Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
M.Sc. Manuel Koppitz
M.Sc. Noah Strobel
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
2. Übungsblatt
Besprechung: Übung 13. Mai 2016

1. **Das freie Elektron**

   a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11}$ m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig!

   b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

   $$\omega_{\text{Photon}}(k) = ck$$
   $$\omega_{\text{Elektron}}(k) = \frac{\hbar k^2}{2m_e}$$

   Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_{g} in beiden Fällen.

   c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert $\langle \hat{p}(t) \rangle$ und das Impulserwartungswertquadrat $\langle \hat{p}^2(t) \rangle$ für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2}$. Was folgt daraus über die Unschärferelation für die Ortsunschärfe Δx?

2. **Parabolisches Potential**

   Komplexe Potentiale in Quantenbauelementen können in erster Näherung häufig durch parabolische Funktionen angenähert werden. Ein entsprechender Ausdruck lautet $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$. Man erkennt die Ähnlichkeiten zur potentiellen Energie eines klassischen harmonischen Oszillators mit der Federkonstanten $k = m\omega^2$, $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k \hat{x}^2$, weswegen man hier von einem *quantenmechanischen harmonischen Oszillator* spricht.

   a) Recherchieren Sie, wie die Funktionen ψ_n aussehen, die die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das parabolischen Potential lösen. Wie lautet die Formel für die zugehörigen Eigenwerte W_n?

   b) Wie unterscheiden sich die Lösungen des parabolischen Potentials von denen des unendlich hohen Potentialtopfs? Zählen Sie zudem die Gemeinsamkeiten auf.

   c) Zeigen Sie, dass $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ die SGL lösen.

   d) Der normierte Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2}\sqrt{\pi^{1/2}}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \tag{1}$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand.
Nützliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2}$$

e) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie ihr Vorgehen.

3. **Potentialtopf mit endlich hohen Wänden**
Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases} \tag{3}$$

eines endlichen Potentialtopfes der Tiefe V_0.

a) Skizzieren Sie $V(x)$.

b) Zeichnen sie die zugehörigen Eigenfunktionen für $W < V_0$ und zwei Eigenfunktionen für $W > V_0$ ein. Gehen Sie davon aus, dass es genau drei gebundene Eigenzustände gibt. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W < V_0$ und $W > V_0$ qualitativ?

c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein. Das explizite Lösen dieses Gleichungssystems ist **nicht** verlangt!

d) Zeigen und erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \to \infty$.

4. **Stückweise konstantes Potential**
Gegeben sei das Potential:

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & : \quad x < 0 & \text{Bereich I} \\ 0 & : \quad 0 \leq x < a & \text{Bereich II} \\ V_0 & : \quad a \leq x < b & \text{Bereich III} \\ \infty & : \quad x \geq b & \text{Bereich IV} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$ und $b > 0$.

a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf!

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte eines Teilchens im Potential! Gehen Sie von Energien $W > V_0$ aus. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich. Die resultierende Gleichung ist nur noch numerisch lösbar.