Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
M. Sc. Manuel Koppitz
M. Sc. Noah Strobel
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Festkörperelektronik
5. Übungsblatt
Besprechung: Übung 24. Juni 2016

1. **Bloch-Oszillationen**
   Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ- und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2}(1 + \cos ka)$ mit $\Delta W = 2\,\mathrm{eV}$ beschreiben.

   a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die effektive Masse m_{eff} des Elektrons bei $k = 0$, $k = \frac{\pi}{a}$ und $k = \frac{\pi}{2a}$ im angegebenen Kristallpotential.

   b) Skizzieren Sie $W(k)$, $v(k)$ und $m_{\mathrm{eff}}(k)$.

   c) Nun werde ein elektrisches Feld angelegt, das auf die Elektronen eine Kraft F ausübt. Zeigen Sie, dass hiernach die Elektronen-Geschwindigkeit und der Elektronen-Ort zeitlich oszillieren (Bloch-Oszillationen).

   d) Warum fließt dann ein Strom bei angelegtem elektrischen Feld? Berechnen Sie dazu aus der Beweglichkeit $\mu = 1300\,\mathrm{cm^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$ der Elektronen in Silizium die mittlere Streuzeit τ, verwenden Sie als Abschätzung für die effektive Masse der Elektronen den Wert $0.32\,m_0$. Vergleichen Sie diese Streuzeit mit einer Bloch-Oszillations-Periode für eine Feldstärke von $10^6\,\mathrm{V/m}$.

   Benutzen Sie:
$$v = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\mathrm{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\mathrm{eff}}}$$
   Die Gitterkonstante beträgt $a_{Si} = 5.43\,\text{Å}$.

2. **Kronig-Penney-Modell**

Bisher haben wir nur qualitative Aussagen über das Entstehen der Bandstruktur gemacht. Eine Möglichkeit, quantitative Aussagen zu machen, bietet das Kronig-Penney-Modell. Hier wird das periodische Potential im eindimensionalen Kristall durch ein Rechteckprofil angenähert (Abbildung 1).

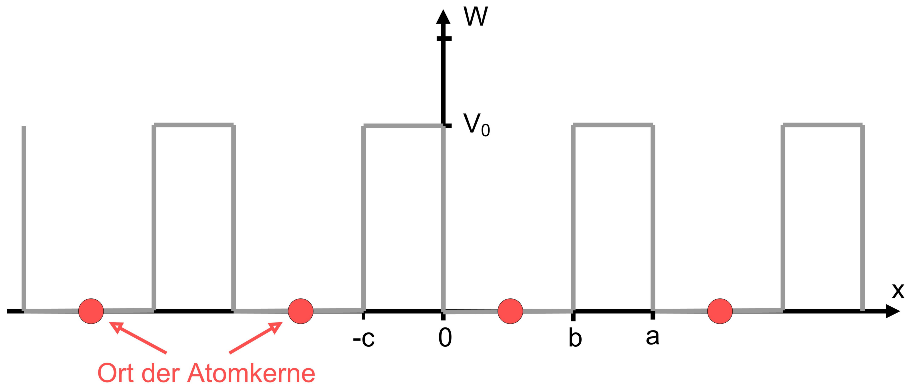

Abb. 1: Potentialverlauf im Kronig-Penney-Modell

a) Geben Sie den Ansatz für ein Elektron als Blochwelle im Kristall an. Welche Eigenschaften haben die Bestandteile des Bloch-Ansatzes?

b) Nun betrachten Sie eine Einheitszelle des Kristalls ($-c \leq x \leq b$). Setzen Sie den Ansatz aus a) für die beiden Bereiche konstanten Potentials in die Schrödingergleichung ein. Leiten Sie ab, vereinfachen Sie die Gleichung und führen Sie die Abkürzungen $\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)}$ und $\kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$ ein.

c) Finden Sie in den beiden Gebieten Lösungsansätze für die Differentialgleichungen.

d) Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der in den im letzten Aufgabenteil gefundenen Lösungen auftretenden Konstanten mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen und der Periodizität der Bloch-Funktionen auf.

e) Das aus den Randbedingungen folgende Gleichungssystem ist wie üblich nur lösbar, falls seine Determinante Δ verschwindet. In diesem Fall ergibt sich:

$$\Delta = j8\kappa_1\kappa_2 e^{jk}\left(\cos(ka) - \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{2\kappa_1\kappa_2}\sinh(\kappa_2 c)\sin(\kappa_1 b) - \cosh(\kappa_2 c)\cos(\kappa_1 b)\right)$$

Werten Sie die Bedingung $\Delta = 0$ aus, indem Sie nach k auflösen und zusätzlich für κ_1 und κ_2 die mit V_0 erweiterten Ausdrücke $\kappa_1 = \sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{W}{V_0}\right)}$ und $\kappa_2 = \sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}(1 - \frac{W}{V_0})\right)}$ einsetzen. Sie sollten am Ende eine Gleichung der Form $k = \frac{1}{a}\arccos\left(L\left(\frac{W}{V_0}\right)\right)$ erhalten, wobei L eine Funktion ist.

f) In Abbildung 2 ist die Funktion $L\left(\frac{W}{V_0}\right)$ für ein Verhältnis der Längen c und b von $c/b = 0.1$ und für $\frac{2mV_0b^2}{4\hbar^2} = 36$ (hiermit wird die Höhe des Potentials V_0 festgelegt) aufgetragen. Beachten Sie, dass nicht L über W/V_0 aufgetragen ist, sondern W/V_0 über L. Mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Aufgabenteil können Sie nun in der Abbildung die Bildung von Bändern und Bandlücken visualisieren.

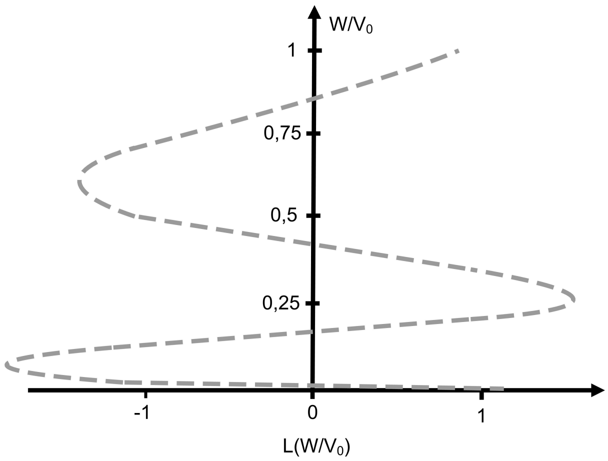

Abb. 2: Zeichnerische Lösung zum Kronig-Penney-Modell