Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
Dipl.-Phys. Jan Mescher
M. Sc. Nico Bolse
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
3. Übungsblatt
8. Mai 2014
Besprechung:
Übung 23. Mai 2014
Tutorien 19. - 22. Mai 2014

Organisatorisches:
Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben nach wie vor die Markierungen, welche bereits auf dem 1. Übungsblatt erläutert wurden. Bereiten Sie die mit **Ü** markierten Aufgaben für die Saalübung und die mit **T** markierten Aufgaben für die Tutorien vor.

1. **Leuchtende Quantenpunkte (T)**

   In der Nanotechnologie spielen Quantenpunkte eine wachsende Rolle. Mathematisch gesehen entsprechen diese Punkte einem 3-dimensionalen Potentialtopf. Betrachten Sie einen würfelförmigen Quantenpunkt der Kantenlänge L.

   a) Zeigen Sie, daß der Betrag des Wellenvektors $|\vec{k}|$ eines Elektrons im Quantenpunkt nur diskrete Werte annehmen kann und berechnen Sie diese. Nehmen Sie zur Vereinfachung des Problems außerhalb des Quantenpunktes ein Potential $V = \infty$ an (d.h. das Elektron kann den Quantenpunkt nicht verlassen).

   b) Zeigen Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen (stationären) Schrödingergleichung $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = W\psi$, dass gilt: $W(|\vec{k}|) = \frac{\hbar^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}{2m}$.

   c) Bestimmen Sie die Quantenzahlen zur Energie $W = \frac{3\hbar^2\pi^2}{mL^2}$. Lassen sich die Quantenzahlen eindeutig bestimmen?

   d) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen ψ_{x,n_x},ψ_{y,n_y},ψ_{z,n_z} und ψ_n. Bestimmen Sie die Amplitude der Wellenfunktion so, dass gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi dx = 1$. Hinweis: Sie erleichtern sich die Rechnung, wenn Sie hier die komplexen e-Funktionen in Sinus-Funktionen wandeln.

   e) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\hat{x}$, $\hat{p}_x$ zu ψ_{x,n_x}.

   f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron in einem würfelförmigen Raumbereich in der Mitte des Quantenpunkts befindet, dessen Volumen einem 27stel des gesamten Quantenpunkts entspricht?

   g) Beim Übergang eines Elektrons aus dem Zustand $n^* = (2, 1, 1)$ in den Zustand $n = (1, 1, 1)$ werde die frei werdende Energie in Form von infrarotem Licht emittiert. Die Quantenpunkte emittieren infrarotes Licht der Wellenlänge $\lambda = 3\,\mu$m. Welche Kantenlänge L haben die Quantenpunkte?

2. **Überlagerte Zustände (T)**

   Betrachtet werden die beiden energetisch niedrigsten Zustände in einem unendlich hohen Potentialtopf.

   a) Geben Sie diese beiden zeitabhängigen Zustände $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ explizit an.

   b) Wie lautet der Zustand $\psi(x,t)$, der sich zu gleichen Teilen aus den beiden Zuständen ψ_1 und ψ_2 zusammensetzt?

   c) Bestimmen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen SG den Orts-Erwartungswert <x>(t).

3. **Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt (Ü)**

   Betrachten Sie die Potentialstufe

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \qquad \text{Bereich I} \\ V_0 & : \quad x \geq 0 \qquad \text{Bereich II} \end{cases}$$

   Ein Elektron der Energie W_e laufe als Welle von links gegen diese Barriere. Betrachten Sie im Folgenden immer die beiden Fälle $W_e < V_0$ und $W_e > V_0$.

   a) Skizzieren Sie das Potential.

   b) Bestimmen Sie die Wellenzahl k des Elektrons in den Bereichen x<0 und x≥0.

   c) Nehmen Sie eine von links einlaufende Welle $\psi_{ein}(x) = e^{jkx}$ an. Ein Teil dieser Welle $\psi_r(x) = re^{-jkx}$ werde an der Potential-Barriere reflektiert, während der andere Teil $\psi_t(x) = te^{jkx}$ in den Bereich des Potentials V(x) eindringt. Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ und $\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0)$ der Wellen an der Barriere die Reflexions- und Transmissionsamplituden r und t in Abhängigkeit der Wellenzahlen.

   d) Durch $\vec{J} = \frac{\hbar}{2jm}\left(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right)$ lässt sich eine Teilchenstromdichte definieren. Berechnen Sie diese für die einlaufenden, reflektierten und transmittierten Teilchen und überprüfen Sie deren Erhaltung.

   e) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit einem „klassischen Elektron als Teilchen“.

   f) Eine Elektronen-Welle mit der Energie 0,6 eV trifft eine unendlich dicke Potentialbarriere der Höhe 1,1 eV. Ist es wahrscheinlicher das Elektron im ersten Angström der Barriere zu finden oder weiter innerhalb der Barriere?

   g) Sei nun

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \qquad \text{Bereich I} \\ V_0 & : \quad 0 \leq x \leq d \qquad \text{Bereich II} \\ 0 & : \quad d < x \qquad \text{Bereich III} \end{cases}$$

   Was ändert sich gegenüber dem vorhergehenden Fall? Stellen Sie mit Hilfe geeigneter Randbedinungungen ein Gleichungssystem auf.

   h) Wie verändert sich der Sachverhalt für $V_0 \to \infty$?

4. **Harmonischer Oszillator in 2D und 3D (Ü)**

Für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator sieht der Hamilton-Operator wie folgt aus:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 \hat{y}^2$$

mit den Ortskoordinaten x und y.

a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Problem auf.

b) Machen Sie einen Produktansatz der Form $\psi(x,\ y) = f(x)g(y)$ und zeigen Sie, wie sich die Gleichung aus a) mit Hilfe dieses Ansatzes lösen lässt.

c) Wie sehen die Eigenenergien und Eigenfunktionen des zweidimensionalen Oszillators aus? Die Lösungen des eindimensionalen Problems finden Sie auf dem 2. Übungsblatt, Aufgabe 4.

d) Nun sei $\omega_x = \omega_y$. Erläutern Sie den Begriff „Entartung von Energieniveaus“ am Beispiel des zweidimensionalen Oszillators.

e) Stellen Sie den Ausdruck für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in drei Dimensionen auf. Wie lauten hier die Energie-Eigenwerte?