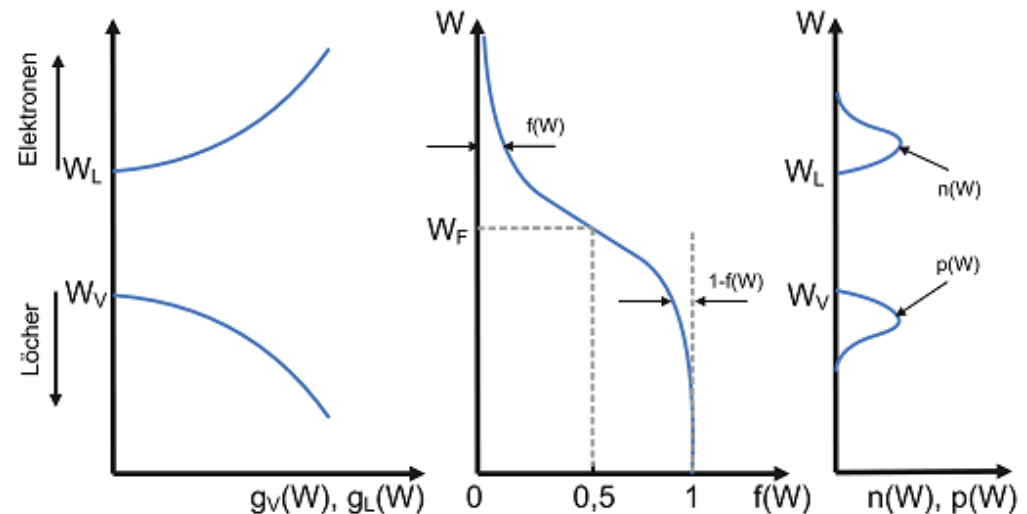
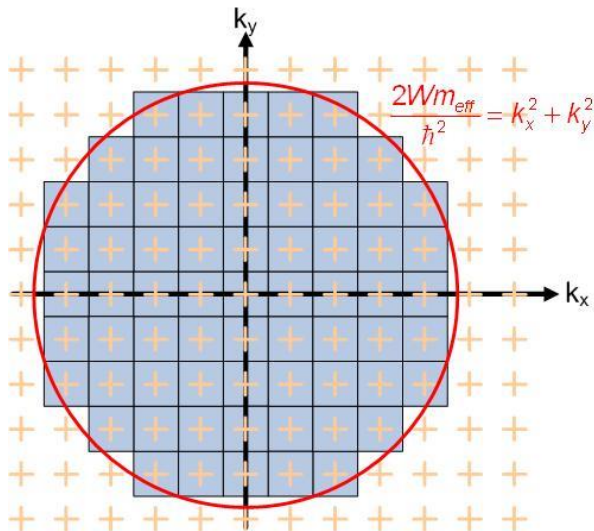


Zustandsdichte, Besetzungswahrscheinlichkeit & Ladungsträgerdichte

6. Übung Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)



Terminplanung



Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag		V10
2		Ausgabe Ü2/T2	V5	
3			Ü3 Ausgabe Ü4/T4	
4				
5		Christi Himmelfahrt		
6		Brückentag	Tut-Woche 3	
7				V11
8				Ü6 Ausgabe Ü7/T7
9		Tut-Woche 1	V6	
10			V7	
11				Tut-Woche 6
12		Ü2		
13		V4		
14				V12
15		Pfingsten		
16		Pfingstmontag	Ü4	
17			Ausgabe Ü5/T5	
18	VL-Beginn			Tut-Woche 7
19				
20			Tut-Woche 4	
21	V1 Ausgabe Ü1/T1			V13
22	V2			Ü7
23		Ausgabe Ü3/T3	V8 anschl. Institutsführung	VL-Ende
24			Ü5 Ausgabe Ü6/T6	
25				
26		Fronleichnam		
27		Brückentag	Tut-Woch 5	
28	V3			
29	Ü1			
30		Tut-Woche 2	V9	
31				

Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
IF: Institutsführung
Brückentag

Ausgabe: Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand: 11.05.2016

alle Donnerstagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im MTI-Hörsaal (Geb. 30.33) statt
alle Freitagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im NTI-Hörsaal (Geb. 30.10) statt

Klausuranmeldung

- Anmeldebeginn: 01.07.2016
- Anmeldeschluss: 19.09.2016
- Abmeldeschluss: 19.09.2016
- Klausur: 22.09.2016, 14 -16 Uhr, Hörsaalverteilung spätestens ein Tag vorher in ILIAS und im Schaukasten des LTI
- Für ETEC's: online im Campus Management System
- Für MWT'ler: s. nächste Folie

Klausuranmeldung für MWT'ler

https://www.iam.kit.edu/wet/pruefungen_pruefung_pb.php

Wichtige Information für Studierende des Studiengangs Materialwissenschaften:

Es ist Ihnen gestattet, die in Ihrer Studienordnung gemeinsam benoteten Prüfungen "Passive Bauelemente" und "Festkörperelektronik" zeitlich getrennt, sprich in unterschiedlichen Semestern, abzulegen. Da das Studierendenportal jedoch nur eine gemeinsame Veranstaltung vorsieht, ist folgendes Prozedere notwendig: Wenn Sie eine der beiden Prüfungen schreiben möchten melden Sie sich bitte zunächst im Portal bei der Gemeinschaftsprüfung PB/FE, Prüfungsnummer 883, an. Anschließend melden Sie sich bitte zusätzlich bei den Übungsleitern der Prüfung, die Sie schreiben möchten, telefonisch oder per Email an. Nur so wissen wir, zu welcher der beiden Prüfungen Sie sich anmelden möchten. Als Fristen gelten die regulären Anmeldefristen wie oben beschrieben.

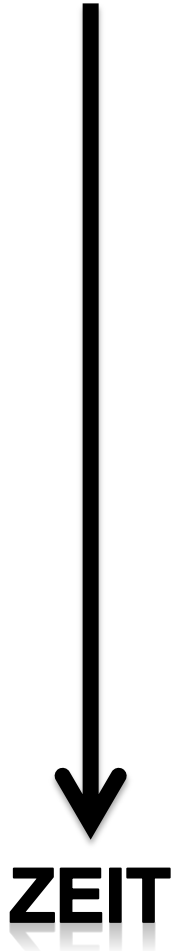
Stand heute: Anmeldung für die Gemeinschaftsprüfung PB/FE und Mail an Übungsleiter

■ Fragestunde am **Donnerstag, 15. September 2016**

14 Uhr – 15 Uhr im MTI - Hörsaal

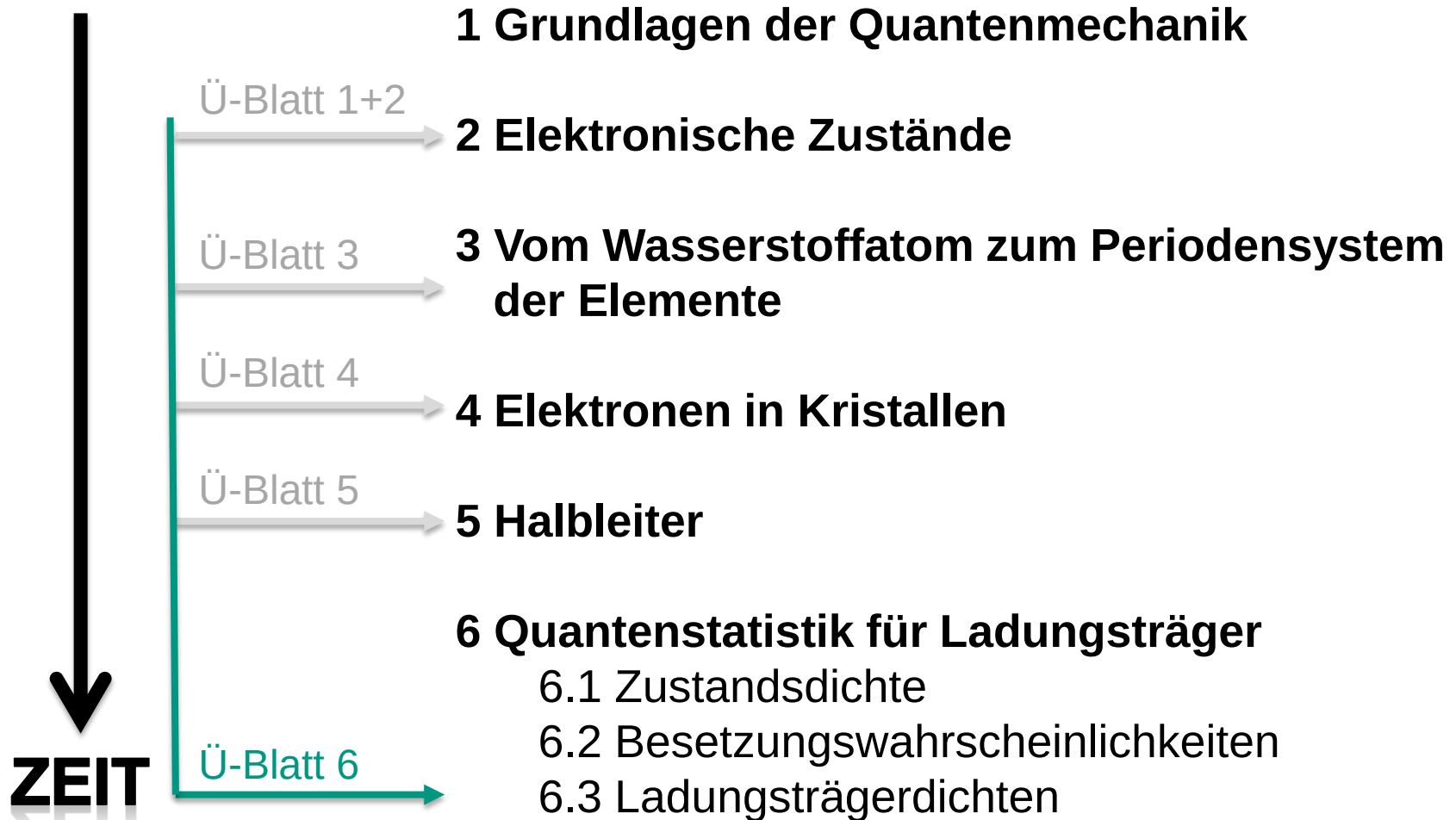


Stand der Dinge



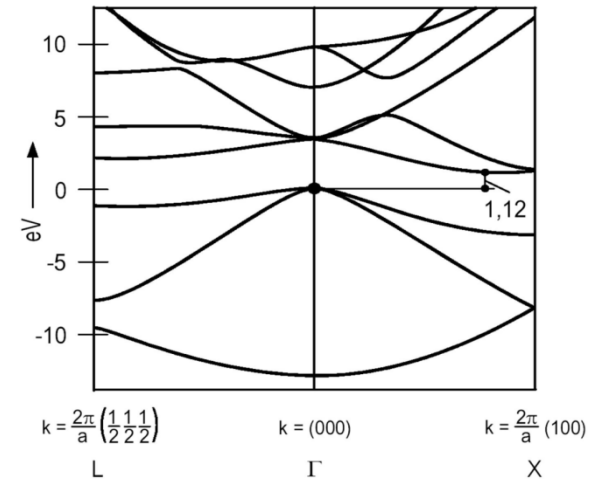
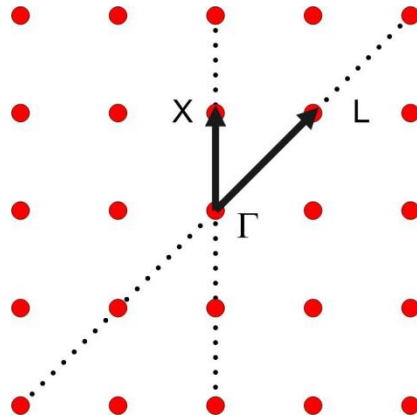
1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge

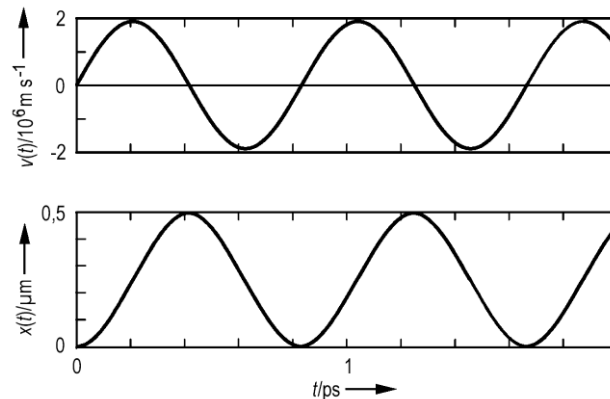


Wiederholung

Richtungsabhängige Bandstruktur



Bloch-Oszillationen



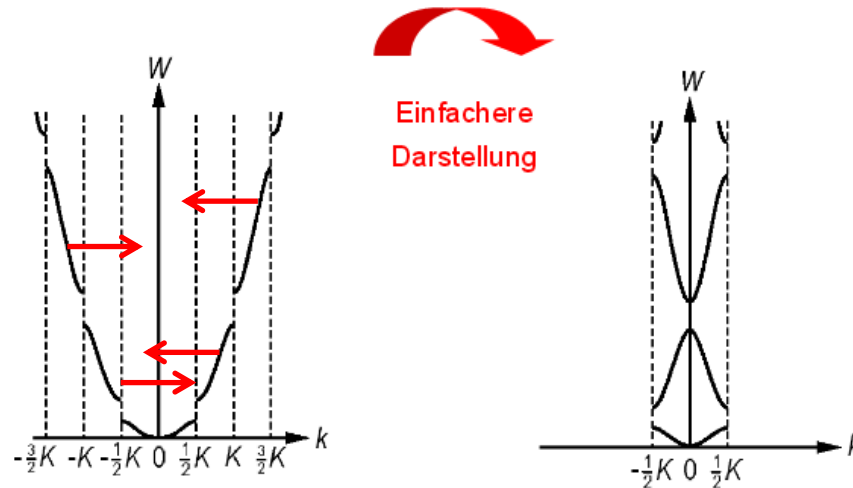
Wiederholung

■ Impulserhaltung im Kristall

- Impuls eines Photons ist um Größenordnungen kleiner als der eines Elektrons → ohne Impulsänderung durch ein Phonon nur senkrechte Übergänge möglich
- Aber: Im Kristall teilweise Aufhebung der Impulserhaltung

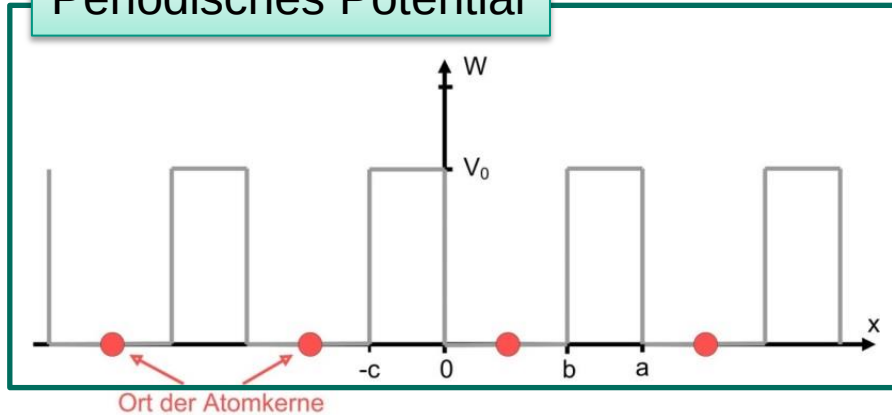
$$k' = k + \vec{G}$$

Mit $\vec{G}$ als Gittervektor des reziproken Kristallgitters

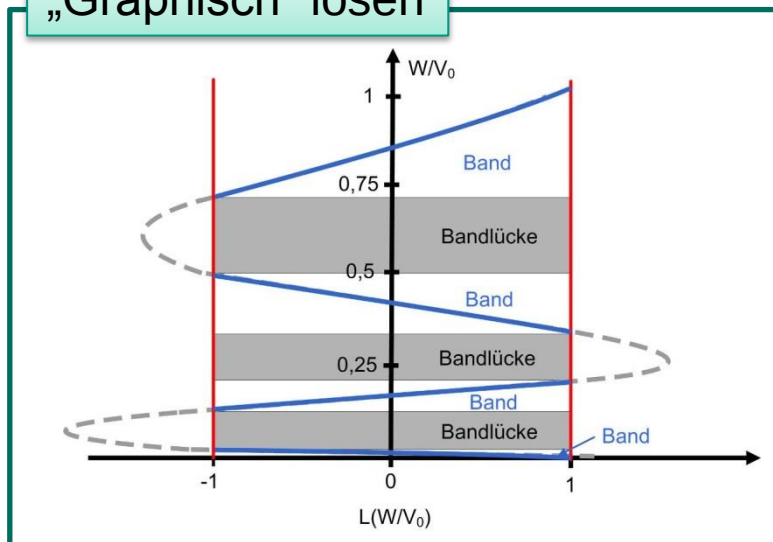


Wiederholung

Periodisches Potential



„Graphisch“ lösen



Bloch-Ansatz

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$u(x + a) = u(x)$$

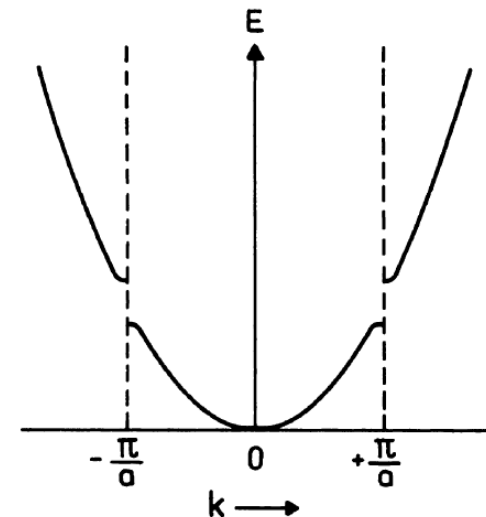
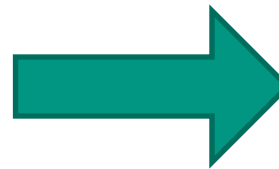
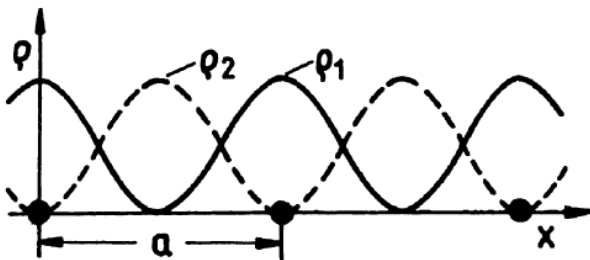
Stetigkeitsbedingungen
& Periodizität
→ Gleichungssystem

Wiederholung

Effektive Masse

Die effektive Masse bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.

Ausbildung der Bandlücke: quasifreie Elektronen

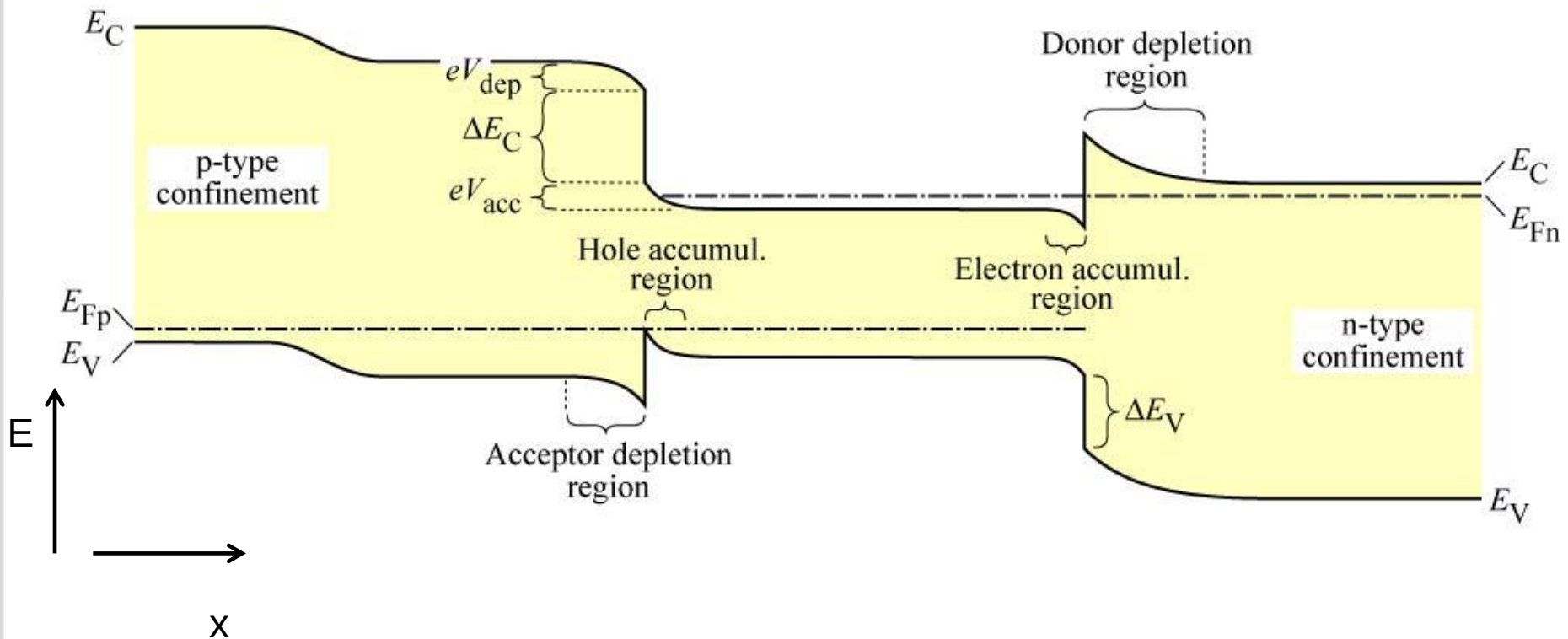


A1 a) Zustandsdichte

Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff "Zustandsdichte" versteht!

Einschub: Wozu das Ganze?

- Wo sitzen welche Ladungsträger und vor allem: Wie viele?



Quelle: www.lightemittingdiodes.org

Einschub: Wozu das Ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

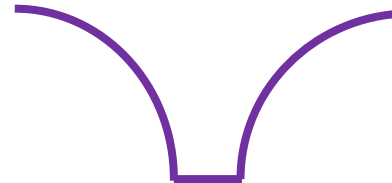
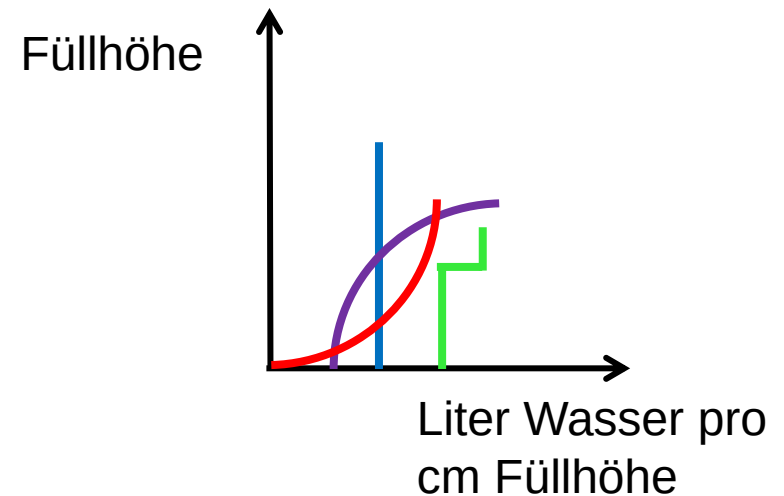
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

Zustandsdichte **Fermi-Dirac-Verteilung** **Ladungsträgerdichte**

A1 a) Zustandsdichte

Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff "Zustandsdichte" versteht!

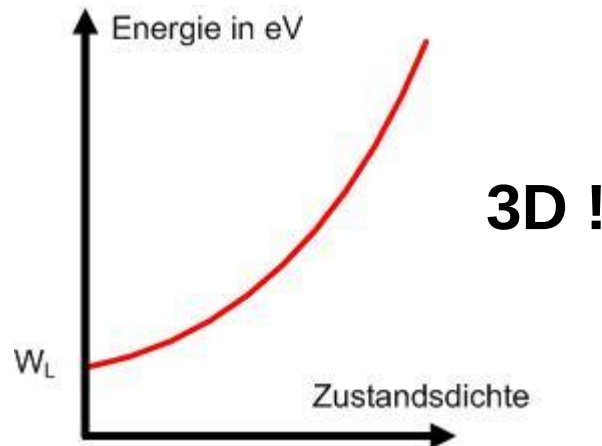
Vergleich:



Anzahl der Zustände pro Energieintervall im Halbleiter

A1 b) Zustandsdichte

Skizzieren Sie den Verlauf der elektronischen Zustandsdichte $g_L(W)$ im Leitungsband eines Halbleiters. Welche Annahmen wurden gemacht, um diesen Ausdruck zu erhalten?



■ Annahmen:

- Parabolische Bänder:

$$W = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m}$$

- Konstante effektive Masse

$$g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \underbrace{\sqrt{W - W_L}}_{\text{Proportional zu } \sqrt{W}}$$

Proportional zu $\sqrt{W}$

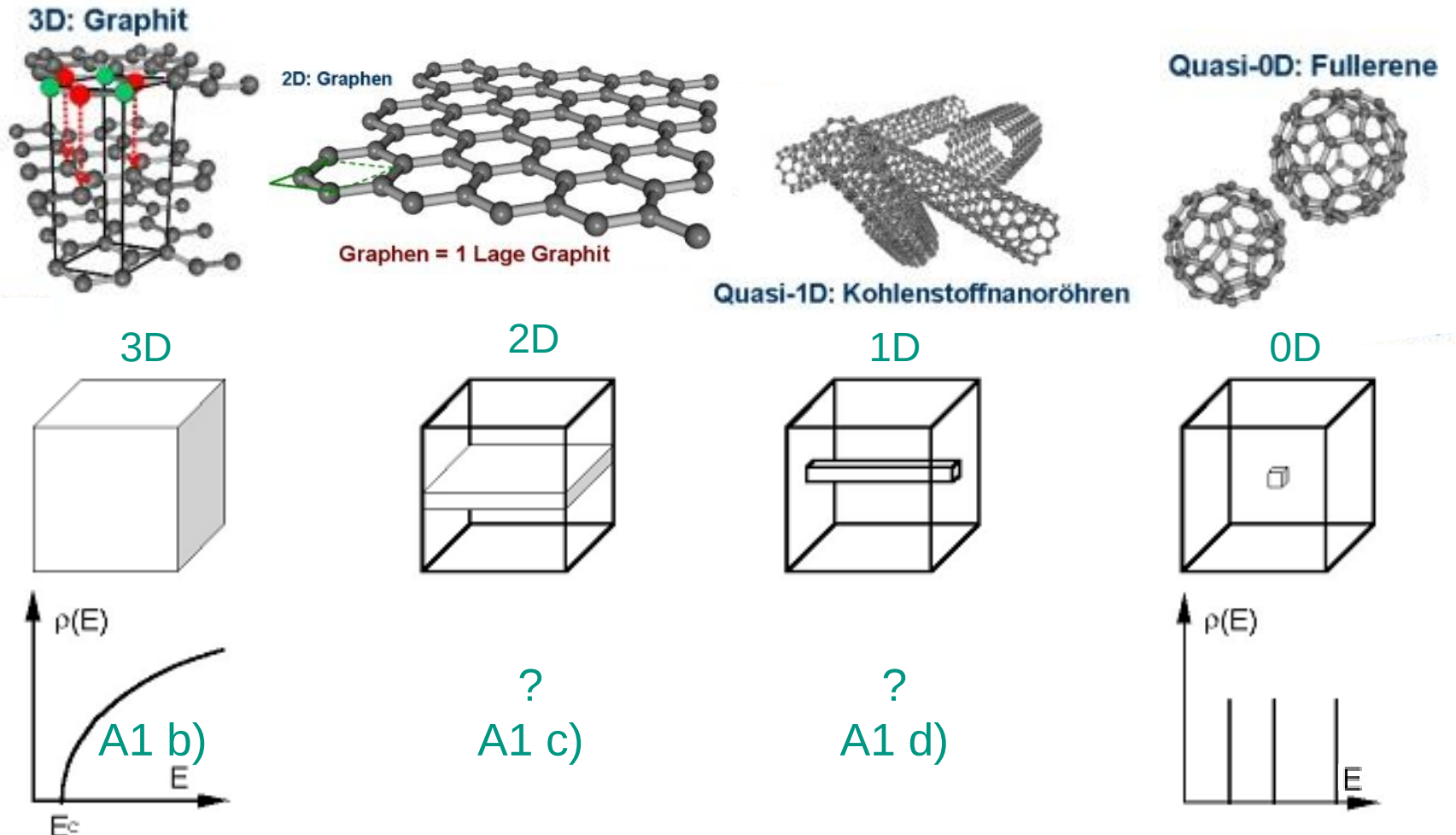
$$[g_{3D}] = \frac{1}{J m^3}$$

A1 c) Zustandsdichte

Berechnen Sie die Zustandsdichte $g_L(W)$ für eine zweidimensionale Struktur. Gehen Sie dazu von einem zweidimensionalen k -Raum aus und benutzen Sie die gleiche Strategie wie in der Vorlesung für drei Dimensionen gezeigt.

A1 c) Zustandsdichte

■ Zustandsdichte in Halbleitern:



A1 c) Zustandsdichte

■ Lösungsansatz:

1. „Volumen“ eines Zustandes und „Gesamtvolumen“ der Zustände bestimmen (im k -Raum)
2. Anzahl der Zustände bestimmen als „Gesamtvolumen/Zustandsvolumen“
3. Zuwachs/Rückgang pro Energie-Intervall bestimmen, d.h. nach der Energie ableiten
4. Spin beachten!

Rückblick: Potentialtopf

- Periodische Randbedingung:

$$\Psi(0) = \Psi(L)$$

- Führt zu folgenden Einschränkung:

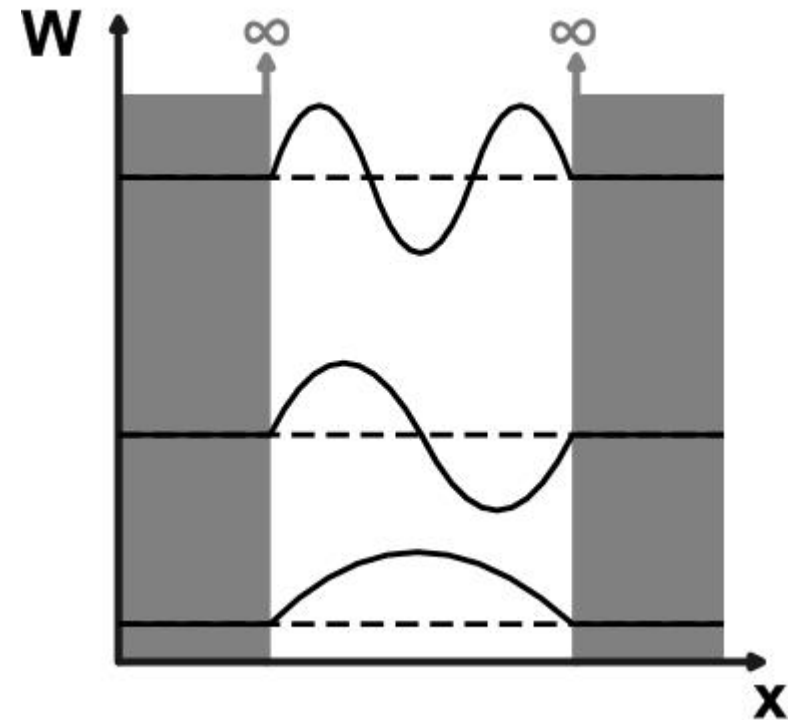
$$k = \frac{2\pi}{L}n$$

- In mehreren Dimensionen:

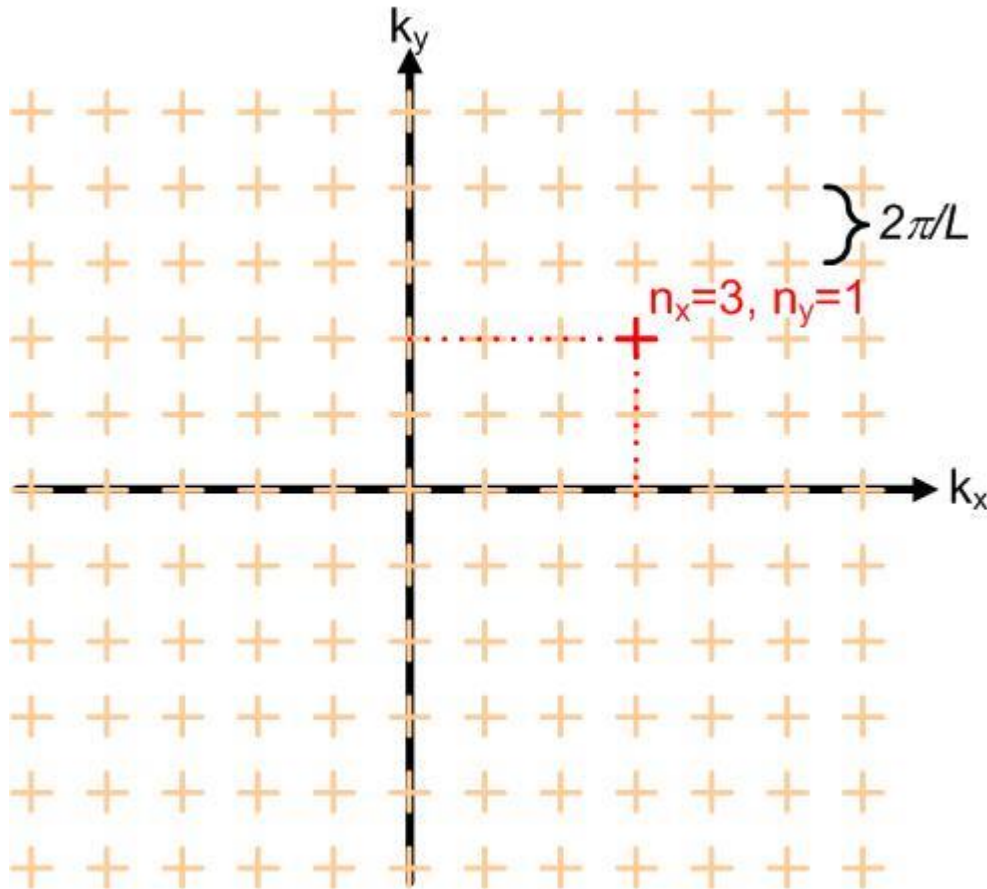
$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L}n_y$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$



A1 c) Zustandsdichte

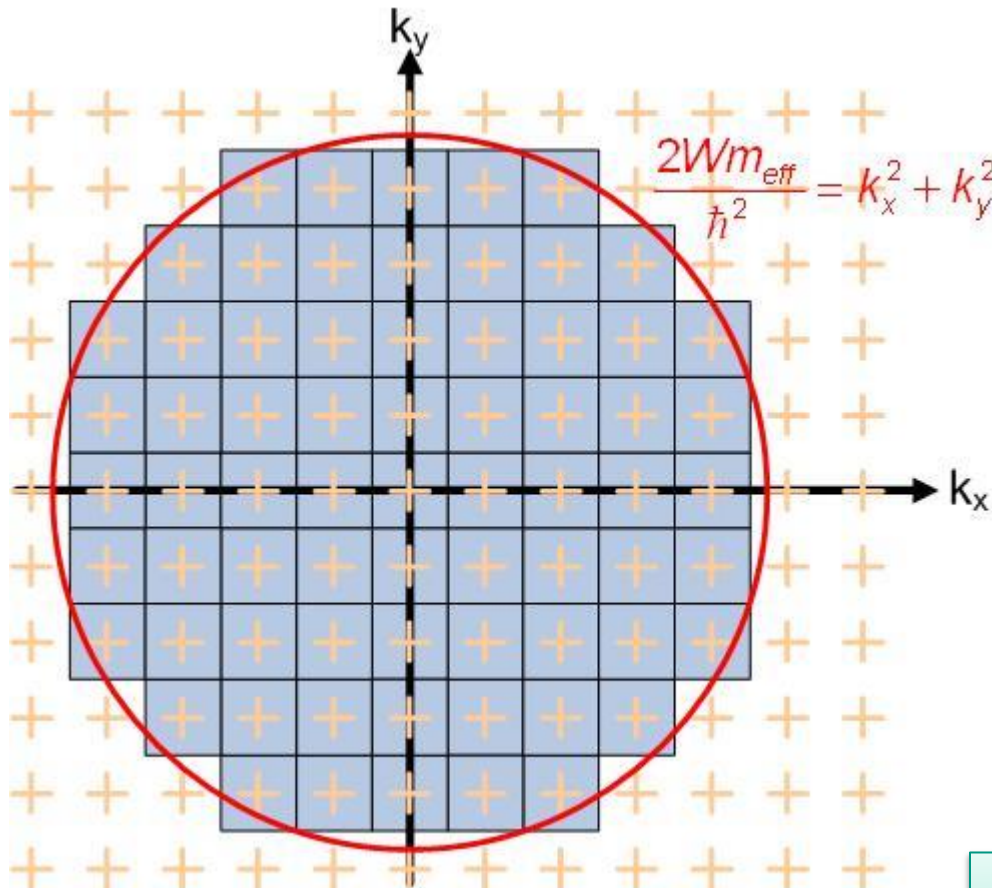


■ Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$$

$$\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

A1 c) Zustandsdichte



■ Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$$

$$\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

■ Kreis im k-Raum mit Radius:

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

Alle Zustände innerhalb des Kreises
haben eine Energie $< W$

A1 c) Zustandsdichte

- Fläche eines Zustands:

$$F_{\text{Zustand}} = \frac{4\pi^2}{L^2}$$

- Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{F_{\text{Kreis}}}{F_{\text{Zustand}}} = \frac{\pi k_R^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{\pi 2mWL^2}{4\hbar^2\pi^2} = \frac{mWL^2}{2\hbar^2\pi}$$

- Anzahl der Zustände pro Energieintervall:

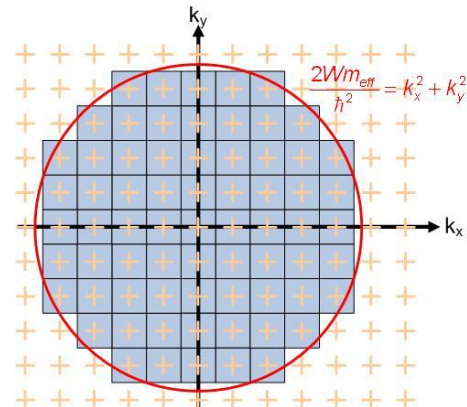
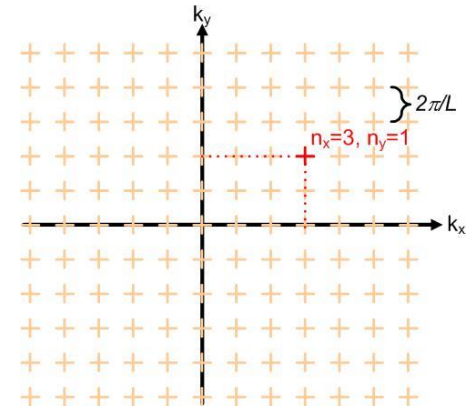
$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{mL^2}{2\hbar^2\pi}$$

- Normierung & Spin:

$$g(W)_{2D} = 2 \frac{1}{F} D(W) = \frac{m}{\hbar^2\pi}$$

$$[g_{2D}] = \frac{1}{J m^2}$$

→ konstant



A1 d) Zustandsdichte

Nun betrachten wir die Zustandsdichte in einem "Quantendraht". Das sind Gebilde, die in erster Näherung als eindimensional angenommen werden können. Führen Sie im eindimensionalen k -Raum die Ableitung der Zustandsdichte durch!

A1 c) Zustandsdichte

■ Länge eines Zustands: $L_{\text{Zustand}} = \frac{2\pi}{L}$

■ Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

■ Alle Zustände mit Energie $< W$ liegen innerhalb:

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

■ Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2mW} L}{\pi \hbar}$$

A1 c) Zustandsdichte

- Anzahl der Zustände pro Energieintervall:

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{m}L}{\pi\hbar\sqrt{2W}}$$

- Normierung & Spin:

$$g(W)_{1D} = 2\frac{1}{L}D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{W}}$$

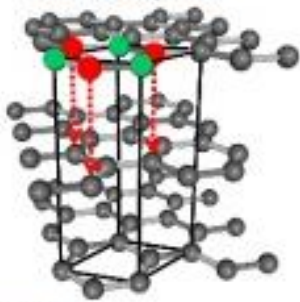
→ Proportional zu $\frac{1}{\sqrt{W}}$

$$[g_{1D}] = \frac{1}{J m}$$

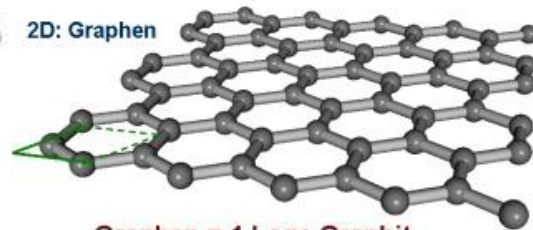
Zustandsdichte

■ Zustandsdichte in Halbleitern

3D: Graphit



2D: Graphen



Graphen = 1 Lage Graphit

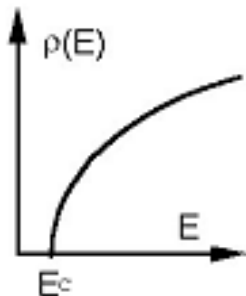
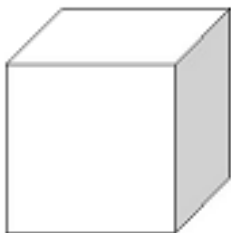


Quasi-1D: Kohlenstoffnanoröhren

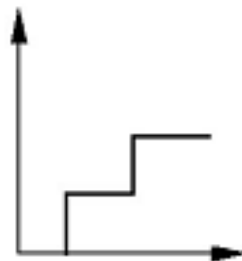
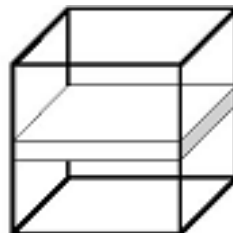
Quasi-0D: Fullerene



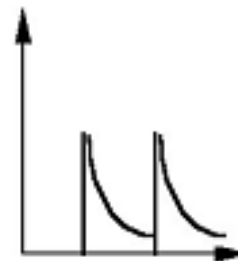
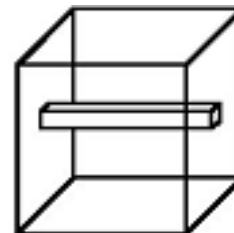
3D



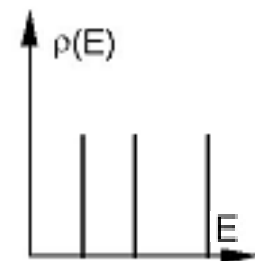
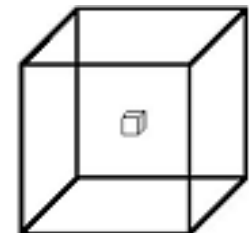
2D



1D



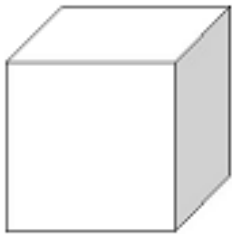
0D



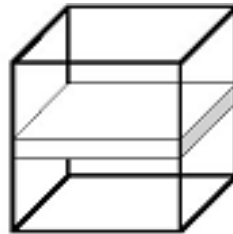
Zustandsdichte

■ Zustandsdichte in Halbleitern

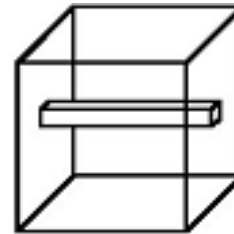
3D



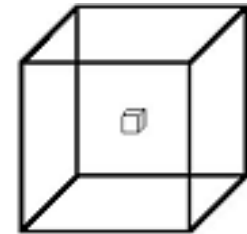
2D



1D



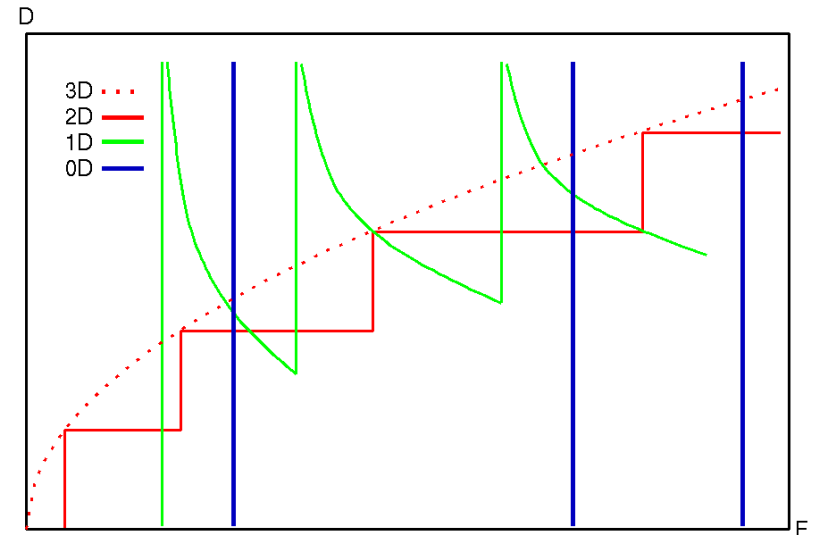
0D



Bei 1D und 2D wird zur Berücksichtigung höherer Energieniveaus die Heaviside-Funktion („Einheitssprung“) herangezogen:

$$g(W)_{2D} \rightarrow g(W)_{2D} \sum_l \theta(W - W_l)$$

$$g(W)_{1D} \rightarrow \sum_l g(W - W_l)_{1D} \theta(W - W_l)$$



Einschub: Wozu das ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

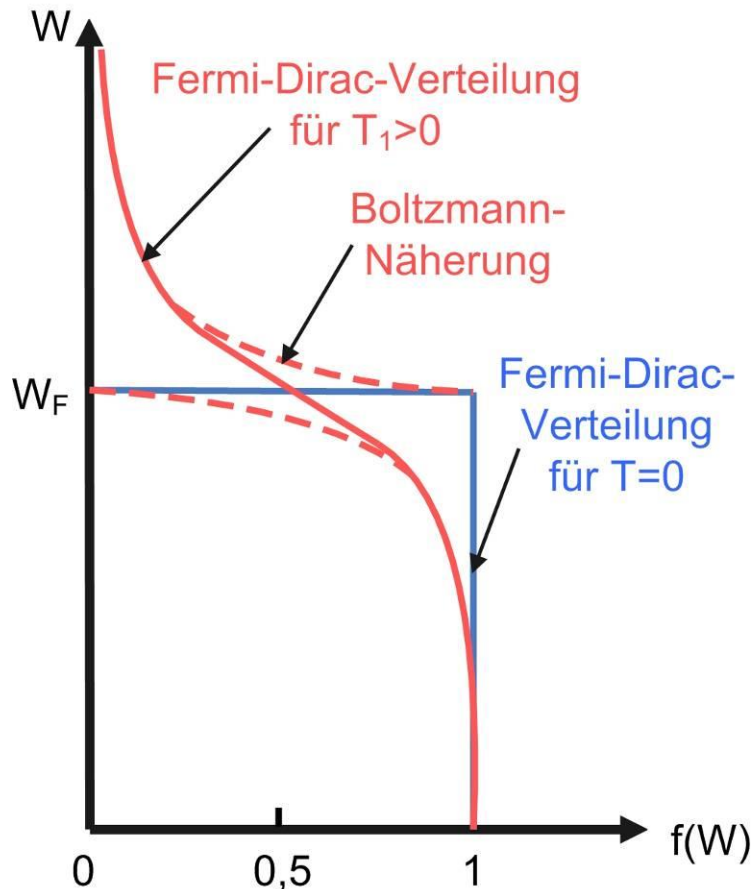
$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

$\downarrow$  $\downarrow$ $\downarrow$

Zustandsdichte Fermi-Dirac-Verteilung Ladungsträgerdichte

Fermi-Verteilung für Elektronen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein elektronischer Zustand bei einer Energie W besetzt ist?



$$f_{FD} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

- abhängig von Temperatur
- abhängig vom Abstand $(W - W_F)$ von der Fermienergie W_F
- in Bändern Boltzmann-Approximation sinnvoll:

$$f_B = \exp\left(-\frac{W - W_F}{k_B T}\right)$$

Einschub: Wozu das ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

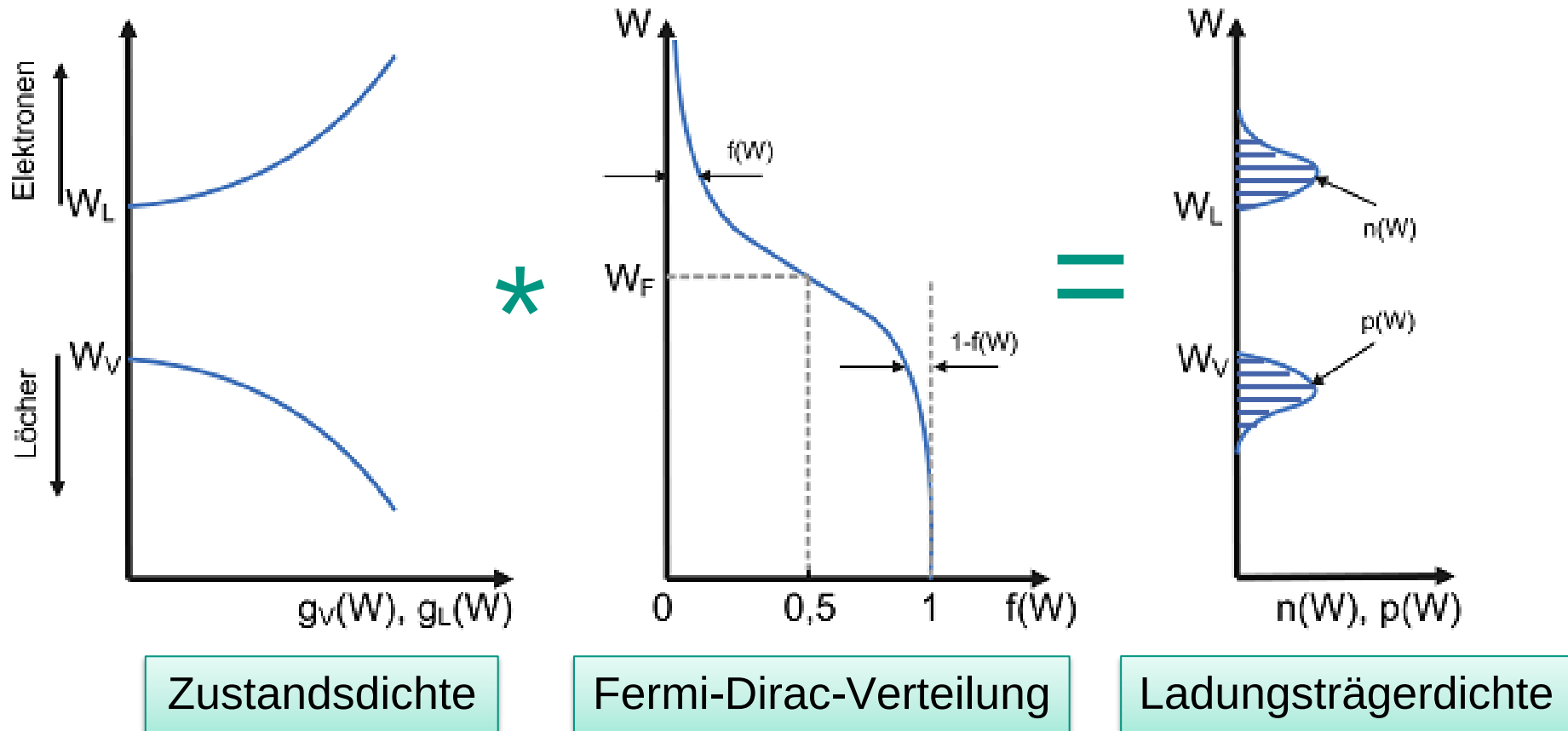
$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

$\downarrow$ ✓
Zustandsdichte

$\downarrow$ ✓
Fermi-Dirac-Verteilung

$\downarrow$
Ladungsträgerdichte

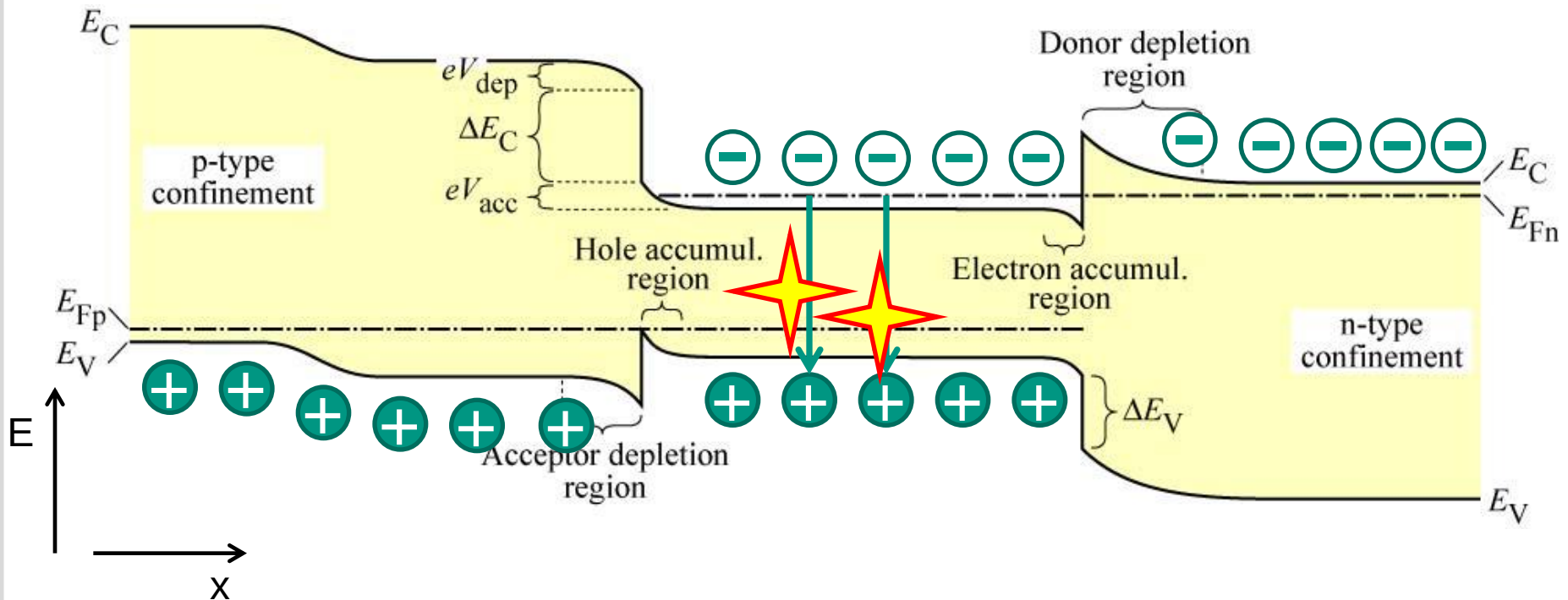
Von der Fermi-Verteilung und der Zustandsdichte zu wahrscheinlichen Ladungsträgerdichten



Applet: <http://tinyurl.com/FreieLadungstraeger>

Ausgangsfrage

- Wo sitzen welche Ladungsträger?



Quelle: www.lightemittingdiodes.org

Einschub: Wozu das ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

$\downarrow$ ✓ $\downarrow$ ✓ $\downarrow$ ✓
Zustandsdichte Fermi-Dirac-Verteilung Ladungsträgerdichte

A2 a) Intrinsische Halbleiter

Germanium hat eine Bandlücke von 0,69 eV. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche der Masse des freien Elektrons. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichten von Elektronen und Löchern bei 0 K und bei Raumtemperatur.

■ Ansatz:

$$n \cdot p = N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{k_B T}} \left[\frac{1}{m^6} \right] \quad N_{\text{eff}}^{V,L} = 2 \left(\frac{m_{p,e}^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{m^3} \right]$$

■ Im intrinsischen Halbleiter gilt $n = p$ und

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} \left[\frac{1}{m^3} \right]$$

$$n_i(T = 300 \text{ K}) = 4,03 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$n_i(T = 0 \text{ K}) = 0$$

A2 b) Intrinsische Halbleiter

Bestimmen Sie die Stromdichte durch einen 1 mm langen Germanium-Kristall, bei einer angelegten Spannung von 2 V. Recherchieren Sie dazu die Beweglichkeiten der Elektronen und Löcher!

■ Ansatz: Driftstrom

$$j = (ne\mu_e + pe\mu_h)E = e(n\mu_e + p\mu_h)\frac{U}{d}$$

■ Mit $n = p = n_i$ ergibt sich:

$$j = en_i(\mu_e + \mu_h)\frac{U}{d}$$

Recherche:

$$\mu_e = 3900 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\mu_h = 1900 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$j(T = 300 \text{ K}) = 7500 \text{ Am}^{-2} = 0,75 \text{ Acm}^{-2}$$

$$j(T = 0 \text{ K}) = 0$$

A3 Fermi-Energie im intrinsische Halbleiter

In einem intrinsischen Halbleiter betrage die effektive Masse von Elektronen im Minimum des Leitungsbandes ein Drittel der effektiven Masse von Löchern im Maximum des Valenzbandes. Wo liegt das Fermi-Niveau im Falle der Eigenleitung bei Raumtemperatur? Die Boltzmann-Näherung sei gültig.

■ Ansatz:

$$n = p = n_i \qquad n = N_{\text{eff}}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} \qquad p = N_{\text{eff}}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

■ Daraus folgt:

$$N_{\text{eff}}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} = N_{\text{eff}}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$
$$e^{\frac{2E_F}{k_B T}} = \frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{\frac{E_V + E_L}{k_B T}}$$

■ Logarithmieren und nach E_F auflösen:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \right)$$

A3 Fermi-Energie im intrinsische Halbleiter

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \right) \quad N_{\text{eff}}^{V,L} = 2 \left(\frac{m_{p,e}^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

- Daraus folgt:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \underbrace{\frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)}_{\approx 1}$$

- Für $T = 0$ K liegt die Fermi-Energie genau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband.
- Mit steigenden Temperaturen verschiebt sich die Fermi-Energie zu höheren Energien.

Zusammenfassende Fragen

- Warum interessiert uns die elektronische Zustandsdichte?
- Welche Verteilung bestimmt die energetische Verteilung für Elektronen? Welches sind die enthaltenen Parameter?
- Wie ist das Verhältnis von Elektronen- und Löcherdichte im intrinsischen Halbleiter? Wo liegt das Fermi-Niveau?
- Wie berechnet man die Ladungsträgerdichte im Halbleiter?

Von der Fermi-Verteilung und der Zustandsdichte zu wahrscheinlichen Ladungsträgerdichten

- Wir wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zustand einer bestimmten Energie bei einer bestimmten Temperatur mit einem Elektron besetzt ist:
→ Fermi-Verteilung $f(W,T)$
- Wir können die Dichte der möglichen elektronischen Zustände einer bestimmten Energie in einem System berechnen:
→ Zustandsdichte $g_L(W)$ (Löcher/Valenzband: $g_V(W)$)
- Wie groß ist nun die wahrscheinliche Elektronendichte bei einer bestimmten Energie?
→ $n(W,T) = \int g_L(W) \cdot f(W,T)$
- Wie groß ist die wahrscheinliche Löcherdichte bei einer bestimmten Energie?
→ $p(W,T) = \int g_V(W) \cdot (1 - f(W,T))$

Termine

- Nächste und letzte Übung: Freitag, 22.07.2016
- Tutorium 6: 11.07. – 15.07.2016
- Tutorium 7: 18.07. – 22.07.2016
- Fragestunde: Donnerstag, 15.09.2016
- Klausur: Donnerstag, 22.09.2016