

Von der Dotierung zum pn-Übergang

7. Übung Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2014

Nico Bolse, Jan Mescher

Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		Tag der Arbeit		
2			Tut 4	
3				VL 11, Ausgabe #7, IF
4				Ü 6
5		Tut 1	Ü 4	
6			VL 7, Ausgabe #5	
7				Tut 6
8		VL 3, Ausgabe #3	Pfingstsonntag	
9		VL 4	Pfingstmontag	
10				VL 12
11				Ü 7
12		Tut 2	VL 8	
13			Ü 5	
14	Beginn VLZ			Tut 7
15		VL 5		
16		Ü 2		
17	VL 1, Ausgabe #1			VL 13
18	Karfreitag			Ende VLZ
19		Tut 3	Fronleichnam	
20				
21	Ostermontag			
22		VL 6, Ausgabe #4		
23		Ü 3, Gr.HS Geb. 10.50	Tut 5	
24	VL 2, Ausgabe #2			
25	Ü 1			
26			VL 9, Ausgabe #6	
27			VL 10	
28				
29		Christi Himmelfahrt		
30				
31				

Wochenende
Frei
Vorlesung
Übung
Tutorium
IF: Institutsführung

Stand: 28.05.2014

alle Donnerstagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im MTI-Hörsaal statt

alle Freitagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im NTI-Hörsaal statt, außer am 23.05.2014 im Gr. HS, Geb. 10.50 (Baulng)

- Klausurtermin: 01.09.2014, 14:00 – 16:00 Uhr
- Klausurdauer: 2h
- Klausuranmeldung: online im QISPOS (Anmeldeschluss 27.08.2014)
- Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 DIN-A4 Blatt handschriftlicher Notizen (doppelseitig), Tabelle mit physikalischen Konstanten und Integralen (mit Klausur ausgeteilt)



Dienstag, 26.08.2014 von 11:30 – 13:00 Uhr, LTI-Hörsaal





Geht wählen!

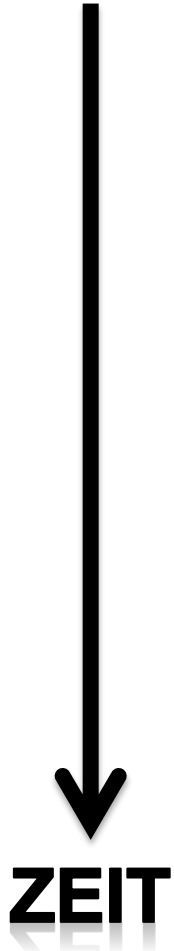
AStA^{KIT}

7.-11. Juli 2014

studierendenparlament und Fachschaften

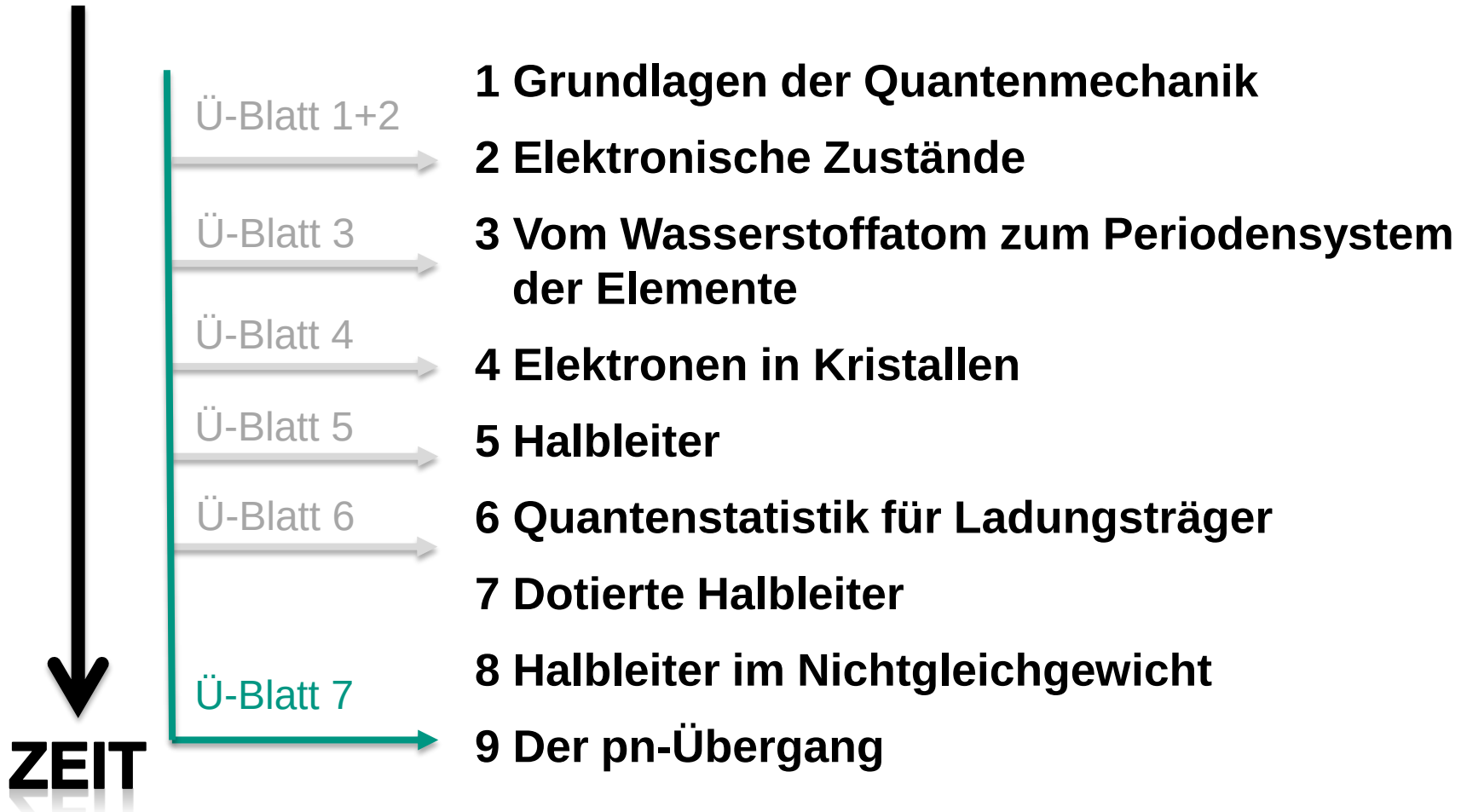
Diskussion der Evaluationsergebnisse

Stand der Dinge



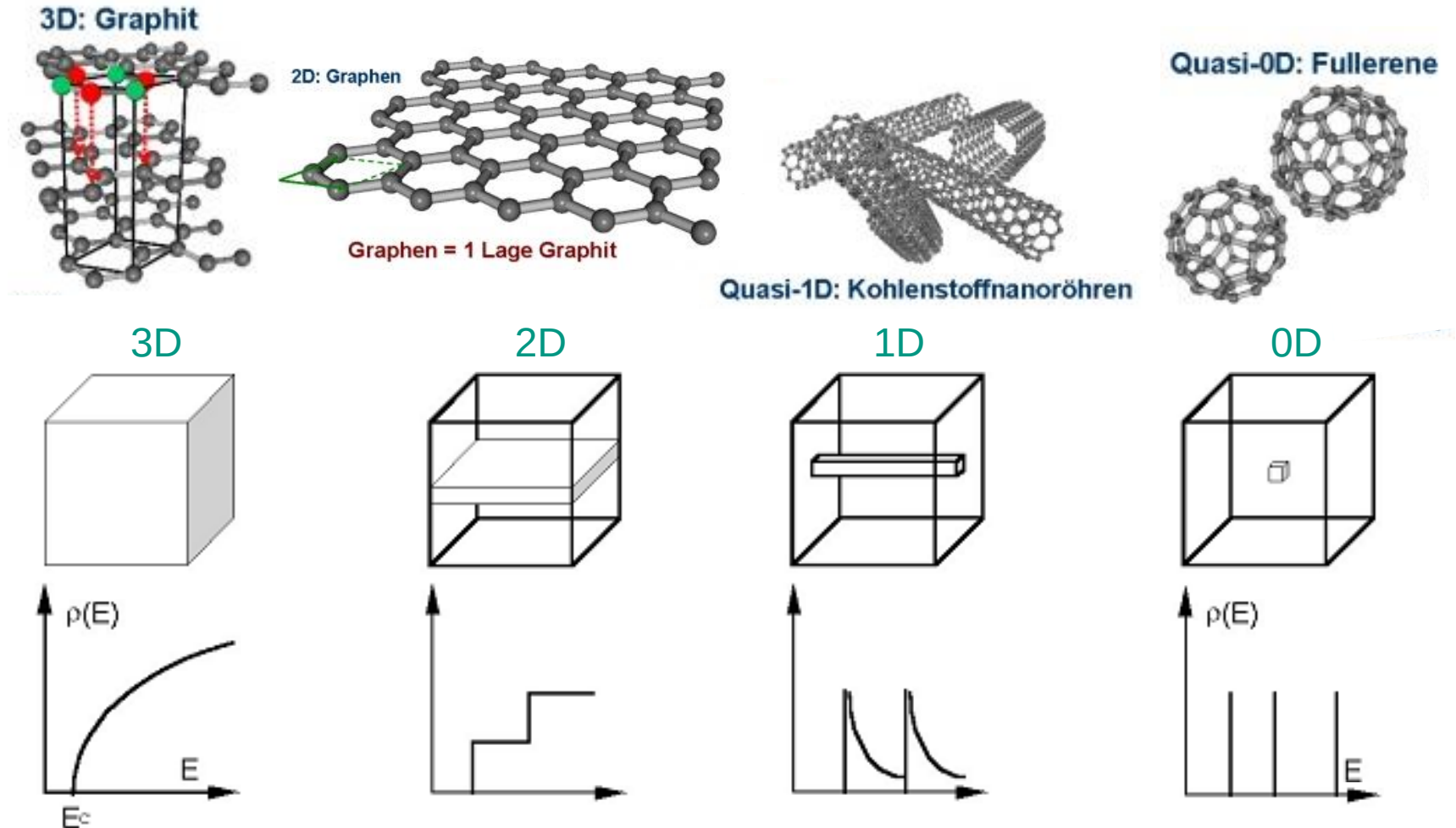
1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge



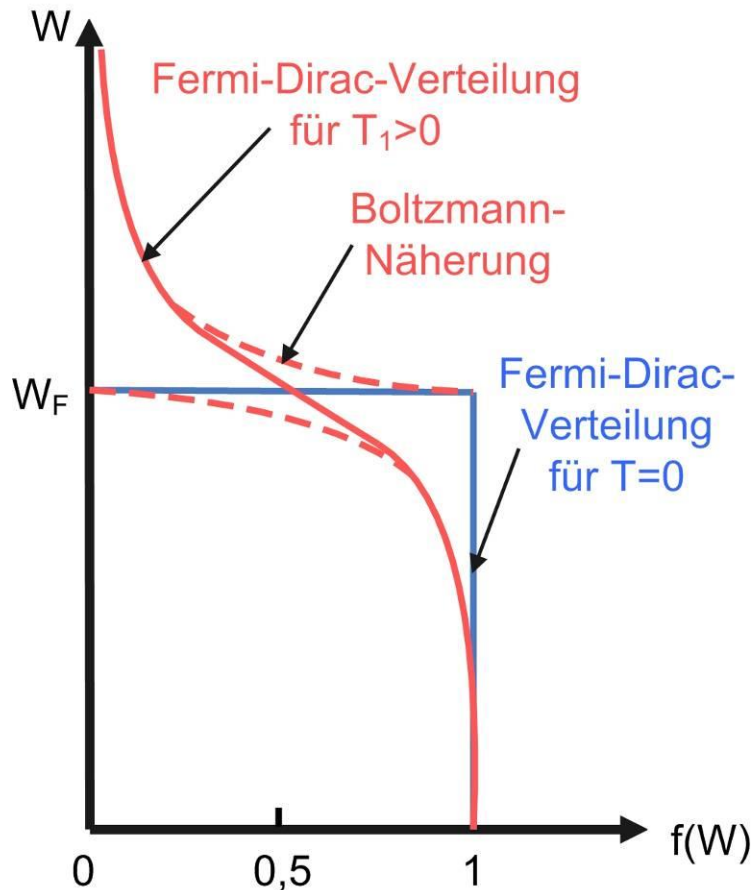
Wiederholung

■ Zustandsdichte in Halbleitern



Wiederholung

■ Fermi-Dirac-Verteilung



$$f_{FD} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

■ Boltzmann-Näherung:

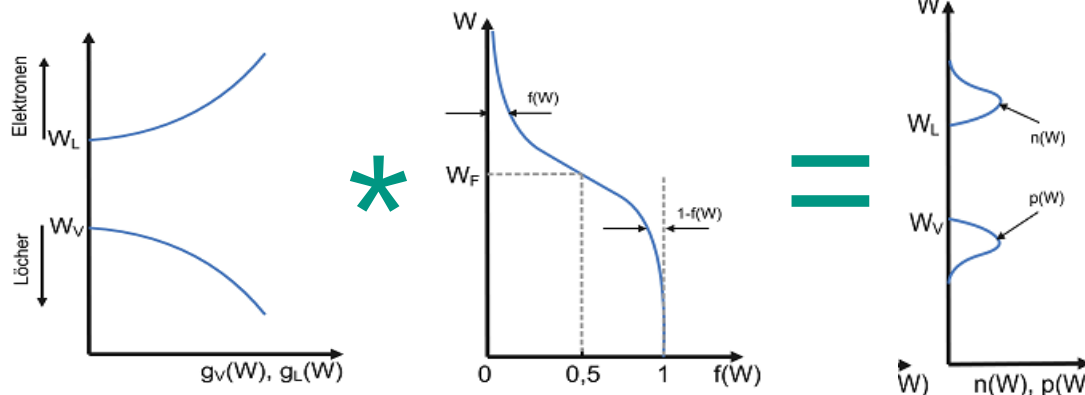
$$f_B = \exp\left(-\frac{W - W_F}{k_B T}\right)$$

Wiederholung

Ladungsträgerdichten

$$n(W, T) = \int_{W_L}^{\infty} g_n(w) \cdot f(W, T) dW$$

$$p(W, T) = \int_{-\infty}^{W_B} g_p(w) \cdot (1 - f(W, T)) dW$$



Makroskopische
Eigenschaften des HL

z.B. elektrische
Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot (n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)$$

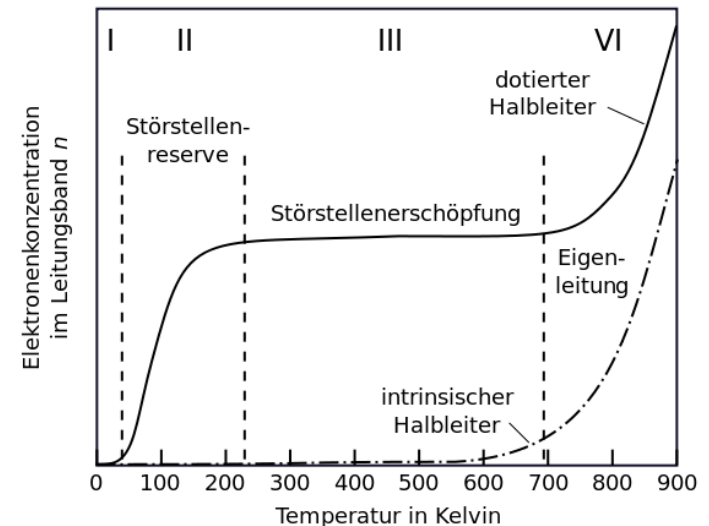
Wiederholung – intrinsischer Halbleiter

- Eigenleitung eines reinen Halbleiters
- Ladungsträger entstehen nur durch thermische Anregung

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}}$$

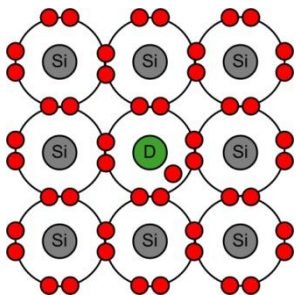
- Temperaturabhängige Fermi-Energie

$$W_F = \frac{W_L + W_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \cdot \ln\left(\frac{m_{V,h}^*}{m_{L,e}^*}\right)$$

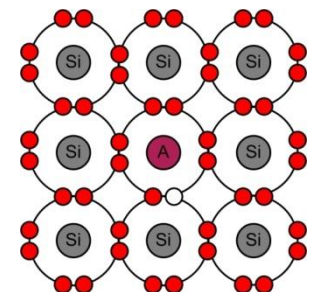
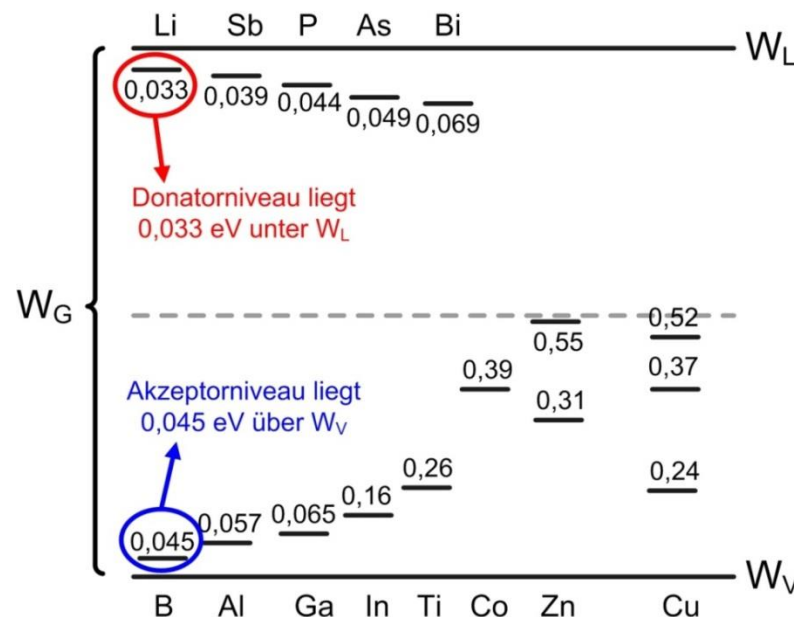


A1 Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

- p-dotierter Halbleiter mit Bandlücke $W_G = 1\text{eV}$
- Akzeptorkonzentration sei $n_A = 10^{16}\text{ cm}^{-3}$
- Akzeptorniveau liege $0,065\text{eV}$ oberhalb der Valenzbandkante
- Effektive Masse der Elektronen und Löcher sei gleich der freien Elektronenmasse



Dotierstoffe in Si



A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Wie gross ist die Dichte der Loecher bei $T=300\text{ K}$? Vergleichen Sie diese mit der Dichte der Loecher in einem undotierten Halbleiter mit sonst gleichen Eigenschaften.

■ Intrinsischer Fall:

$$p = n_i = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} = 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

Beachte: laut Aufgabenstellung mit $m_e^* = m_p^* = m_e$

■ Dotierter Fall: $p = n_i + n_A^-$

→ Besetzungsstatistik der Dotieratome ist zu beachten!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Donatoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

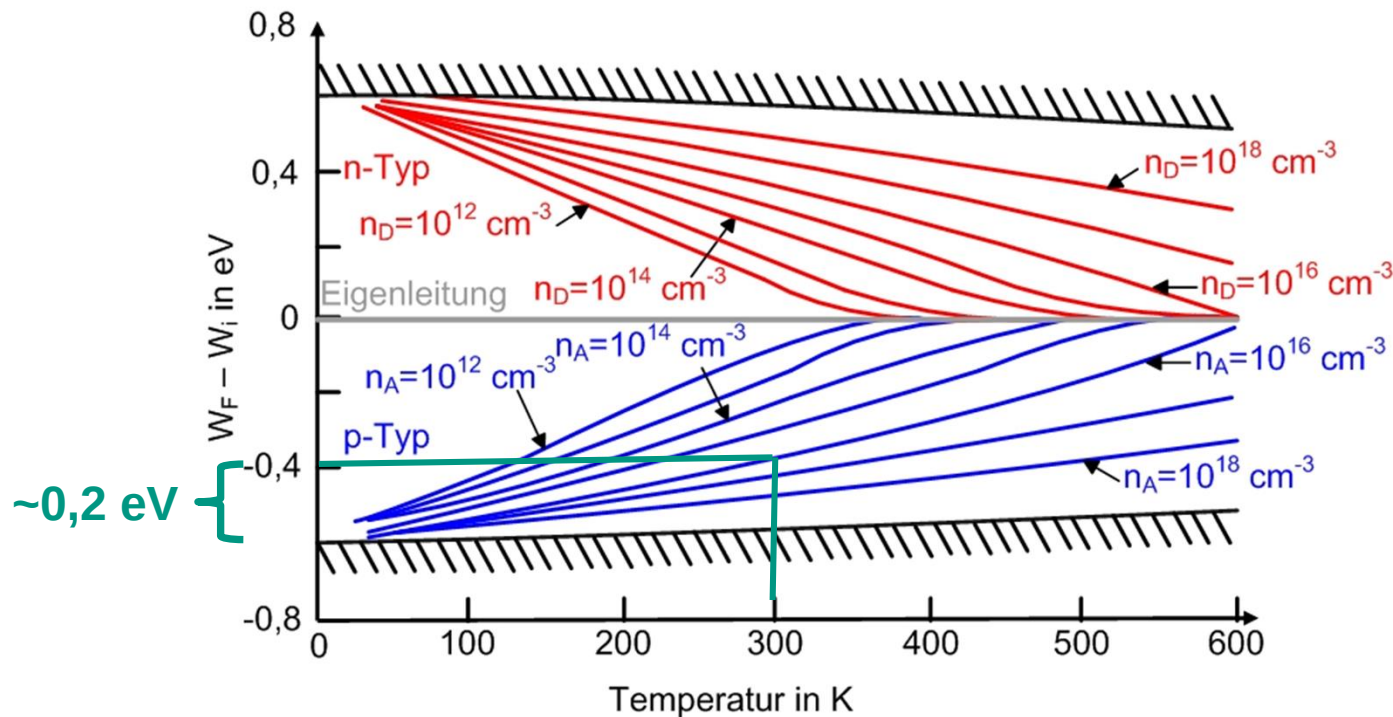
■ Akzeptoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

Entartungsfaktoren
auf Grund veränderter
Besetzungsstatistik i.Vgl.
zu Bandzuständen

■ Damit folgt für die ionisierten Akzeptoren: $n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)}$

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung



■ $W_A - W_F = W_V + 0,065 \text{ eV} - W_V - 0,2 \text{ eV} = -0,135 \text{ eV}$

■ $n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{0,135 \text{ eV}}{0,026 \text{ eV}}\right)} = 0,99 n_A = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Fast alle Akzeptoren sind ionisiert!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Mit $n_A^- \gg n_i = n$ folgt $p \approx n_A^- = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$

➔ Durch Dotierung lässt sich die Dichte der freien Ladungsträger stark erhöhen. Thermisch angeregte freie Ladungsträger sind dann bei Raumtemperatur vernachlässigbar.

A1 b) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Bestimmen Sie fuer beide Faelle die Dichten der freien Elektronen.

- Intrinsischer Fall: freie Ladungsträger werden in Paaren erzeugt

$$n = p = n_i = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

- Dotierter Fall:

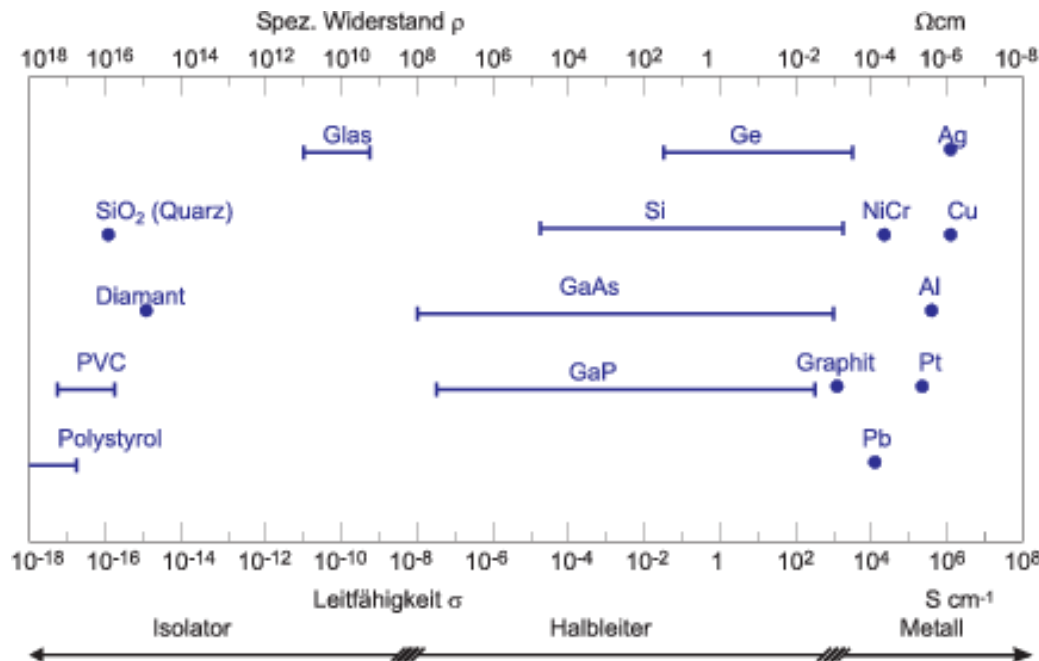
Mit *Massenwirkungsgesetz* $np = n_i^2$ folgt: $n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Dichte der freien Elektronen wird durch die p-Dotierung verringert!

A1 c) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

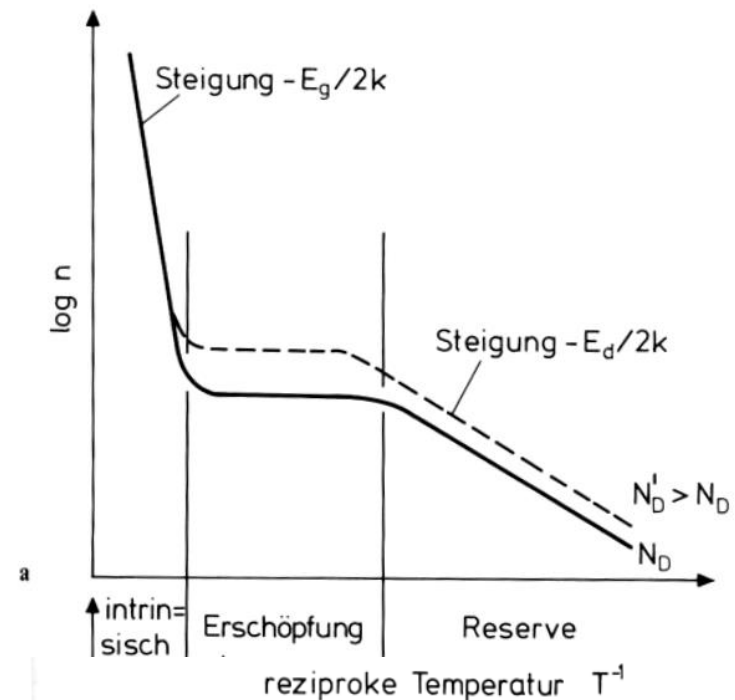
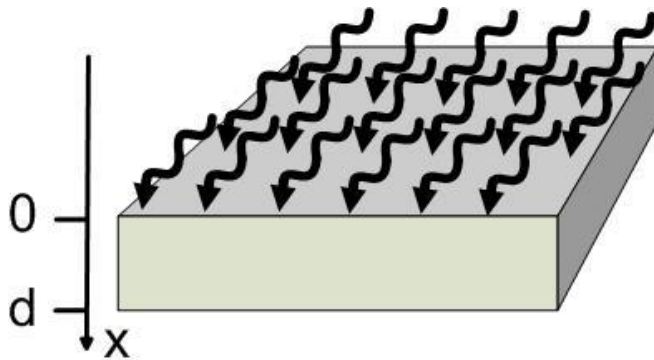
Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ bei $T=300\text{ K}$ unter der Annahme einer Loecherbeweglichkeit von $100\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $1500\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

■ Leitfähigkeit: $\sigma = e_0(\mu_p p + \mu_n n) \quad \rightarrow \quad \sigma = e_0(\mu_p p) = 16 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}}$



A6 a) Halbleiter unter Beleuchtung

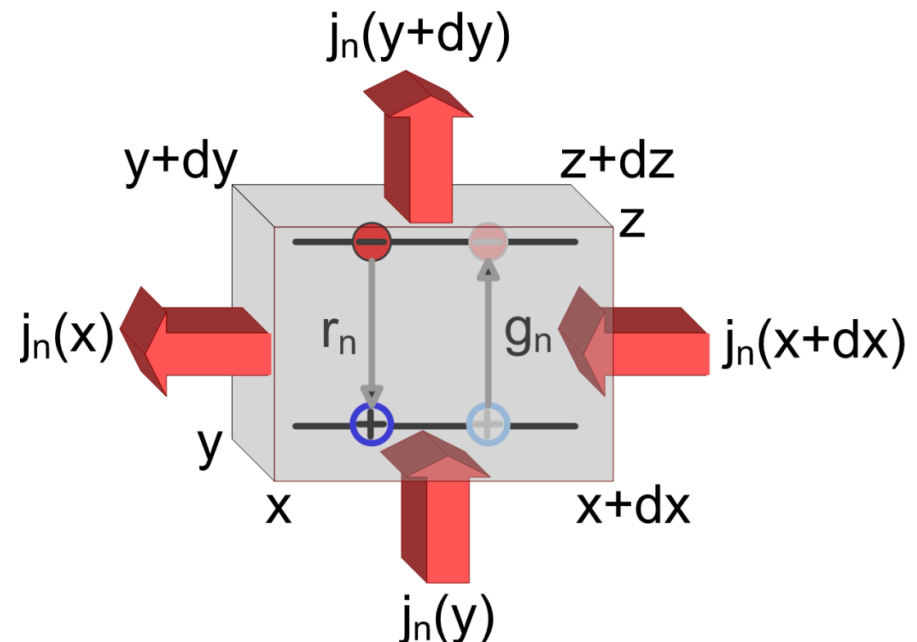
Wir betrachten einen stark p-dotierter Halbleiter-Quader der Dicke d , der an der Oberseite homogen mit Licht bestrahlt wird. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.



A6 a) Halbleiter unter Beleuchtung

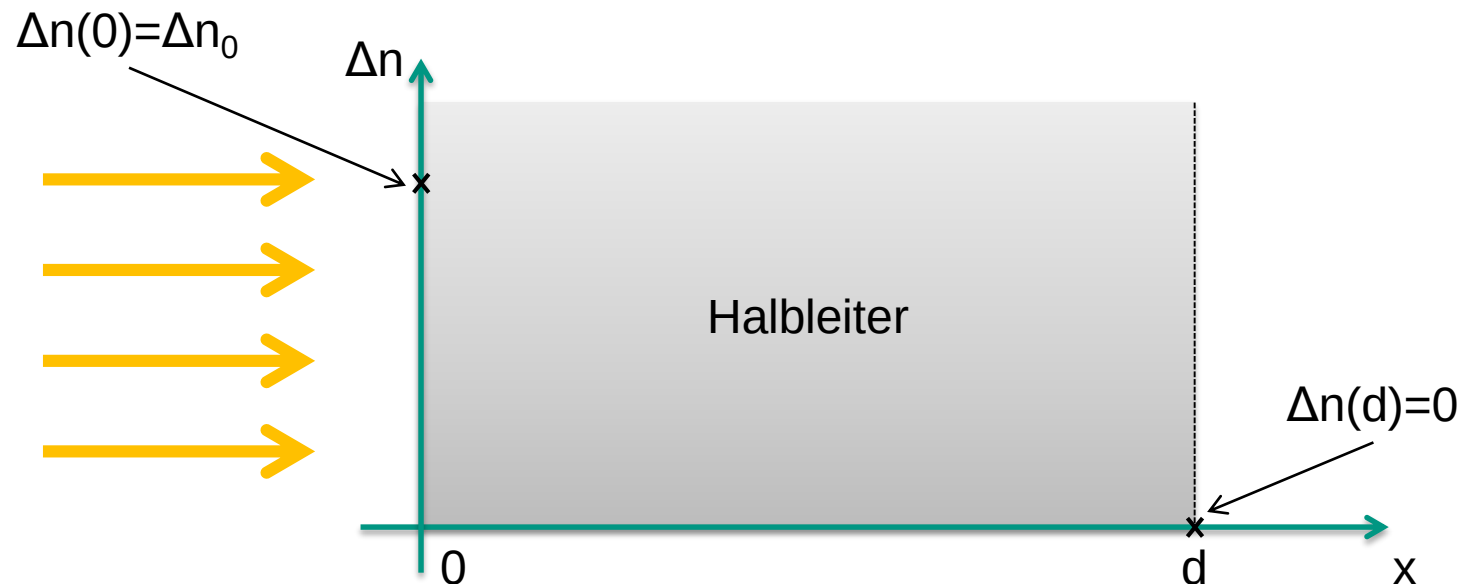
Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \vec{J} + e(g_n - r_n)$$

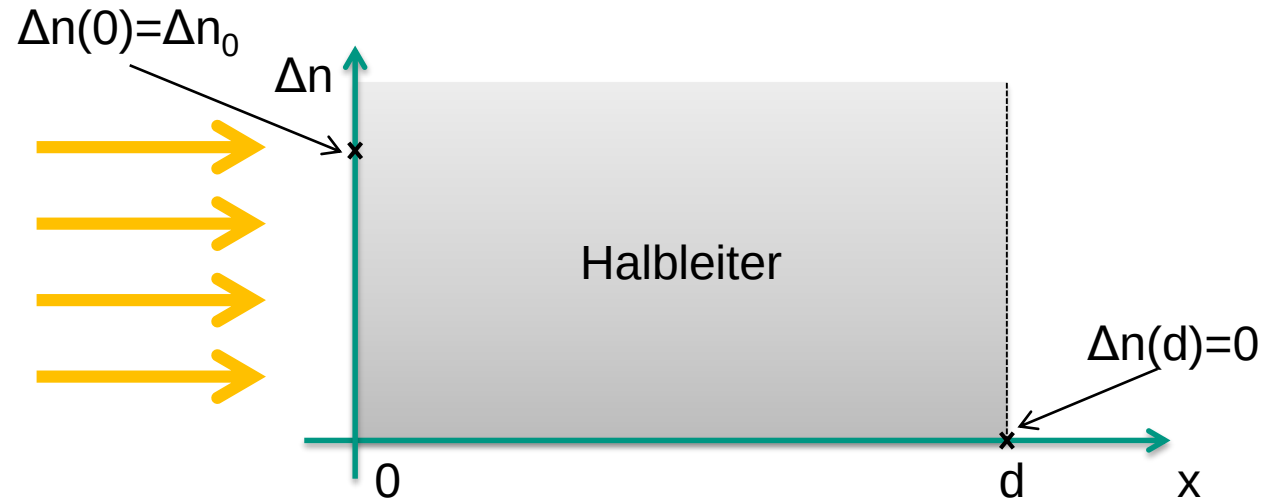


A6 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.



A6 a) Halbleiter unter Beleuchtung



■ Kontinuitätsgleichung (allgemein):

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \vec{J} + e(g_n - r_n) = e \nabla (n \mu \vec{E} + D \nabla n) + e(g - r)$$

→ hier:
$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} = 0$$

■ Randbedingungen: $\Delta n(x = 0) = \Delta n_0$ & $\Delta n(x = d) = 0$

A6 b) Halbleiter unter Beleuchtung

Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte.

■ Kontinuitätsgleichung aus a): $0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n$

■ 2 linear unabhängige Lösungen:

$$\Delta n(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right)$$

mit Diffusionslänge $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

■ Mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta n_0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \end{aligned}$$

A6 b) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Lösen der beiden Gleichungen:

$$C_1 = C_2 - \Delta n_0$$

$$\rightarrow 0 = (C_2 - \Delta n_0) \cdot \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)$$

$$\rightarrow C_2 \left(\exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \right) = \Delta n_0 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right)$$

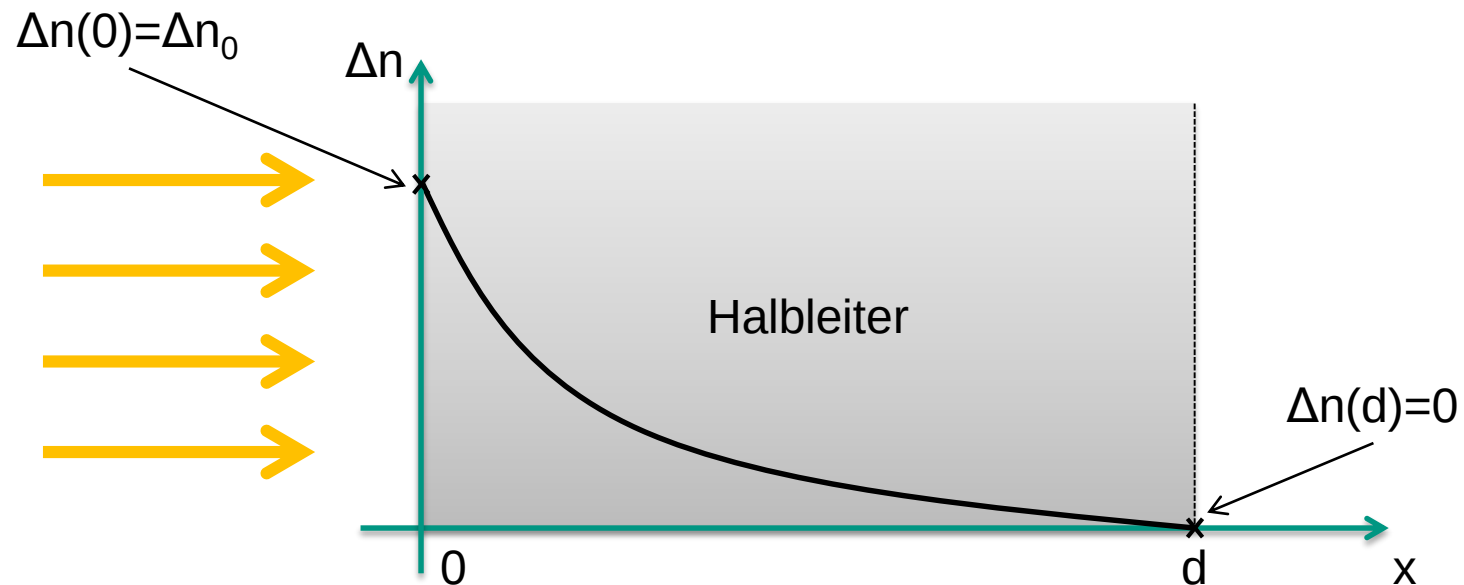
$$C_2 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} - \frac{\Delta n_0 \left(1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} = -\frac{\Delta n_0 \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$C_1 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)}$$

A6 b) Halbleiter unter Beleuchtung

$$\Delta n(x) = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right)$$



A6 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Ein allgemeinerer Ausdruck für die Rekombinationsrate eines konstant beleuchteten Halbleiters habe die folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

(Shockley-Read-Hall-Rekombination)



A6 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Der Halbleiter sei stark n-dotiert. Die Löcheranzahl und die Elektronenanzahl seien durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im dotierten unbeleuchteten Halbleiter (n_{dot} und p_{dot}) auf n bzw. p erhöht, wobei $p \ll n_{\text{dot}}$ und $n \cong n_{\text{dot}}$ gelten soll. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen die Gleichung so weit wie möglich.

■ Mit $n = n_{\text{dot}} + \Delta n$ und $p = p_{\text{dot}} + \Delta p$:

$$r = \frac{(n_{\text{dot}} + \Delta n)(p_{\text{dot}} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{\text{dot}} + \Delta n) + \tau_n(p_{\text{dot}} + \Delta p)}$$

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

$$n \cong n_{\text{dot}}$$

$$p \ll n_{\text{dot}}$$

A6 c) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Mit $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$:

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

$$n \cong n_{dot}$$

$$p \ll n_{dot}$$

Massenwirkungsgesetz

$$= \frac{\underbrace{n_{dot}p_{dot}}_{=n_i^2} + \Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

$$= \frac{\Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

A6 c) Halbleiter unter Beleuchtung

$$r = \frac{\Delta n \cancel{p_{dot}} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \cancel{\Delta p}}{\tau_p (n_{dot} + \cancel{\Delta n}) + \tau_n (\cancel{p_{dot}} + \cancel{\Delta p})}$$

$$\begin{aligned} n &= n_{dot} + \Delta n \\ p &= p_{dot} + \Delta p \end{aligned}$$

$$n \cong n_{dot}$$

$$p \ll n_{dot}$$

- Majoritäten bleiben fast unverändert
- Minoritäten steigen stark an

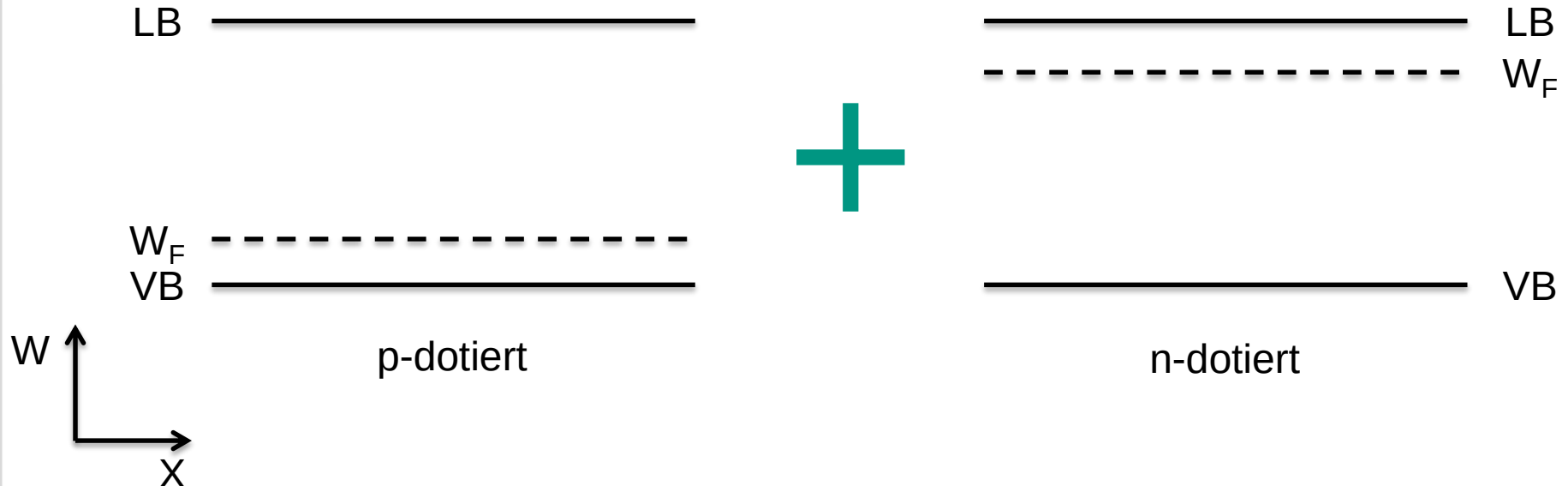
$$r = \frac{\Delta p n_{dot}}{\tau_p n_{dot}} = \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

- Rekombinationsrate ist hauptsächlich durch Minoritäten bestimmt!

A7 pn-Übergang

Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

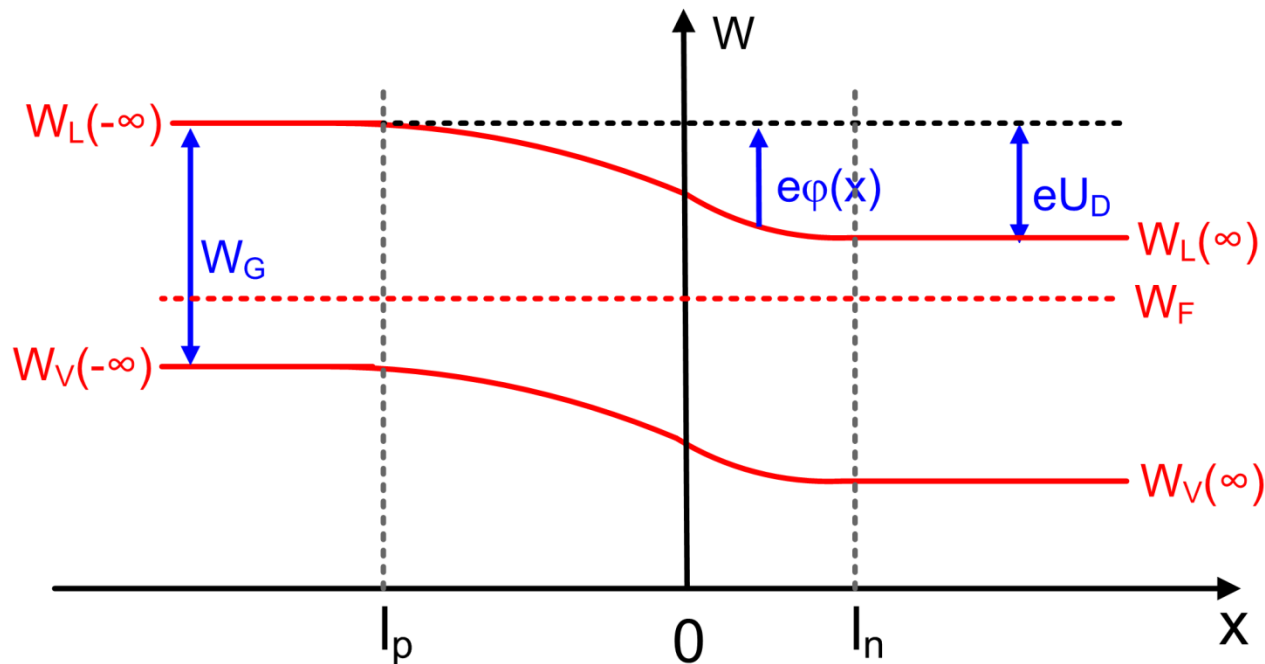
■ ...ohne äußere Vorspannung:



A7 pn-Übergang

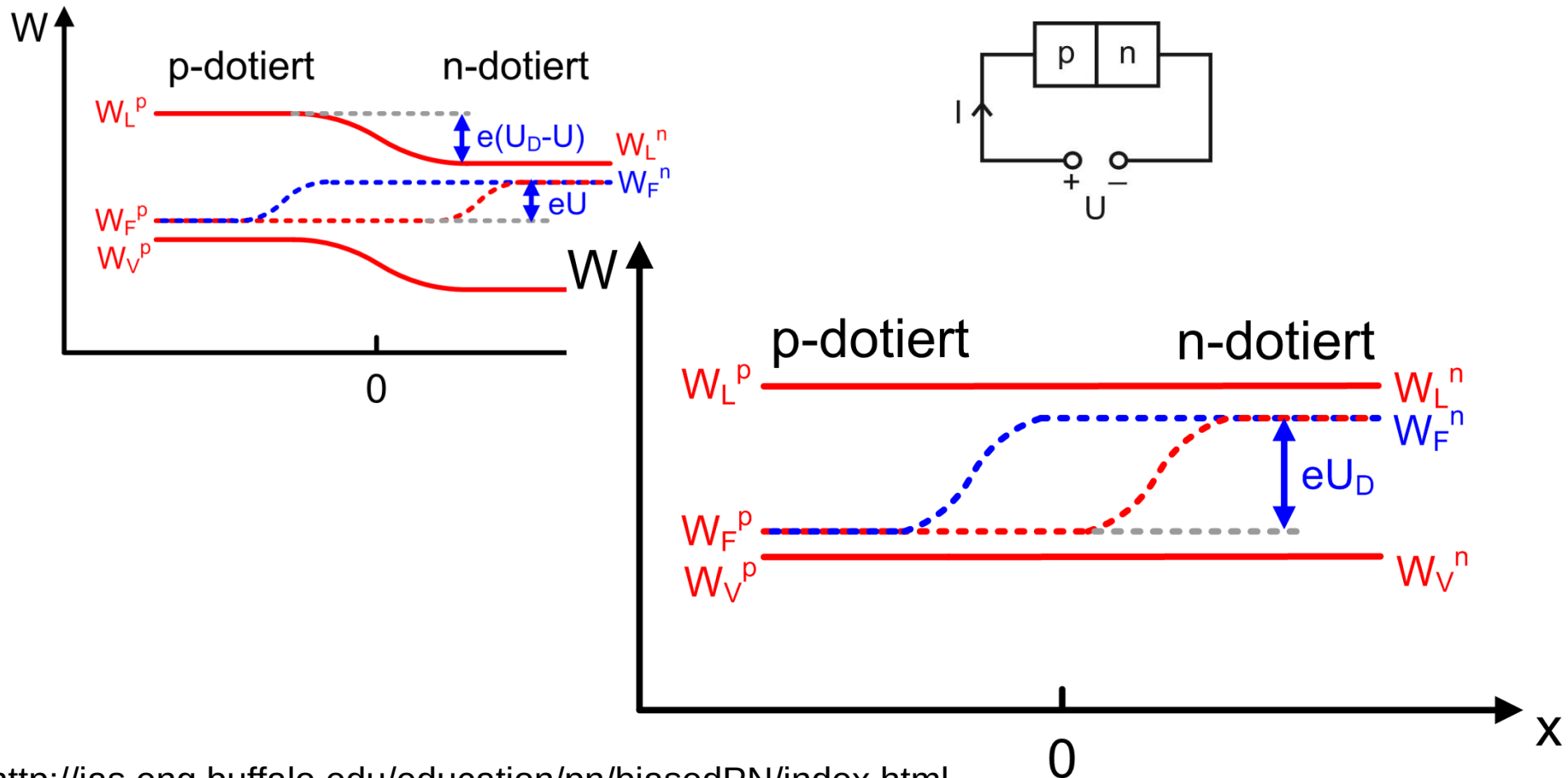
Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

■ ...ohne äußere Vorspannung:



A7 pn-Übergang

■ ...mit äußerer Vorspannung $+U_D$ in Durchlassrichtung:



<http://jas.eng.buffalo.edu/education/pn/biasedPN/index.html>

Zusammenfassende Fragen

- Was wird als Dotierung von Halbleitern bezeichnet, wie lässt diese sich realisieren und wozu dient sie?
- Wodurch lässt sich das Gleichgewicht eines Halbleiters stören?
- Wie lassen sich Ladungsträgerdichten im Nicht-Gleichgewicht beschreiben?
- Wie ändern sich Bandstruktur und Fermi-Energie eines pn-Übergangs bei angelegter Spannung?

Zusammenfassung der Übungen

- **Welle-Teilchen-Dualismus** (Photoeffekt, de-Broglie-Wellenlänge, ...)
- **Wellenpakete** (Dispersion, Fourier-Transformation, freies Elektron, ...)
- **Schrödinger-Gleichung** (verschiedene Potentiale, Stetigkeitsbedingungen, Reflexion, Transmission, Tunneleffekt, gekoppelte Potentialtöpfe, 3D, ...)
- **Wasserstoffatom** (Orbitale, Quantenzahlen, ...)
- **Atombindungen**
- **Kristallstrukturen** (Gittervektoren, Bravais-Gitter, Bloch-Oszillation, ...)
- **Bandstrukturen** (Bandlücke, effektive Masse, (in)direkter Halbleiter, ...)
- **Ladungsträgerdichten** (Zustandsdichte, Fermi-Funktion, Leitfähigkeit, ...)
- **Dotierung**
- **Halbleiter im Nichtgleichgewicht** (Kontinuitätsgleichung, Drift & Diffusion, Beleuchtung, ...)
- **pn-Übergang**