

Bloch-Oszillationen & Kronig-Penney-Modell

5. Übung Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2016

Manuel Koppitz, Noah Strobel

Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag		V10
2		Ausgabe Ü2/T2	V5	
3			Ü3 Ausgabe Ü4/T4	
4				
5		Christi Himmelfahrt		
6		Brückentag	Tut-Woche 3	
7				V11
8				Ü6 Ausgabe Ü7/T7
9		Tut-Woche 1	V6	
10			V7	
11				Tut-Woche 6
12		Ü2		
13		V4		
14				V12
15		Pfingsten		
16		Pfingstmontag	Ü4	
17			Ausgabe Ü5/T5	
18	VL-Beginn			Tut-Woche 7
19				
20			Tut-Woche 4	
21	V1 Ausgabe Ü1/T1			V13
22	V2			Ü7
23		Ausgabe Ü3/T3	V8 anschl. Institutsführung	VL-Ende
24			Ü5 Ausgabe Ü6/T6	
25				
26		Fronleichnam		
27		Brückentag	Tut-Woch 5	
28	V3			
29	Ü1			
30		Tut-Woche 2	V9	
31				

Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
IF: Institutsführung
Brückentag
Ausgabe: Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand: 11.05.2016

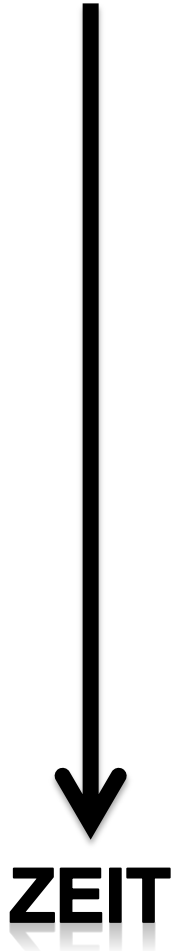
Evtl. fällt nächste VL aus.
Bitte E-mails checken!

alle Donnerstagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im MTI-Hörsaal (Geb. 30.33) statt
alle Freitagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im NTI-Hörsaal (Geb. 30.10) statt

Klausuranmeldung

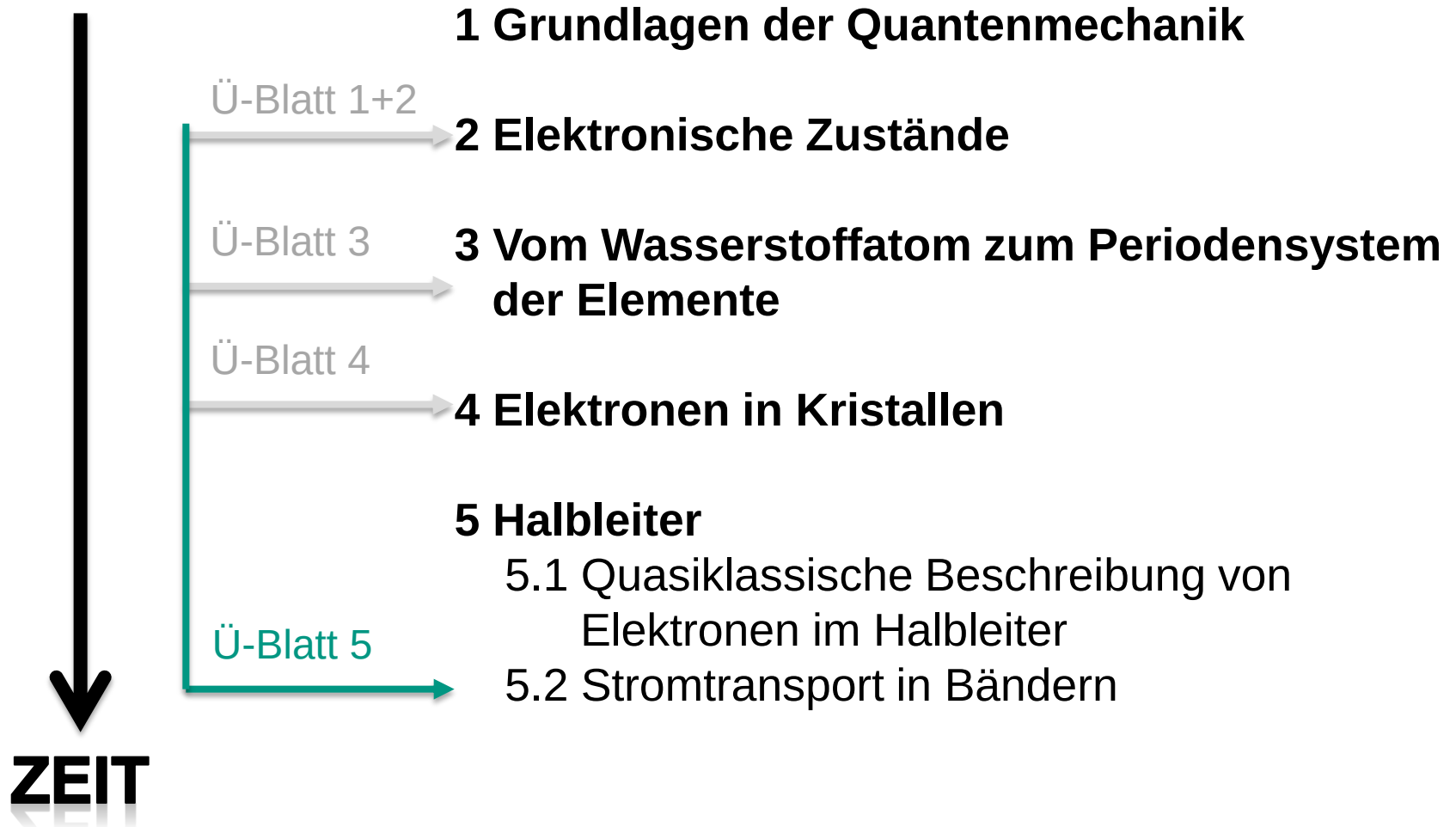
- Anmeldebeginn: 01.07.2016
- Anmeldeschluss: 19.09.2016
- Abmeldeschluss: 19.09.2016
- Für ETEC's: online im Campus Management System
- Für MWT'ler: online für Kombiprüfung PB/FE anmelden und dann unbedingt eine E-Mail mit Anmeldewunsch an die Übungsleiter der Veranstaltung schicken, für die ihr die Klausur in diesem Semester schreiben wollt. **ACHTUNG: Prüfungsdatum für PB ist der 02.09.2016. FE findet am 22.09.2016 statt.**

Stand der Dinge



1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge



Wiederholung

■ Wellenfunktionen im Wasserstoffatom $\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\phi, \theta)$

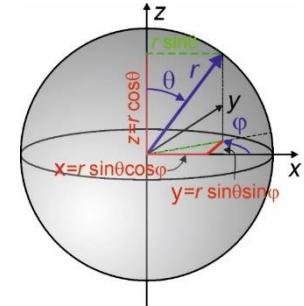
n	l	$R_{n,l}(r)$
1	0	$2Ne^{-x}$
2	0	$2Ne^{-x}(1-x)$
2	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}$

$$N = \left(\frac{1}{na_0}\right)^{3/2}$$

$$x = \frac{r}{na_0}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

l	m	$Y_{l,m}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	± 1	$\mp \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm j\phi}$
1	0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$

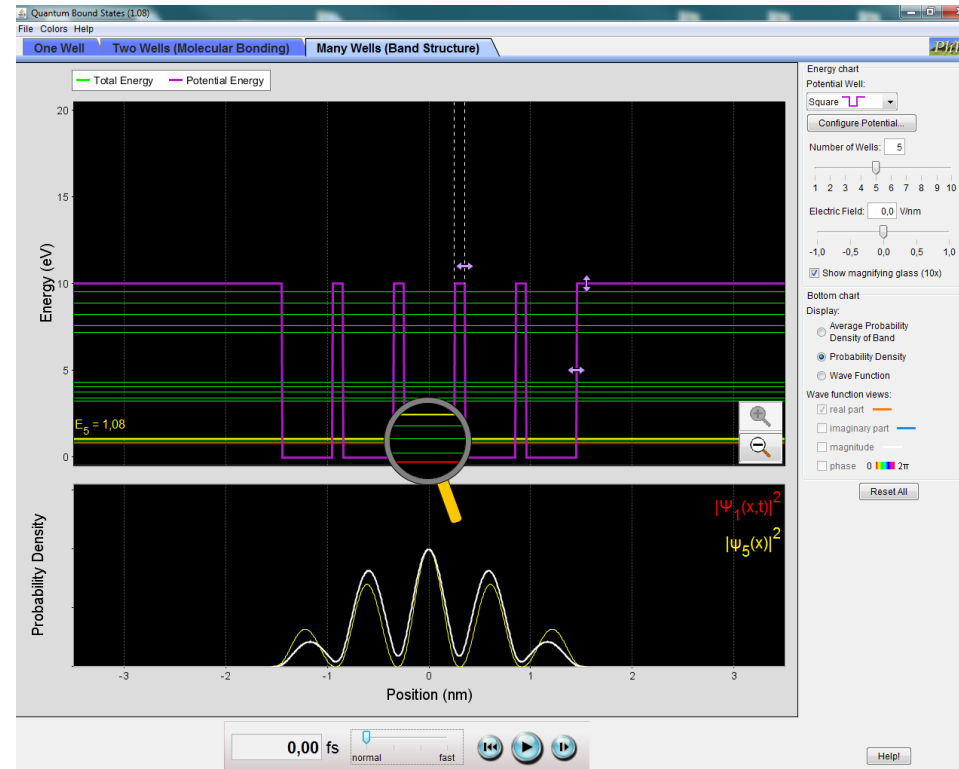


■ Quantenzahlen eines Elektrons im Wasserstoffatom:

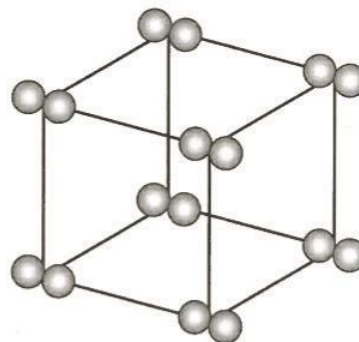
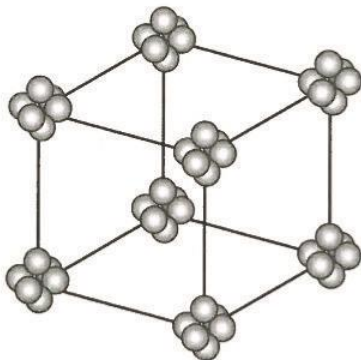
$n=1$		$n = 1, 2, 3, \dots$	(Hauptquantenzahl)
$n=2$		$l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$	(Nebenquantenzahl, Drehimpulsquantenzahl)
		$m = -l, (-l+1), \dots, 0, \dots, l$	(Magnetquantenzahl)
		$s = \pm \frac{1}{2}$	(Spinquantenzahl)
$n=3$			
			
			
			
			
			
	$l=0$ $m=0$ $l=1$ $m=0$ $l=1$ $m=1$ $l=2$ $m=0$ $l=2$ $m=1$ $l=2$ $m=2$		

Wiederholung

■ Gekoppelte Potentialtöpfe:



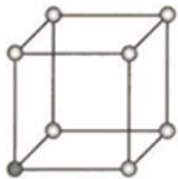
■ Kristall-Gitter:



Kristall: Gitter + Basis

Wiederholung– Kristalle

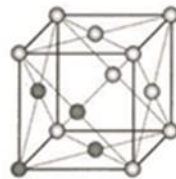
■ 14 Möglichkeiten – die Bravais-Gitter:



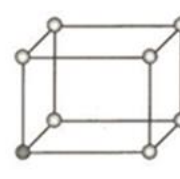
kubisch
primitiv



kubisch
raumzentriert



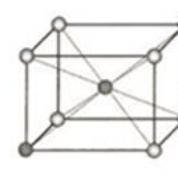
kubisch
flächenzentriert



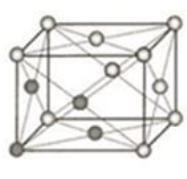
orthorhombisch
primitiv



orthorhombisch
basiszentriert



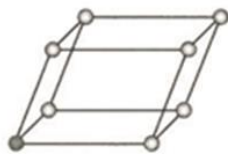
orthorhombisch
raumzentriert



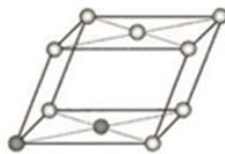
orthorhombisch
flächenzentriert



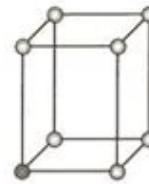
triklin



monoklin
primitiv



monoklin
basiszentriert



tetragonal
primitiv



tetragonal
raumzentriert



hexagonal



trigonal
(rhomboedrisch)

A1 Bloch-Oszillationen

Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos(ka))$ mit $\Delta W = 2 \text{ eV}$ beschreiben.

■ Benutzen Sie:

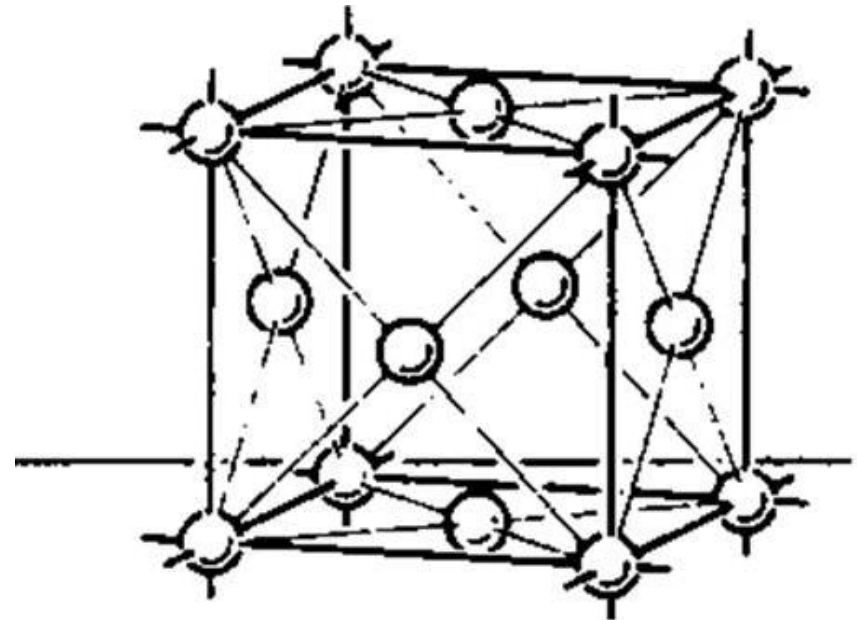
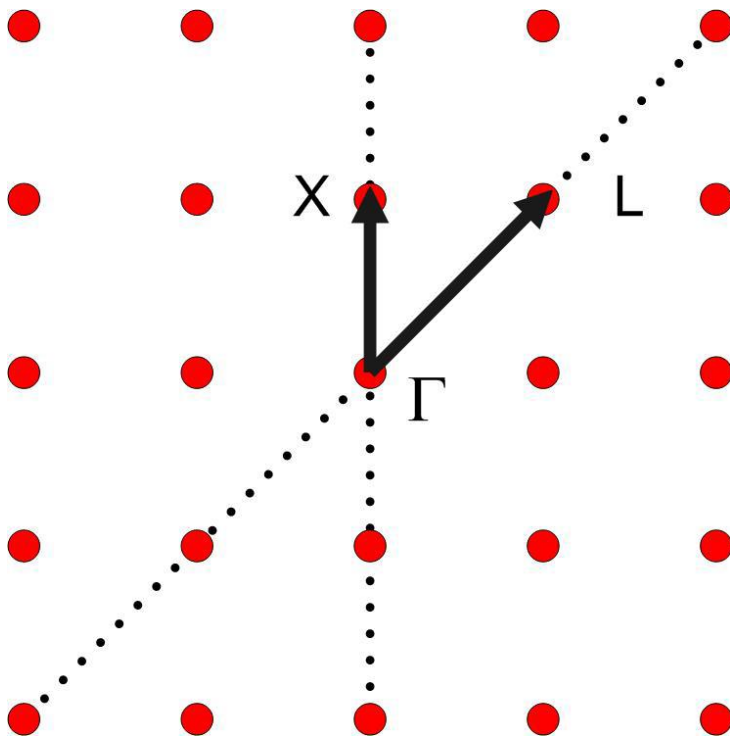
$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$

Die Gitterkonstante beträgt:

$$a_{\text{Si}} = 5.43 \text{ \AA}$$

Einschub Gitterstruktur

Reziprokes Gitter

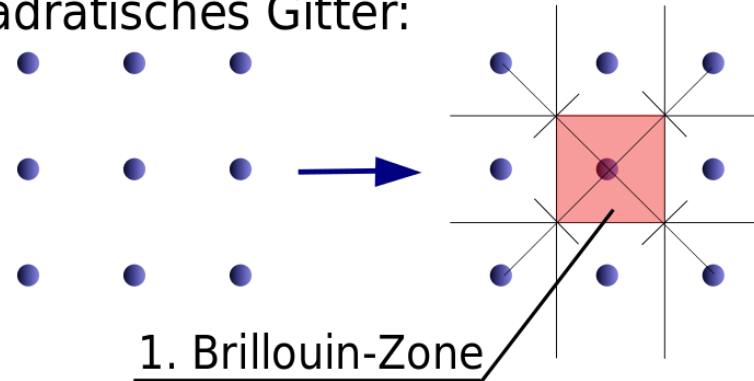


face-centred cubic – fcc
(kubisch-flächenzentriert)

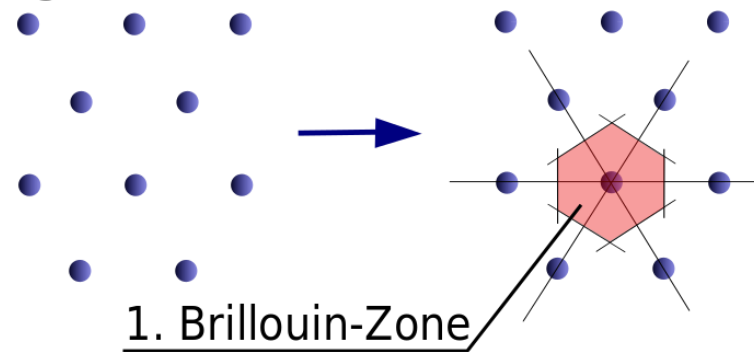
Einschub Gitterstruktur

■ 1. Brillouin-Zone

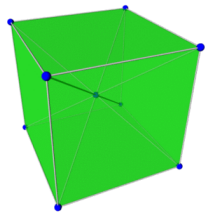
quadratisches Gitter:



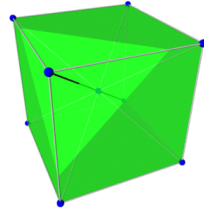
hexagonales Gitter:



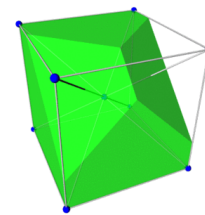
Einschub Gitterstruktur



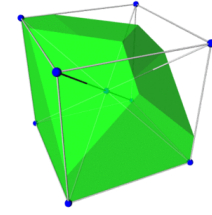
1



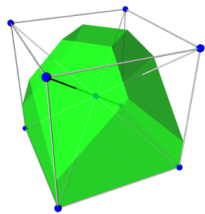
2



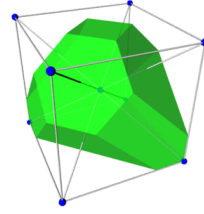
3



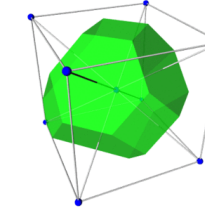
4



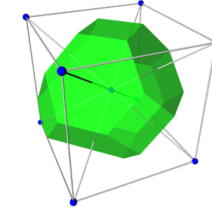
5



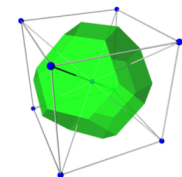
6



7



8



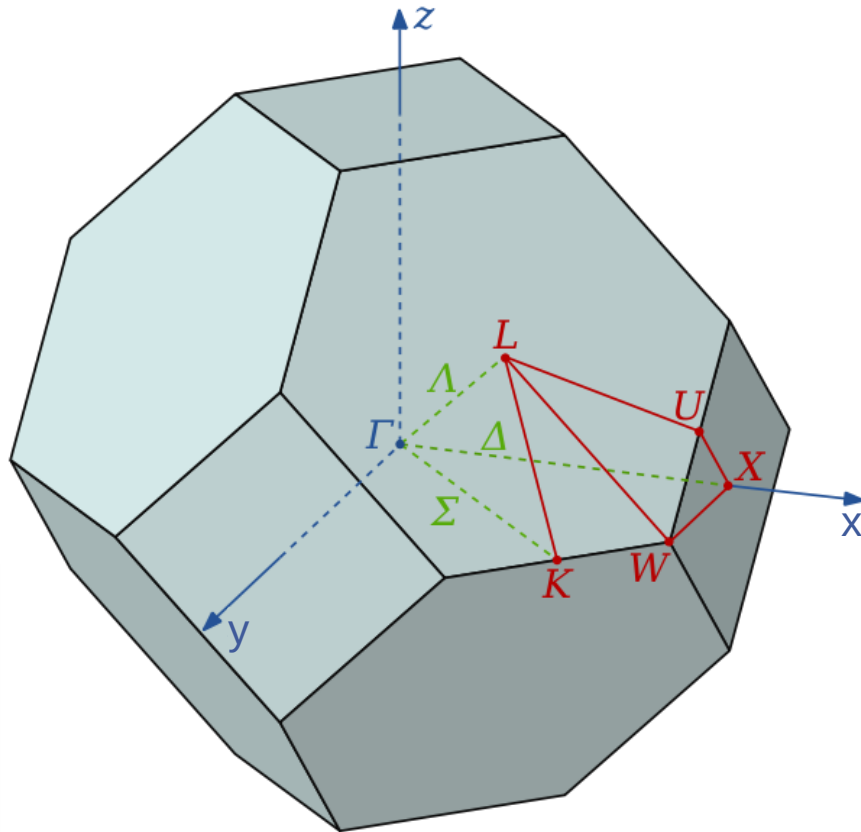
9



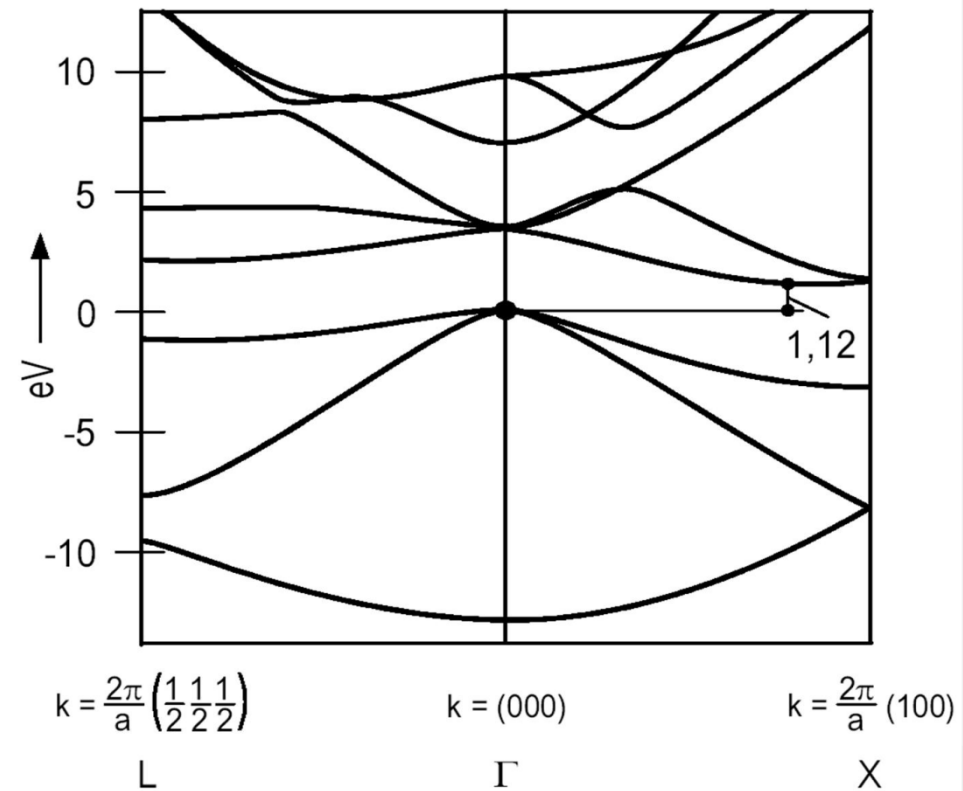
1. Brillouin-Zone eines kubisch flächenzentrierten Gitters

(wenn Kristall kubisch flächenzentriert, dann reziprokes Gitter kubisch raumzentriert und anders herum!)

Einschub Gitterstruktur



■ $\Gamma=(0,0,0)$, $X(1,0,0)$, $L(1/2,1/2,1/2)$



Bandstruktur von Silizium

A1 Bloch-Oszillationen

Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos(ka))$ mit $\Delta W = 2 \text{ eV}$ beschreiben.

■ Benutzen Sie:

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$

Die Gitterkonstante beträgt:

$$a_{\text{Si}} = 5.43 \text{ \AA}$$

Einschub: Geschwindigkeit & effektive Masse

- Wie kommt man auf die Formeln für v und m_{eff} ?

- Geschwindigkeit:
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k}$$

$\uparrow$
 $W = \hbar \omega$

- effektive Masse:

- Klassischer Ansatz: $dW = -eE v_g dt$ und $dW = \left(\frac{\partial W}{\partial k} \right) dk = \hbar v_g dk$

- $dk = -\left(\frac{eE}{\hbar} \right) dt$ $F = -eE = \hbar \frac{dk}{dt}$

$$a = \frac{dv_g}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial k} \right)$$

$\left. \begin{array}{l} dk = -\left(\frac{eE}{\hbar} \right) dt \\ F = -eE = \hbar \frac{dk}{dt} \end{array} \right\} m_{\text{eff}} = \frac{F}{a} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right)^{-1}$

A1 a) Bloch-Oszillationen

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die effektive Masse m_{eff} des Elektrons bei $k = 0$, $k = \frac{\pi}{a}$ und $k = \frac{\pi}{2a}$ im angegebenen Kristallpotential.

■ Partielle Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned}
 W(k) &= \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos ka) \\
 \frac{\partial W}{\partial k} &= -\frac{a\Delta W}{2} \sin ka \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= -\frac{a^2\Delta W}{2} \cos ka
 \end{aligned}$$

■ Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin ka \\
 (m_{\text{eff}})^{-1} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = -\frac{a^2\Delta W}{2\hbar^2} \cos ka
 \end{aligned}$$

A1 a) Bloch-Oszillationen

Elektronenmasse:
 $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin ka$$

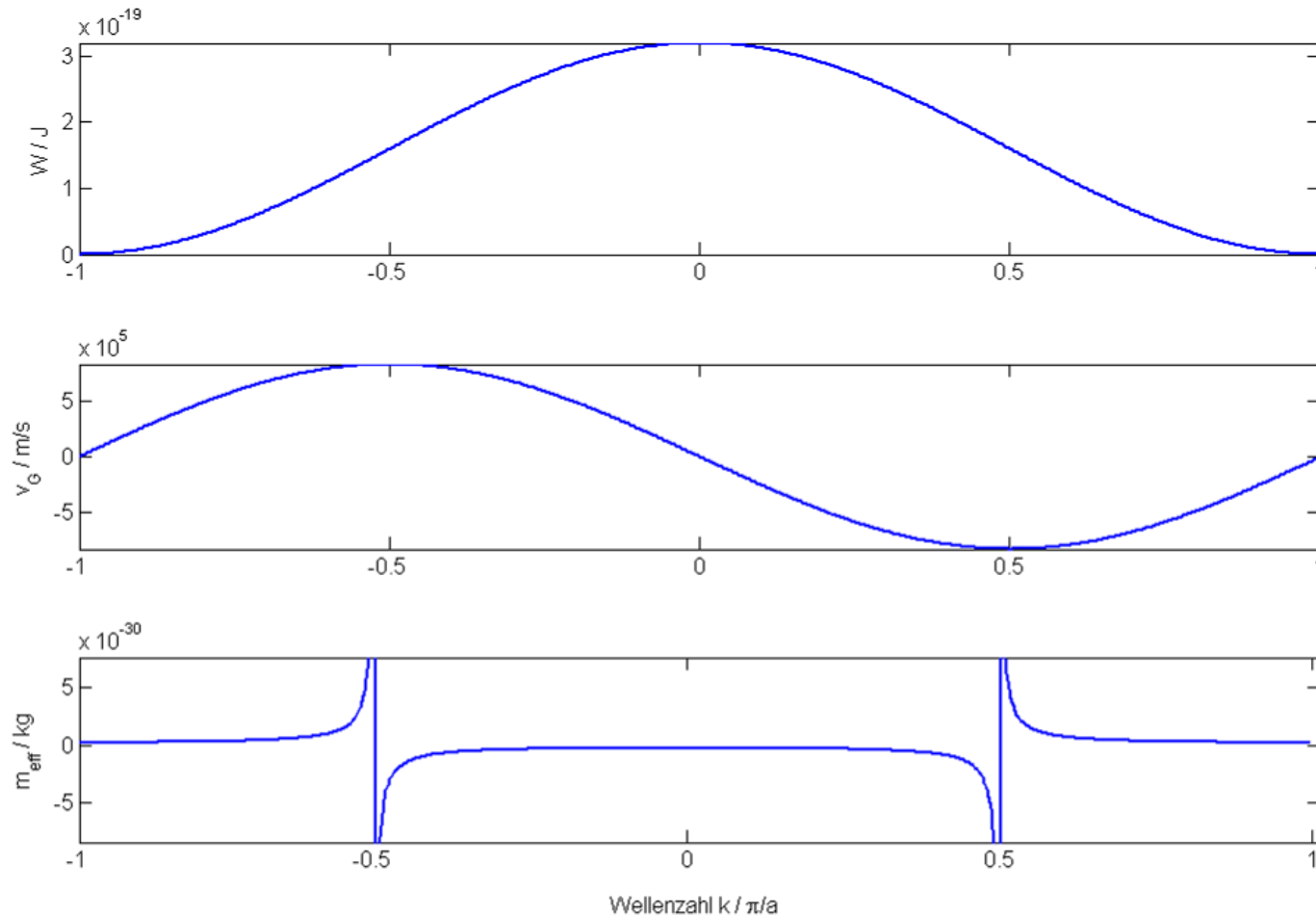
$$(m_{\text{eff}})^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = -\frac{a^2\Delta W}{2\hbar^2} \cos ka$$

■ Einsetzen der k-Werte ergibt:

k	W(k)	v(k)	1/m _{eff} (k)	m _{eff} (k)
0	2 eV	0	$-\frac{a^2\Delta W}{2\hbar^2}$	$-2,35 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$\frac{\pi}{2a}$	1 eV	$8,25 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	∞
$\frac{\pi}{a}$	0 eV	0	$+\frac{a^2\Delta W}{2\hbar^2}$	$+2,35 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

A1 b) Bloch-Oszillationen

Skizzieren Sie $W(k)$, $v(k)$ und $m_{\text{eff}}(k)$.



A1 c) Bloch-Oszillationen

Nun werde ein elektrisches Feld angelegt, das auf die Elektronen eine Kraft F ausübt. Zeigen Sie, dass hiernach die Elektronen-Geschwindigkeit und der Elektronen-Ort zeitlich oszillieren (Bloch-Oszillationen).

- Wir haben bestimmt:

$$v = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin \underbrace{ka}_{\text{zeitabhängig?}}$$

- Aus dem Skript wissen wir:

$$F = \hbar \frac{dk}{dt}$$

- Integration mit konstantem F und $t_0 = 0$:

$$\frac{Ft}{\hbar} = k - k_0$$

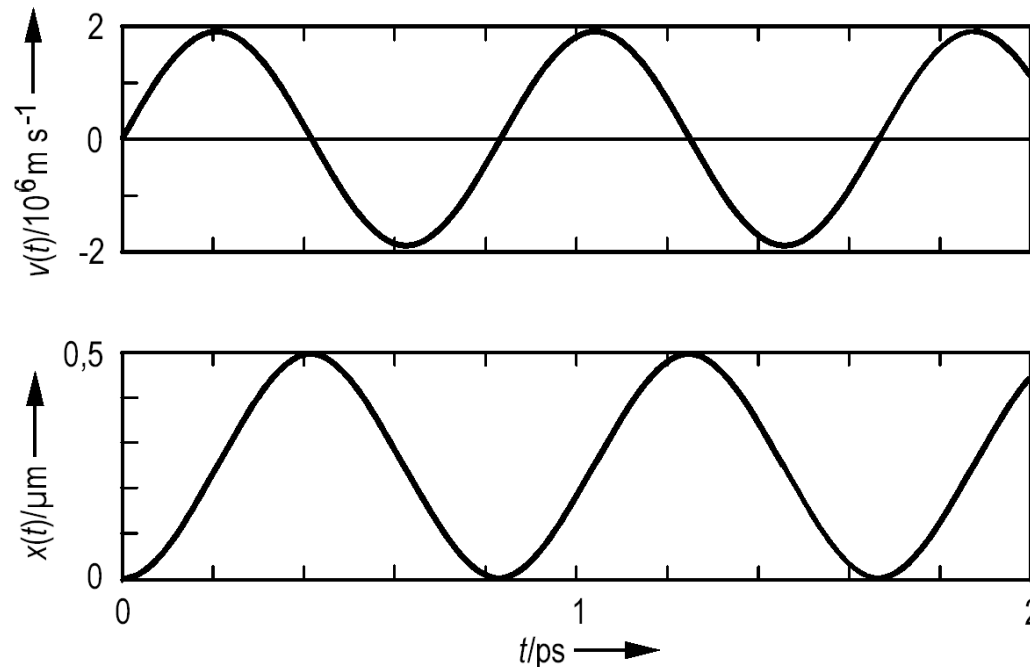
$$k(t) = k_0 + \frac{Ft}{\hbar}$$

A1 c) Bloch-Oszillationen

$$v(t) = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin k(t)a = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin \left(a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right) \right)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{\Delta W}{2F} \left(\cos \left(a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right) \right) - \cos(ak_0) \right)$$

- Ort und Geschwindigkeit oszillieren zeitlich:



A1 d) Bloch-Oszillationen

Warum fließt dann ein Strom bei angelegtem elektrischen Feld?
Berechnen Sie dazu aus der Beweglichkeit der Elektronen in Silizium die mittlere Streuzeit τ . Vergleichen Sie diese Streuzeit mit einer Bloch-Oszillations-Periode für eine Feldstärke von 10^6 V/m.

■ Gegeben ist:

$$\mu = 1300 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}, \quad m_{\text{eff}} = 0.32m_0$$

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{q\tau}{m_{\text{eff}}}$$

A1 d) Bloch-Oszillationen

- Streuzeit der Elektronen in Silizium:

$$\mu = \frac{e_0 \tau}{m_{\text{eff}}} \rightarrow \tau = \frac{\mu m_{\text{eff}}}{e_0} = 2.37 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

- Periode der Bloch-Oszillation:

$$x(t) = x_0 + \frac{\Delta W}{2F} \left(\cos \left(\underbrace{a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right)} \right) - \cos (ak_0) \right)$$

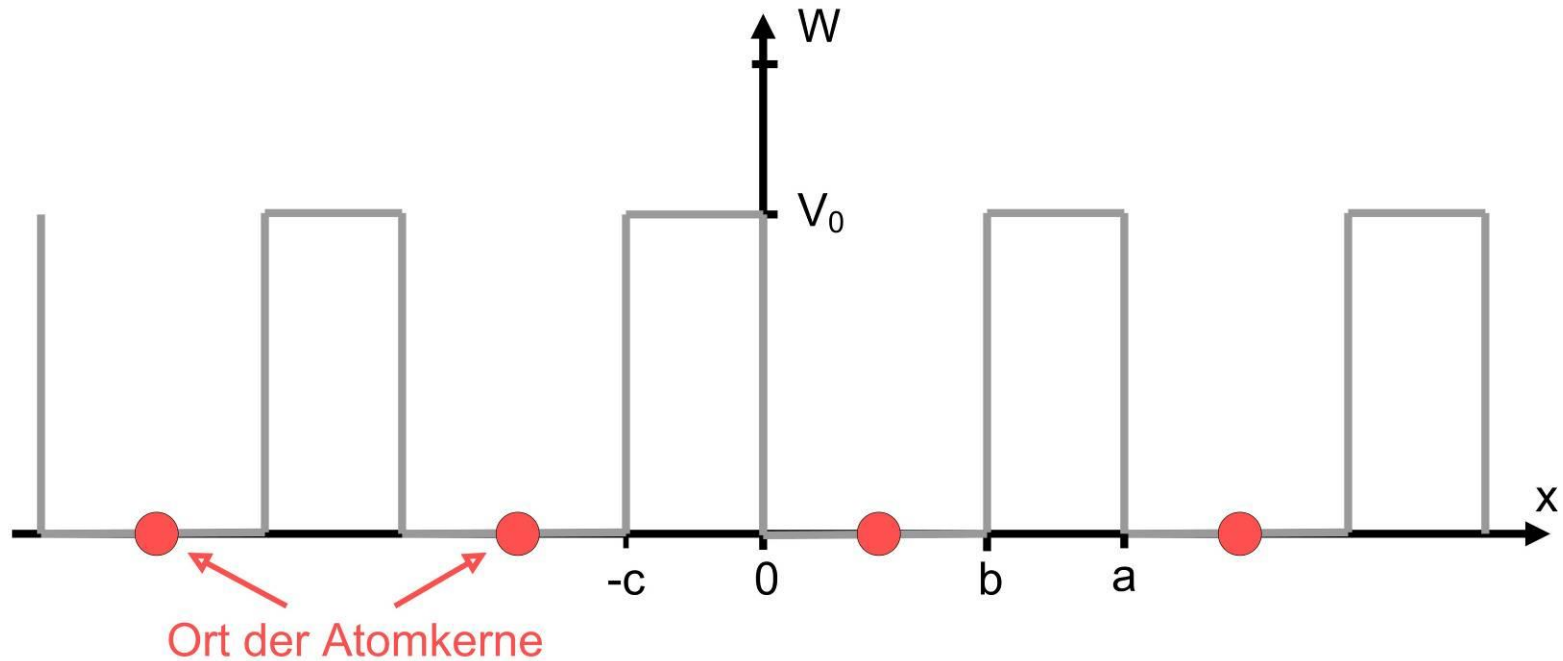
Vergleich mit phasenverschobenen Cosinus: $\cos(\omega t + \phi)$

$$\rightarrow \omega = \frac{aF}{\hbar} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi\hbar}{aF} = \frac{2\pi\hbar}{ae_0 E} = 7.6 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

- Kaum Bloch-Oszillationen wegen deutlich kürzerer Streuzeit
- gerichteter Stromfluss möglich

A2 Kronig-Penney-Modell



- Rechteckförmige Potentiale
- Näherungsmethode zur Berechnung der Bandstruktur mit Bloch-Ansatz

A2 a) Kronig-Penney-Modell

Geben Sie den Ansatz für ein Elektron als Blochwelle im Kristall an.
Welche Eigenschaften haben die Bestandteile des Bloch-Ansatzes?

■ Wellenfunktion:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

mit

$$u(x + a) = u(x)$$

→ Ebene Welle moduliert mit einem Term, der die Periode des Gitters hat

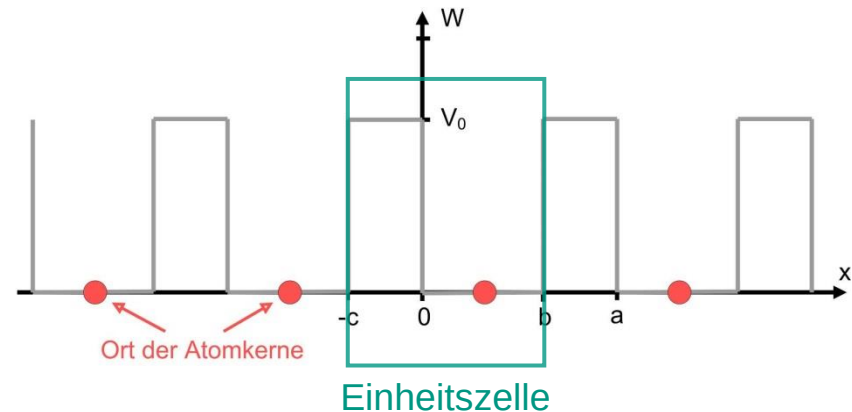
A2 b) Kronig-Penney-Modell

Nun betrachten Sie eine Einheitszelle des Kristalls ($-c \leq x \leq b$). Setzen Sie den Ansatz aus a) für die beiden Bereiche konstanten Potentials in die Schrödingergleichung ein.

■ Abkürzungen:

$$\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$$

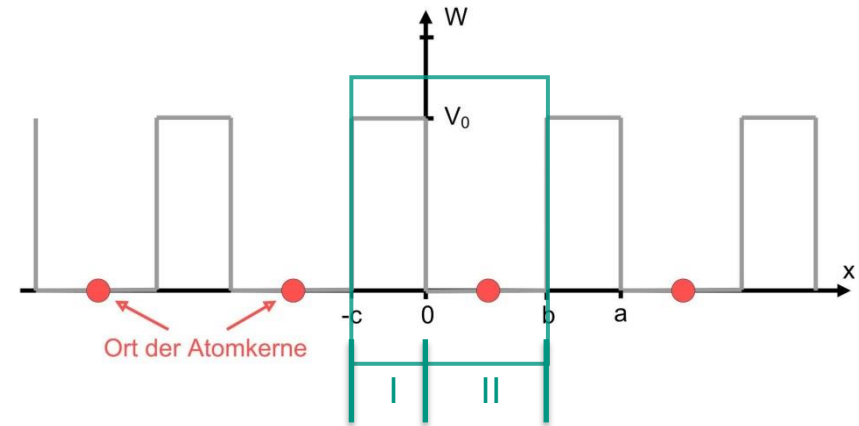


■ Ansatz: Ableiten & Vereinfachen

A2 b) Kronig-Penney-Modell

■ Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = W \psi(x)$$



■ Zwei Gebiete mit konstantem Potential:

$$-c \leq x < 0 \rightarrow V(x) = V_0$$

$$0 \leq x < b \rightarrow V(x) = 0$$

A2 b) Kronig-Penney-Modell

- Wellenfunktion & Schrödingergleichung Bereich I:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V_0 \psi(x) = W \psi(x)$$

$$u(x+a) = u(x)$$

- Einsetzen, Ableiten & Vereinfachen:

$$\Psi'(x) = u'(x)e^{jkx} + u(x)jke^{jkx}$$

$$\Psi''(x) = u''(x)e^{jkx} + 2u'(x)jke^{jkx} - u(x)k^2e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (u''(x)e^{jkx} + 2jku'(x)e^{jkx} - k^2u(x)e^{jkx}) = (W - V_0)u(x)e^{jkx}$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - W))u(x) = 0$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \kappa_2^2)u(x) = 0$$

A2 b) Kronig-Penney-Modell

- Wellenfunktion & Schrödingergleichung Bereich II:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = W \psi(x)$$

$$u(x+a) = u(x)$$

- Einsetzen, Ableiten & Vereinfachen:

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}W)u(x) = 0$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

A2 c) Kronig-Penney-Modell

Finden Sie in den beiden Gebieten Lösungsansätze für die Differentialgleichungen.

■ Gebiet I:

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \kappa_2^2)u(x) = 0$$

■ Gebiet II:

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

■ Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

→ Ansatz:

charakteristische Polynome aufstellen und Lösungsansatz mit Hilfe des passenden Fundamentalsystems aufstellen

A2 c) Kronig-Penney-Modell

- Ansatz: i-te Ableitung von $u(x)$ durch i-te Potenz von λ ersetzen

- Einsetzen ergibt charakteristisches Polynom für Gebiet I:

$$u''(x) + 2jk u'(x) - (k^2 + \kappa_2^2) u(x) = 0$$

$$\lambda^2 + 2jk\lambda - \kappa_2^2 - k^2 = 0$$

- Mit den Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = -jk \pm \sqrt{-k^2 + k^2 + \kappa_2^2} = -jk \pm \kappa_2$$

- Fundamentalsystem:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$$

- Daraus folgt der Lösungsansatz:

$$u_I(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

A2 c) Kronig-Penney-Modell

- In gleicher Weise bestimmen wir für Gebiet II:

$$u''(x) + 2jk u'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

$$\lambda^2 + 2jk\lambda + \kappa_1^2 - k^2 = 0$$

- Mit den Nullstellen:

$$\rightarrow \lambda_{3,4} = -jk \pm \sqrt{-k^2 + k^2 - \kappa_1^2} = -jk \pm j\kappa_1$$

- Daraus folgt der Lösungsansatz:

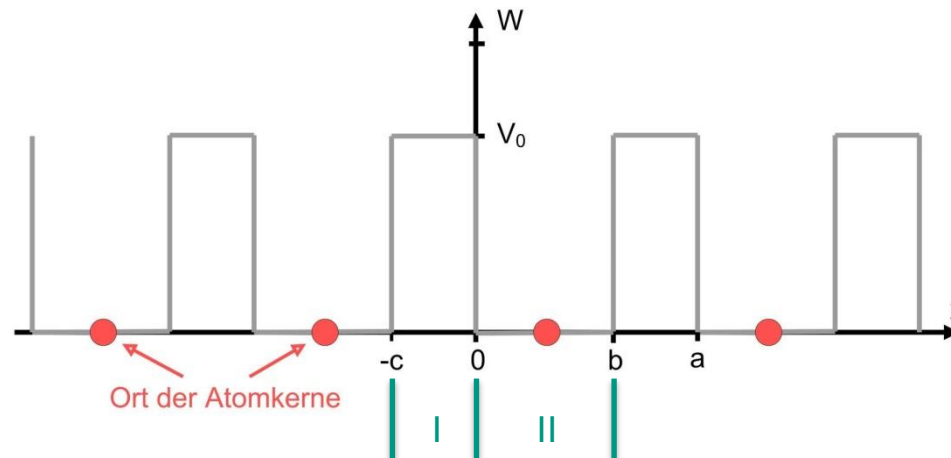
$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{\lambda_3 x} + De^{\lambda_4 x} = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$

A2 d) Kronig-Penney-Modell

Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der in den im letzten Aufgabenteil gefundenen Lösungen auftretenden Konstanten mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen und der Periodizität der Bloch-Funktionen auf.

$$u_{\text{I}}(x) = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$



A2 d) Kronig-Penney-Modell

$$u_{\text{I}}(x) = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$

■ Stetigkeitsbedingungen:

$$u_{\text{I}}(0) = u_{\text{II}}(0)$$

und

$$u'_{\text{I}}(0) = u'_{\text{II}}(0)$$

$$A + B = C + D$$

$$(\kappa_2 - jk)A - (\kappa_2 + jk)B = j(\kappa_1 - k)C - j(\kappa_1 + k)D$$

■ Periodizität der Bloch-Funktionen: $u_{\text{I}}(-c) = u_{\text{II}}(b)$ und $u'_{\text{I}}(-c) = u'_{\text{II}}(b)$

$$Ae^{-(\kappa_2 - jk)c} + Be^{(\kappa_2 + jk)c} = Ce^{j(\kappa_1 - k)b} + De^{-j(\kappa_1 + k)b}$$

$$\begin{aligned} (\kappa_2 - jk)Ae^{-(\kappa_2 - jk)c} - (\kappa_2 + jk)Be^{(\kappa_2 + jk)c} \\ = j(\kappa_1 - k)Ce^{j(\kappa_1 - k)b} - j(\kappa_1 + k)De^{-j(\kappa_1 + k)b} \end{aligned}$$

A2 e) Kronig-Penney-Modell

Das aus den Randbedingungen folgende Gleichungssystem ist wie üblich nur lösbar, falls seine Determinante Δ verschwindet.

■ Determinante:

$$\Delta = j8\kappa_1\kappa_2 e^{jk} \left(\cos(ka) - \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{2\kappa_1\kappa_2} \sinh(\kappa_2 c) \sin(\kappa_1 b) - \cosh(\kappa_2 c) \cos(\kappa_1 b) \right)$$

= 0

■ Mit $\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)}$ und $\kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$

■ Ziel:

$$k = \frac{1}{a} \arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)$$

A2 e) Kronig-Penney-Modell

■ Einsetzen liefert:

$$\cos(ka) - \frac{1 - 2W/V_0}{2\sqrt{(W/V_0) - (W/V_0)^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{W}{V_0}b}\right) - \cosh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{W}{V_0}b}\right) = 0$$

■ Auflösen nach k:

$$k = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{1 - 2W/V_0}{2\sqrt{(W/V_0) - (W/V_0)^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{W}{V_0}b}\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{W}{V_0}b}\right)\right)$$

$$L\left(\frac{W}{V_0}\right)$$

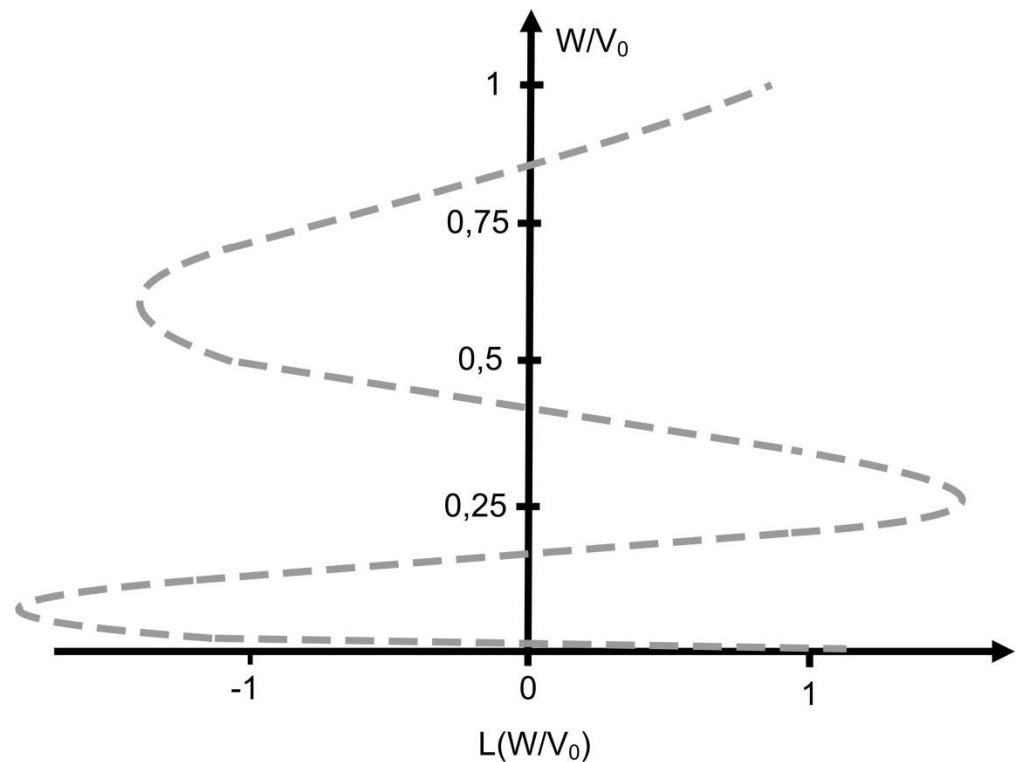
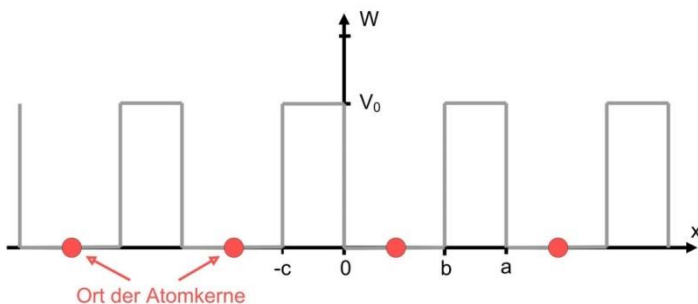
A2 f) Kronig-Penney-Modell

Visualisieren Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Aufgabenteil nun in der Abbildung die Bildung von Bändern und Bandlücken.

■ $k = \frac{1}{a} \arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)$

■ $L \left(\frac{W}{V_0} \right)$ mit:

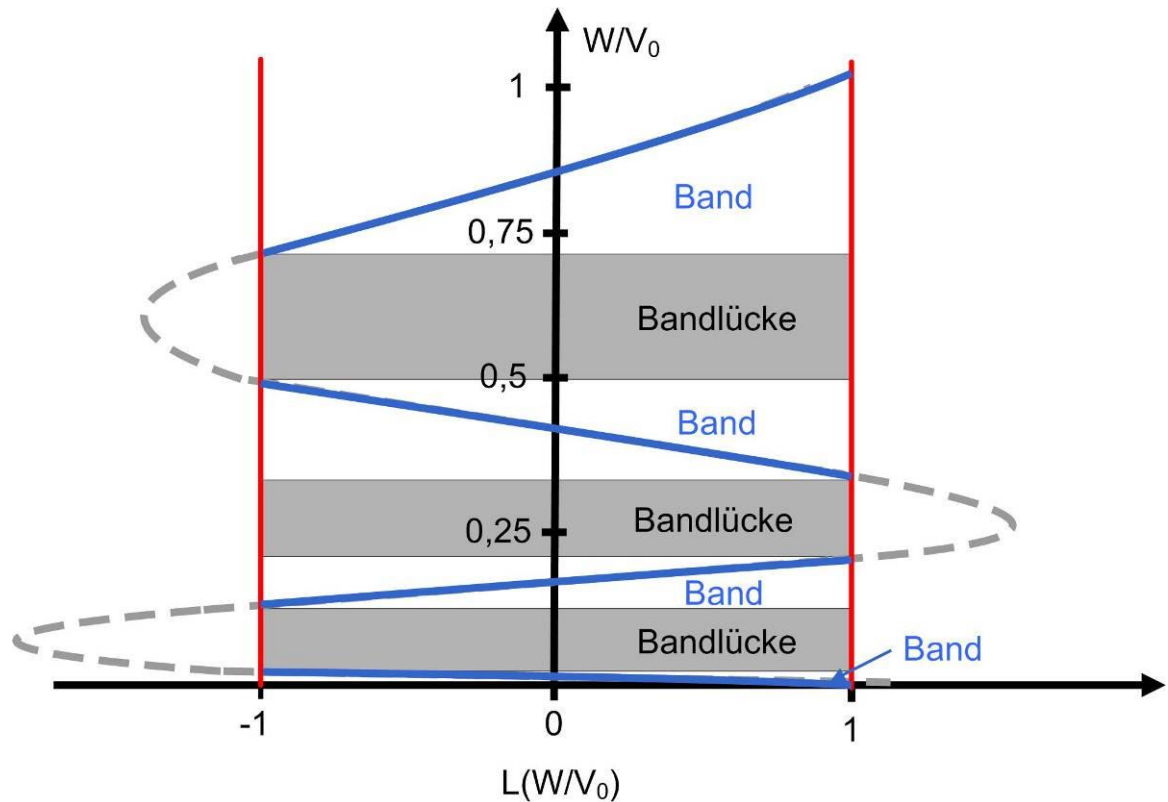
$c/b = 0.1$ und $\frac{2mV_0b^2}{4\hbar^2} = 36$



A2 f) Kronig-Penney-Modell

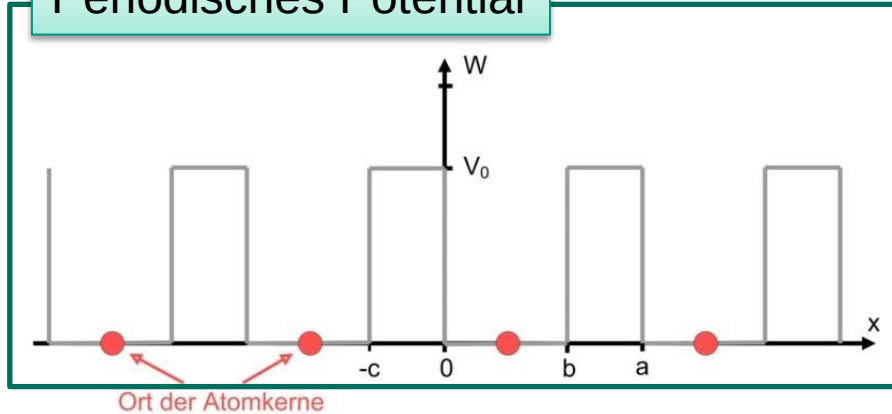
- Näherungsmethode zur Berechnung der Bandstruktur:

$$k = \frac{1}{a} \underbrace{\arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)}_{-1 \leq \cos(x) \leq 1}$$



A2 Kronig-Penney-Modell: Zusammenfassung

Periodisches Potential

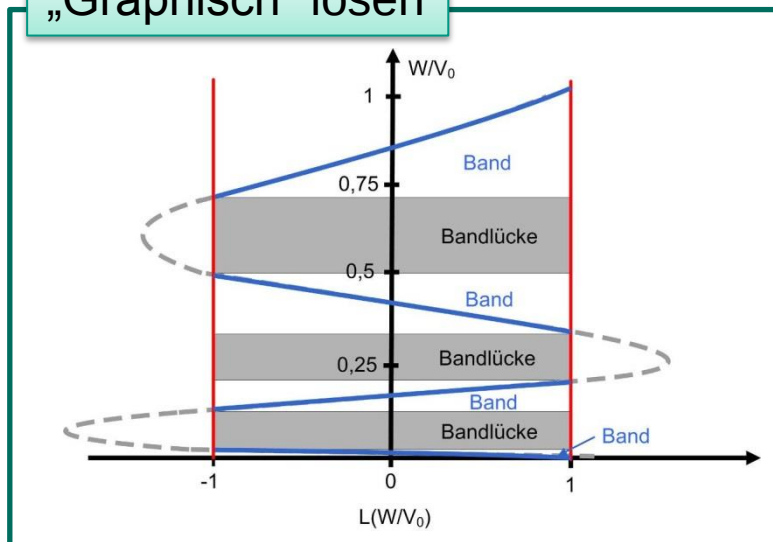


Bloch-Ansatz

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$u(x + a) = u(x)$$

„Graphisch“ lösen



Stetigkeitsbedingungen
& Periodizität
→ Gleichungssystem

Zusammenfassende Fragen

- Wie wirken sich Gitterstrukturen auf die Wellenfunktionen von Elektronen aus?
- Was muss dabei bei mehrdimensionalen Gitterstrukturen beachtet werden?
- Was ist ein indirekter Halbleiter?
- Was bedeutet eine negative effektive Masse?
- Wie sehen Blochwellen aus?

Ankündigungen

■ Tutorien zur 5. Übung: 27. Juni – 1. Juli 2016

■ Lösungen zur 5. Übung: 24. Juni 2016 im ILIAS

■ Nächste Übung (Ü6): 8. Juli 2016 (evtl. Planänderung)

■ Nächste Tutorien (Ü6): 11. – 15. Juli 2016