Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
M. Sc. Manuel Koppitz
M. Sc. Noah Strobel
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
3. Übungsblatt
Besprechung: 03. Juni 2016

1. **Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt**

   Betrachten Sie die Potentialstufe

   $$V_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \qquad \text{Bereich I} \\ V_0 & : \quad x \geq 0 \qquad \text{Bereich II} \end{cases}$$

   Ein Elektron der Energie W_e laufe als Welle von links gegen diese Barriere. Betrachten Sie im Folgenden immer die beiden Fälle $W_e < V_0$ und $W_e > V_0$.

   a) Skizzieren Sie das Potential.

   b) Bestimmen Sie die Wellenzahl k des Elektrons in den Bereichen x<0 und x≥0.

   c) Nehmen Sie eine von links einlaufende Welle $\psi_{ein}(x) = e^{jkx}$ an. Ein Teil dieser Welle $\psi_r(x) = re^{-jkx}$ werde an der Potential-Barriere reflektiert, während der andere Teil $\psi_t(x) = te^{jkx}$ in den Bereich des Potentials V(x) eindringt. Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ und $\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0)$ der Wellen an der Barriere die Reflexions- und Transmissionsamplituden r und t in Abhängigkeit der Wellenzahlen.

   d) Durch $\vec{J} = \frac{\hbar}{2jm}\left(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right)$ lässt sich eine Teilchenstromdichte definieren. Berechnen Sie diese für die einlaufenden, reflektierten und transmittierten Teilchen und überprüfen Sie deren Erhaltung.

   e) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit einem „klassischen Elektron als Teilchen".

   f) Eine Elektronen-Welle mit der Energie 0,6 eV trifft eine unendlich dicke Potentialbarriere der Höhe 1,1 eV. Ist es wahrscheinlicher das Elektron im ersten Angström der Barriere zu finden oder weiter innerhalb der Barriere?

   g) Sei nun

   $$V_1(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \qquad \text{Bereich I} \\ V_0 & : \quad 0 \leq x \leq d \qquad \text{Bereich II} \\ 0 & : \quad d < x \qquad \text{Bereich III} \end{cases}$$

   Was ändert sich gegenüber dem vorhergehenden Fall? Stellen Sie mit Hilfe geeigneter Randbedinungungen ein Gleichungssystem auf.

   h) Wie verändert sich der Sachverhalt für $V_0 \to \infty$?

2. **Harmonischer Oszillator in 2D und 3D**

Für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator sieht der Hamilton-Operator wie folgt aus:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2\hat{y}^2$$

mit den Ortskoordinaten x und y.

a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Problem auf.

b) Machen Sie einen Produktansatz der Form $\psi(x,\ y) = f(x)g(y)$ und zeigen Sie, wie sich die Gleichung aus a) mit Hilfe dieses Ansatzes lösen lässt.

c) Wie sehen die Eigenenergien und Eigenfunktionen des zweidimensionalen Oszillators aus? Die Lösungen des eindimensionalen Problems finden Sie auf dem 2. Übungsblatt, Aufgabe 2.

d) Nun sei $\omega_x = \omega_y$. Erläutern Sie den Begriff „Entartung von Energieniveaus“ am Beispiel des zweidimensionalen Oszillators.

e) Stellen Sie den Ausdruck für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in drei Dimensionen auf. Wie lauten hier die Energie-Eigenwerte?