

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

Dipl.-Phys. Jan Mescher

M.Sc. Nico Bolse

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik

2. Übungsblatt

24. April 2014

Besprechung:

Übung 16. Mai 2014

Tutorien 12.-15. Mai 2014

Organisatorisches:

Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben nach wie vor die Markierungen, welche bereits auf dem 1. Übungsblatt erläutert wurden. Bereiten Sie die mit **Ü** markierten Aufgaben für die Saalübung und die mit **T** markierten Aufgaben für die Tutorien vor.

1. Streuung an Elektronen (T)

- Sie wollen mittels eines Streuexperiments nachprüfen, ob sich Elektronen wirklich wie im Bohrschen Atommodell vorausgesagt auf Kreisbahnen um den Kern bewegen. Um eine vernünftige Auflösung zu erhalten, müssen Sie Strahlung verwenden, deren Wellenlänge höchstens $1/20$ der aufzulösenden Strukturgröße beträgt. Strahlung welcher Frequenz benötigen Sie mindestens, wenn Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand vermessen wollen? Der Bohrsche Radius beträgt $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-1} \text{ \AA}$.
- Berechnen Sie die Energie eines Photons der Mess-Strahlung aus dem letzten Aufgabenteil. Vergleichen Sie die erhaltene Energie mit der Ionisierungsenergie von Wasserstoff und erläutern Sie, was das für das im letzten Aufgabenteil vorgestellte Experiment bedeutet.
- Wie muss man vorgehen, um trotzdem Ergebnisse mit der vorgestellten Messung zu erhalten?

2. Das freie Elektron (Ü)

- In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11} \text{ m}$ verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig!
- Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\omega_{\text{Photon}}(k) = ck$$

$$\omega_{\text{Elektron}}(k) = \frac{\hbar k^2}{2m_e}$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_g in beiden Fällen.

- Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert $\langle \hat{p}(t) \rangle$ und das Impulserwartungswertquadrat $\langle \hat{p}^2(t) \rangle$ für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2}$. Was folgt daraus über die Unschärferelation für die Ortsunschärfe Δx ?

3. Quantenmechanisches Messen beim unendlichen Potentialtopf (T)

In einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite a (Potential $V(x) = 0$ zwischen $x = 0$ und $x = a$ ($a > 0$) und $V(x) = \infty$ sonst) befindet sich ein Elektron im ersten angeregten Zustand.

- Leiten Sie den Ausdruck für die möglichen Werte der Energie der Elektronen im Topf her. Welche Energie wird man an dem System messen?
- Nun wird eine Ortsmessung durchgeführt. Rechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus, das Elektron entweder zwischen $a/6$ und $2a/6$ oder zwischen $4a/6$ und $5a/6$ zu finden.
- Nun wird in die Mitte des Topfs eine dünne Zwischenwand eingefügt, die das Elektron nicht durchtunneln kann. Das Elektron befinde sich in dem rechten der beiden Töpfe. Wie sieht die (normierte) Wellenfunktion des Elektrons im niedrigsten Eigenzustand nach dem Einschieben der Trennwand aus?

4. Parabolisches Potential (\ddot{U})

Komplexe Potentiale in Quantenbauelementen können in erster Näherung häufig durch parabolische Funktionen angenähert werden. Ein entsprechender Ausdruck lautet $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Man erkennt die Ähnlichkeiten zur potentiellen Energie eines klassischen harmonischen Oszillators mit der Federkonstanten $k = m\omega^2$, $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}k\hat{x}^2$, weswegen man hier von einem *quantenmechanischen harmonischen Oszillator* spricht.

- Recherchieren Sie, wie die Funktionen ψ_n aussehen, die die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das parabolischen Potential lösen. Wie lautet die Formel für die zugehörigen Eigenwerte W_n ?
- Wie unterscheiden sich die Lösungen des parabolischen Potentials von denen des unendlich hohen Potentialtopfs? Zählen Sie zudem die Gemeinsamkeiten auf.
- Zeigen Sie, dass $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ die SGL lösen.
- Der normierte Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\sqrt{\pi^{1/2}}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \quad (1)$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand.

Nützliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2)$$

- Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie ihr Vorgehen.

5. Variationsrechnung am dreieckigen Potential (T)

An der Grenzschicht von zwei Halbleitermaterialien kann man interessante Effekte beobachten, die in Heterostruktur-Bauelementen ausgenutzt werden. Zum Beispiel ist bei geschickter Wahl der Materialien die Elektronenbeweglichkeit nahe der Grenzfläche zwischen diesen höher als im Inneren des Materials. Damit können zum Beispiel schnelle Transistoren verwirklicht werden. Ein sehr gutes Modell für die Begebenheiten an einer solchen Grenzfläche stellt das trianguläre Potential dar. Im Eindimensionalen wollen wir vereinfacht annehmen, dass sich bei $x \leq 0$ eine unendlich hohe Barriere befindet. Für Orte $x > 0$ nehmen wir einen linearen Verlauf des Potentials $V(x) = e_0 F x$ mit konstantem F an.

- a) Zeichnen Sie den Potentialverlauf!
- b) Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung für das stationäre Problem auf!
- c) In vielen Fällen interessiert man sich besonders für den niedrigsten Energiezustand W_0 eines Systems. Dieser kann mit der Methode der Variationsrechnung approximiert werden. Dazu geht man wie folgt vor:
 - i. Durch Vorwissen oder geschicktes Raten stellt man eine Testfunktion $\psi(x, \alpha)$ auf, die von einem Parameter α abhängt.
 - ii. Nun berechnet man den Erwartungswert der Energie $\langle W(\alpha) \rangle$.
 - iii. Abschließend bedient man sich der Tatsache, dass physikalische Systeme ihre Energie minimieren. Da wir in unsere Testfunktion einen Parameter α eingebracht haben, können wir nun eine Minimumsuche bezüglich dieses Parameters durchführen. Damit erhalten wir eine Näherungslösung für die Nullpunktsenergie.

Nehmen Sie eine Testfunktion $\psi(x, \alpha) = A x e^{-\alpha x}$ an. Berechnen Sie zunächst die Normierungskonstante A über die Normierungsbedingung.

- d) Errechnen Sie nun den Erwartungswert für die Energie $\langle W(\alpha) \rangle$ in Abhängigkeit von α .
- e) Bestimmen Sie das α , das den Energie-Erwartungswert minimiert und daraus die Wellenfunktion.

6. Potentialtopf mit endlich hohen Wänden (Ü)

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (3)$$

eines endlichen Potentialtopfes der Tiefe V_0 .

- a) Skizzieren Sie $V(x)$.
- b) Zeichnen sie die zugehörigen Eigenfunktionen für $W < V_0$ und zwei Eigenfunktionen für $W > V_0$ ein. Gehen Sie davon aus, dass es genau drei gebundene Eigenzustände gibt. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W < V_0$ und $W > V_0$ qualitativ?
- c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein. Das explizite Lösen dieses Gleichungssystems ist **nicht** verlangt!
- d) Zeigen und erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \rightarrow \infty$.

7. Stückweise konstantes Potential (Ü)

Gegeben sei das Potential:

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & : & x < 0 & \text{Bereich I} \\ 0 & : & 0 \leq x < a & \text{Bereich II} \\ V_0 & : & a \leq x < b & \text{Bereich III} \\ \infty & : & x \geq b & \text{Bereich IV} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$ und $b > 0$.

- a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf!
- b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte eines Teilchens im Potential! Gehen Sie von Energien $W > V_0$ aus. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich. Die resultierende Gleichung ist nur noch numerisch lösbar.