabei sogar auf $0,001\ \frac{m}{s}$ genau bestimmt werden. Führt die Unschärferelation zu einer Einschränkung der Messgenauigkeit bei der Ortsbestimmung des Balls?

7. **Dispersion II (T)**

a) Als Dispersionsparameter bezeichnet man den Ausdruck $\beta = 1/2 \cdot \partial^2\omega/\partial k^2$. Berechnen Sie β für die beiden Teilchen aus Aufgabe 4d).

b) Entwickeln Sie $\omega(k)$ um eine feste Wellenzahl k_0. Brechen Sie die Entwicklung nach dem quadratischen Term ab und benutzen Sie die Ausdrücke aus den Aufgaben 4d) und 7a), um die Ableitungen zu ersetzen.

c) Betrachten Sie folgendes Gausssche Wellenpaket:

$$\tilde{\psi}(k,\, t) = C \exp\left(-\alpha\,(k - k_0)^2\right) \exp\left(-j\omega(k)t\right) \tag{2}$$

Hier sind C und α positive Konstanten. Setzen Sie die Entwicklung bis zum quadratischen Glied aus der letzten Aufgabe für $\omega(k)$ ein. Nun leiten Sie den Ausdruck für die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi(x,\ t)$ durch Fourier-Transformation des Wellenpakets $\tilde{\psi}(k,\ t)$ her.

d) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ρ für das Wellenpaket. Falls Sie die vorige Aufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie:

$$\psi(x,\ t) = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\exp\left(j\left(k_0 x - \omega(k_0)t\right)\right)}{\sqrt{\alpha + j\beta t}} \exp\left(-\frac{(x - v_G t)^2}{4(\alpha + j\beta t)}\right) \tag{3}$$

e) Was kann man über die Form des Wellenpakets aus Aufgabe 7d) sagen? Geben Sie den Ausdruck für die Breite des Wellenpakets an. Welchen fundamentalen Unterschied können Sie zwischen dem Wellenpaket des freien Elektrons und des Photons erkennen?

f) Entnehmen Sie dem Ausdruck aus Aufgabe 7c) die Breite der Wellenfunktion im k-Raum. Setzen Sie diesen und die Breite im Ortsraum aus dem letzten Aufgabenteil in die Unschärferelation ein. Zeigen Sie, dass diese für ein freies Elektron für alle Zeiten erfüllt ist.