

Von der Dotierung zum pn-Übergang

7. Übung Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2016

Manuel Koppitz, Noah Strobel

Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag		V10
2		Ausgabe Ü2/T2	V5	
3			U3 Ausgabe Ü4/T4	
4				
5		Christi Himmelfahrt		
6		Brückentag	Tut-Woche 3	
7				V11
8				U6 Ausgabe Ü7/T7
9		Tut-Woche 1	V6	
10			V7	
11				Tut-Woche 6
12		U2		
13		V4		
14				V12
15		Pfingsten		
16		Pfingstmontag	U4	
17			Ausgabe Ü5/T5	
18	VL-Beginn			Tut-Woche 7
19				
20			Tut-Woche 4	
21	V1 Ausgabe Ü1/T1			V13
22	V2			U7
23		Ausgabe Ü3/T3	V8 anschl. Institutsführung	VL-Ende
24			U5 Ausgabe Ü6/T6	
25				
26		Fronleichnam		
27		Brückentag	Tut-Woch 5	
28	V3			
29	U1			
30		Tut-Woche 2	V9	
31				

Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
IF: Institutsführung
Brückentag

Ausgabe: Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand: 11.05.2016

alle Donnerstagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im MTI-Hörsaal (Geb. 30.33) statt
alle Freitagstermine finden von 11.30 - 13.00 Uhr im NTI-Hörsaal (Geb. 30.10) statt

Klausuranmeldung

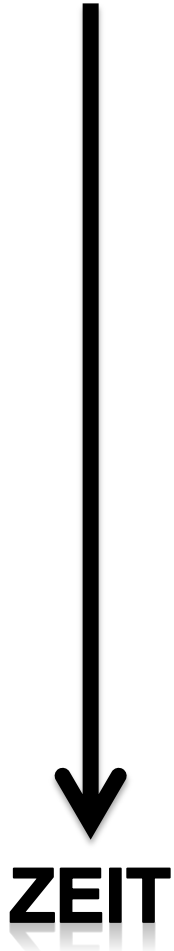
- Anmeldebeginn: 01.07.2016
- Anmeldeschluss: 19.09.2016
- Abmeldeschluss: 19.09.2016
- Klausur: 22.09.2016, 14 -16 Uhr, Hörsaalverteilung spätestens ein Tag vorher in ILIAS und im Schaukasten des LTI
- Für ETEC und MECHINF: online (QISPOS)
- Für MWT: online (CAS Campus)



Dienstag, 15.09.2016 von 14:00 – 15:00 Uhr, MTI-Hörsaal

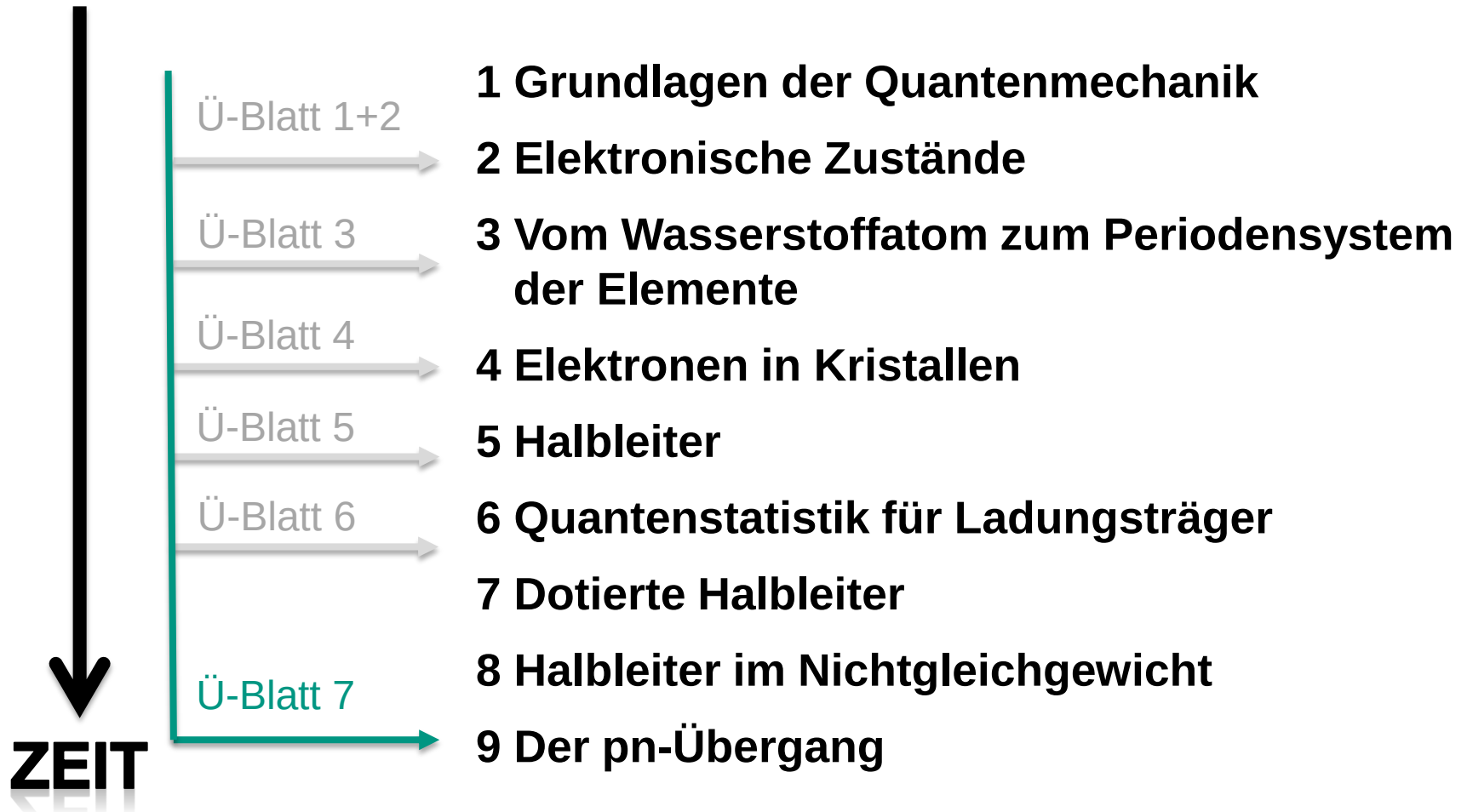


Stand der Dinge



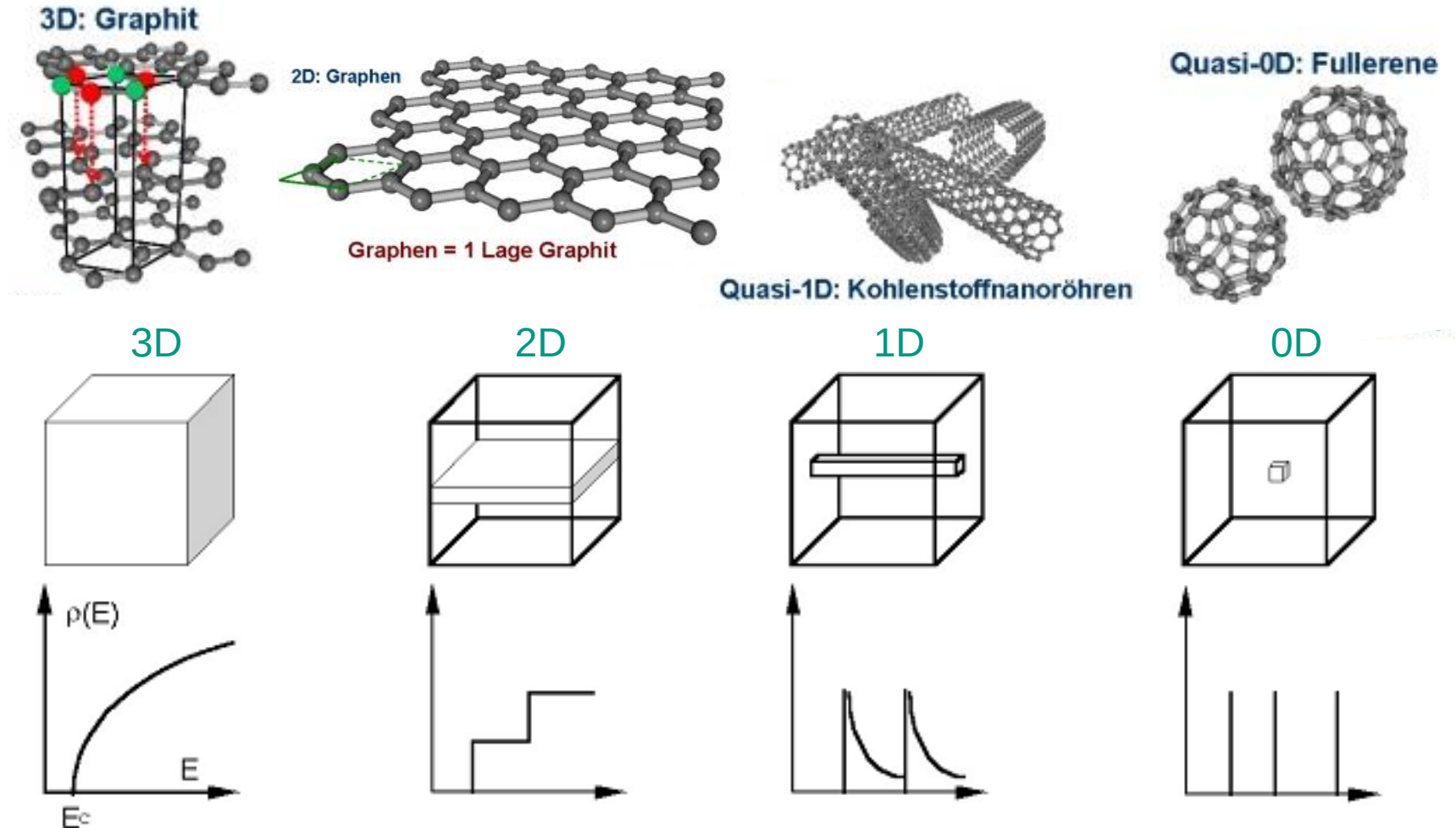
1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge



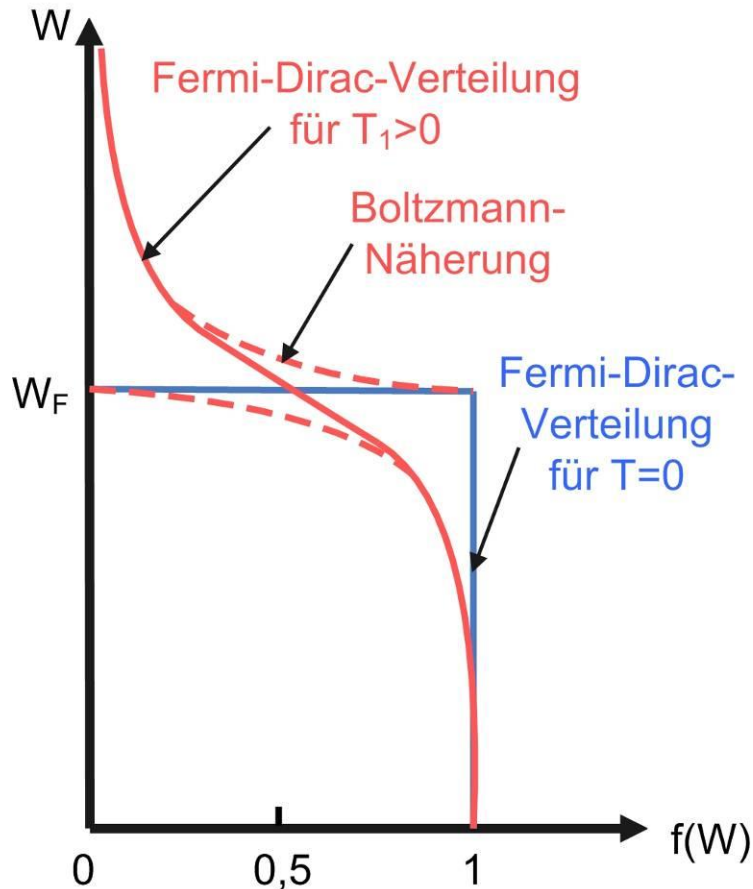
Wiederholung

■ Zustandsdichte in Halbleitern



Wiederholung

■ Fermi-Dirac-Verteilung



$$f_{FD} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

■ Boltzmann-Näherung:

$$f_B = \exp\left(-\frac{W - W_F}{k_B T}\right)$$

Wiederholung

Ladungsträgerdichten

$$n(T) = \int_{W_L}^{\infty} \tilde{n}(W, T) dW = \int_{W_L}^{\infty} g_L(W) \cdot f(W, T) dW$$

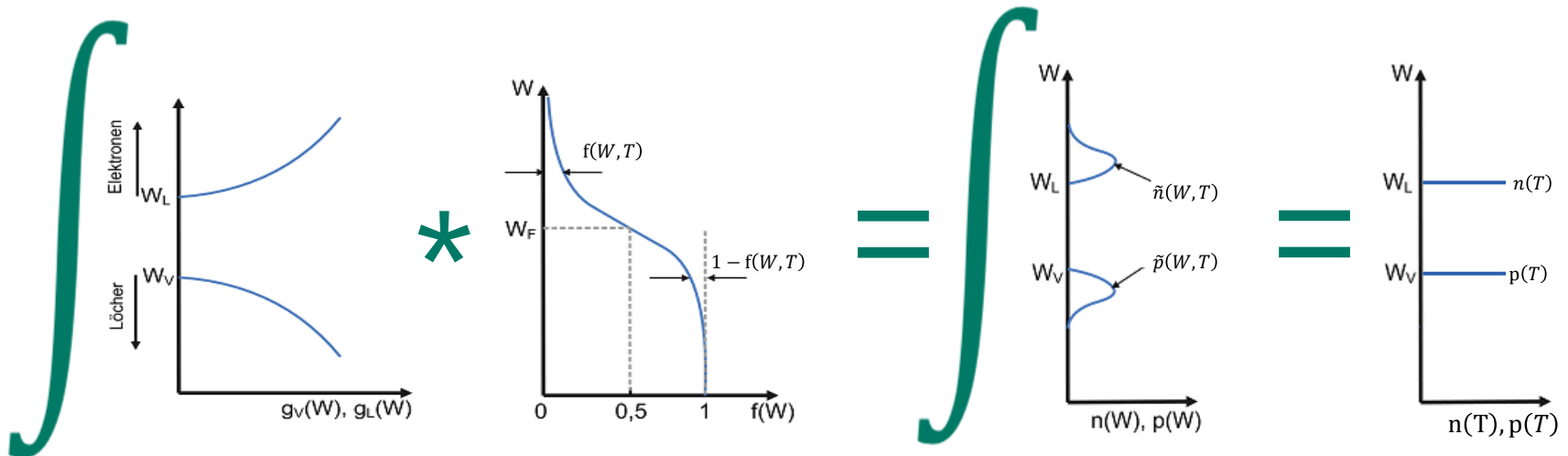
$$p(T) = \int_{-\infty}^{W_V} \tilde{p}(W, T) dW = \int_{-\infty}^{W_V} g_V(W) \cdot (1 - f(W, T)) dW$$



Makroskopische
Eigenschaften des HL

z.B. elektrische
Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot (n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)$$



Achtung: hier intrinsischer Fall, da $n = p$

Wiederholung – intrinsisch vs. dotiert

- Eigenleitung eines intrinsischen HL: Ladungsträger entstehen nur durch thermische Anregung: $n_i = n_{th} = p_{th}$

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}}$$

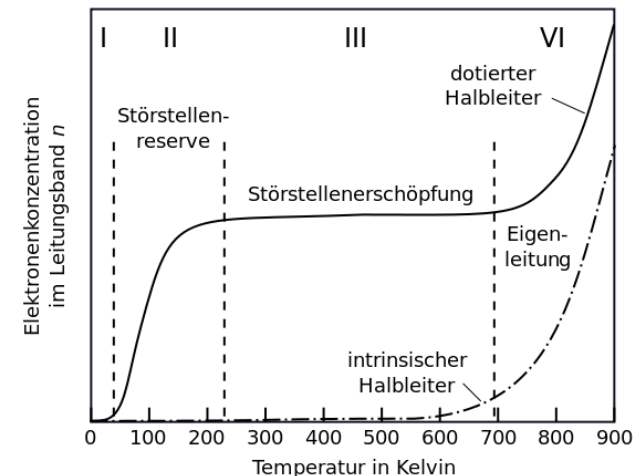
- Temperaturabhängige Fermi-Energie im intrinsischen HL:

$$W_F = \frac{W_L + W_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \cdot \ln\left(\frac{m_{V,h}^*}{m_{L,e}^*}\right)$$

- Massenwirkungsgesetz im dotierten HL:

$$n_i^2 = np$$

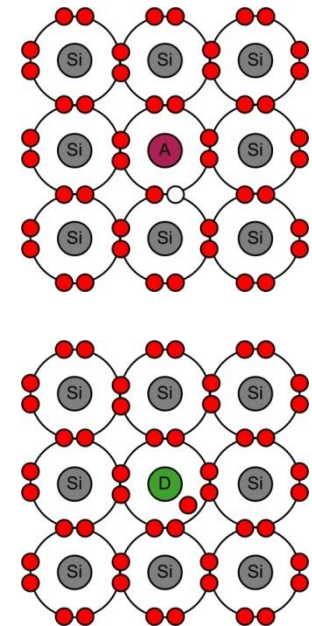
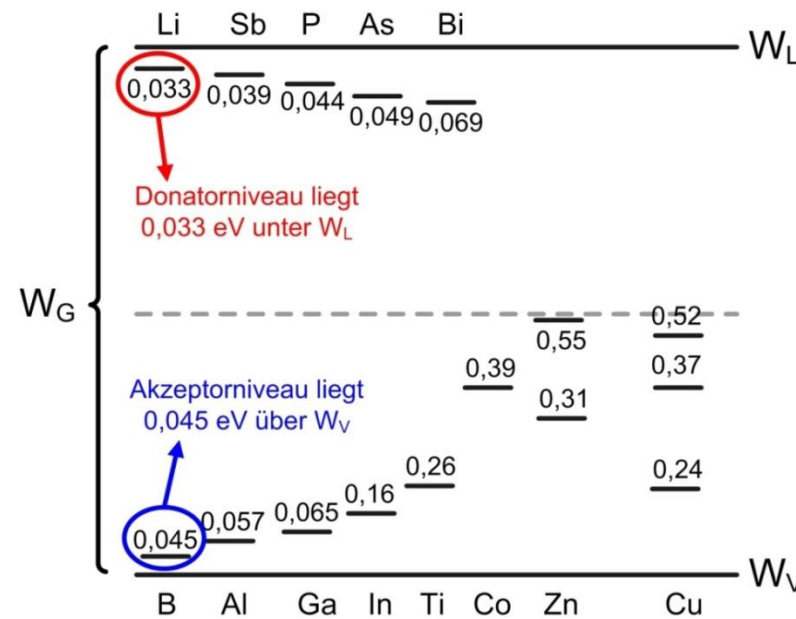
- Elektronenkonzentration im HL:



A1 Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

- p-dotierter Halbleiter mit Bandlücke $W_G = 1\text{eV}$
- Akzeptorkonzentration sei $n_A = 10^{16}\text{ cm}^{-3}$
- Akzeptorniveau liege 0,065eV oberhalb der Valenzbandkante
- Effektive Masse der Elektronen und Löcher sei gleich der freien Elektronenmasse

Dotierstoffe in Si



A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Wie gross ist die Dichte der Loecher bei $T=300\text{ K}$? Vergleichen Sie diese mit der Dichte der Loecher in einem undotierten Halbleiter mit sonst gleichen Eigenschaften.

■ Intrinsischer Fall:

$$p = n_i = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} = 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

Beachte: laut Aufgabenstellung mit $m_e^* = m_p^* = m_e$

■ Dotierter Fall: $p = n_i + n_A^-$

→ Besetzungsstatistik der Dotieratome ist zu beachten!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Donatoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

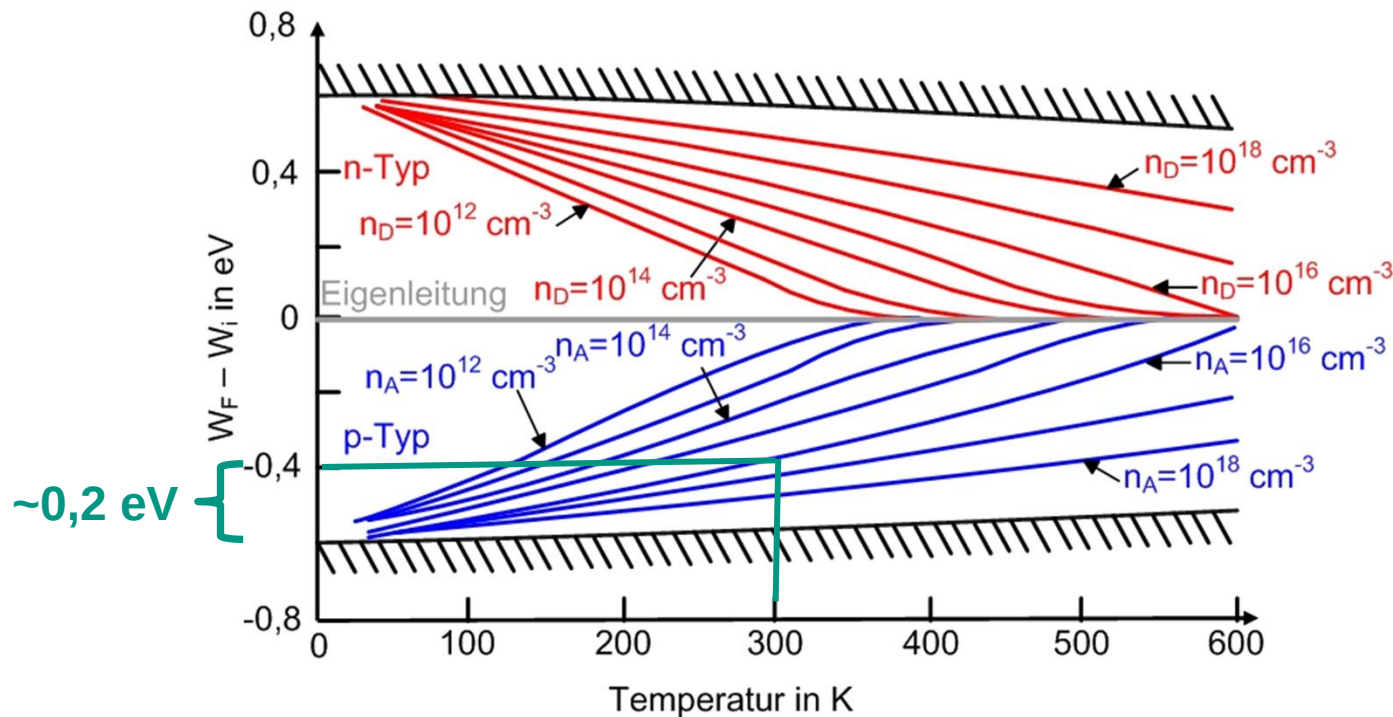
■ Akzeptoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

Entartungsfaktoren
auf Grund veränderter
Besetzungsstatistik i.Vgl.
zu Bandzuständen

■ Damit folgt für die ionisierten Akzeptoren: $n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)}$

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung



■ $W_A - W_F = W_V + 0,065 \text{ eV} - W_V - 0,2 \text{ eV} = -0,135 \text{ eV}$

■ $n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{0,135 \text{ eV}}{0,026 \text{ eV}}\right)} = 0,99 n_A = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Fast alle Akzeptoren sind ionisiert!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Mit $n_A^- \gg n_i = n$ folgt $p \approx n_A^- = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$

➔ Durch Dotierung lässt sich die Dichte der freien Ladungsträger stark erhöhen. Thermisch angeregte freie Ladungsträger sind dann bei Raumtemperatur vernachlässigbar.

A1 b) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Bestimmen Sie fuer beide Faelle die Dichten der freien Elektronen.

- Intrinsischer Fall: freie Ladungsträger werden in Paaren erzeugt

$$n = p = n_i = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

- Dotierter Fall:

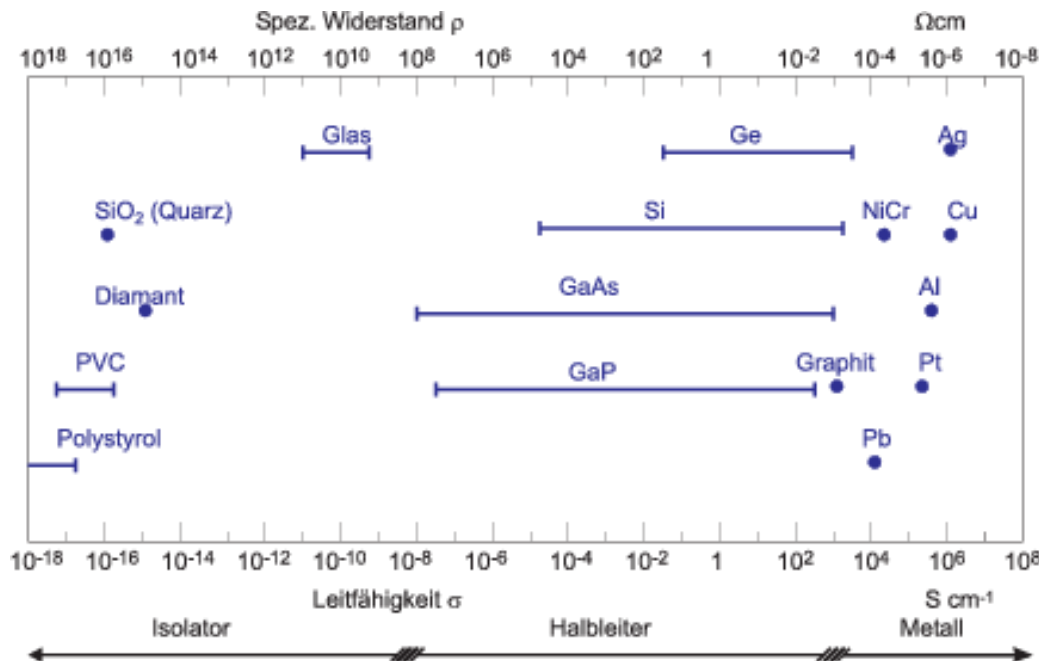
Mit *Massenwirkungsgesetz* $np = n_i^2$ folgt: $n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Dichte der freien Elektronen wird durch die p-Dotierung verringert!

A1 c) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

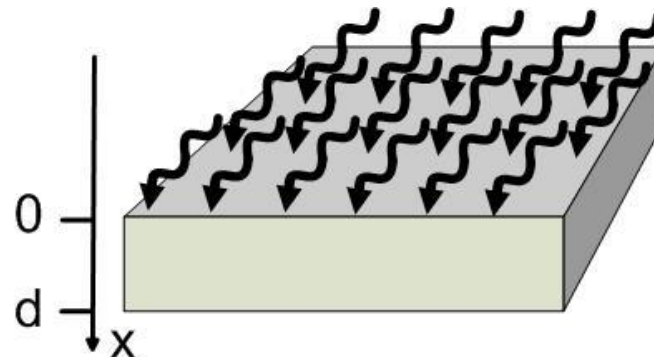
Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ bei $T=300\text{ K}$ unter der Annahme einer Loecherbeweglichkeit von $100\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $1500\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

■ Leitfähigkeit: $\sigma = e_0(\mu_p p + \mu_n n) \quad \rightarrow \quad \sigma = e_0(\mu_p p) = 16 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{cm}}$



A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

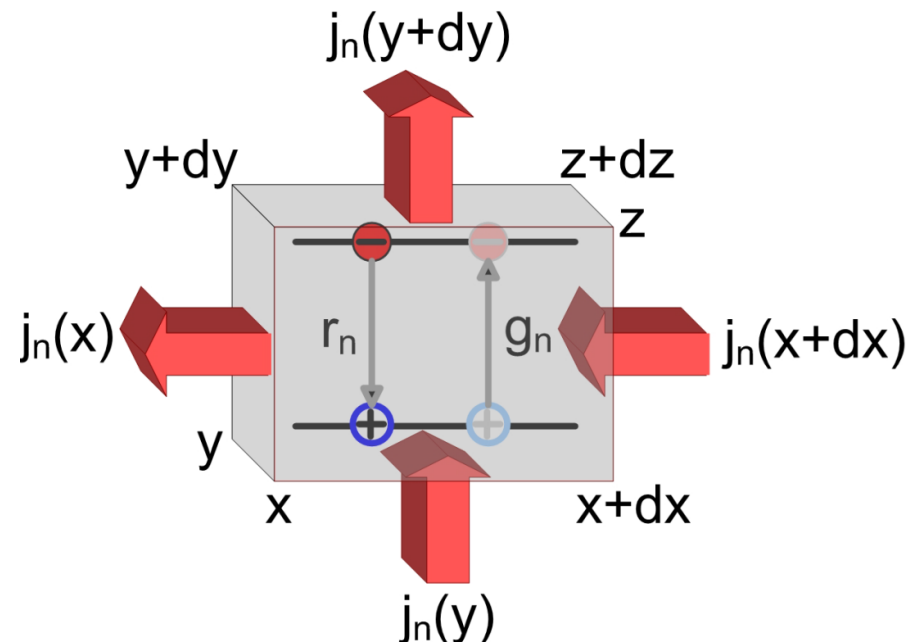
Wir betrachten einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d , der an der Oberseite homogen mit Licht bestrahlt wird. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.



A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n + e(g_n - r_n)$$



A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

- Hinweise aus Aufgabenstellung nutzen:
 - nur Δn betrachten
 - Koordinatensystem nur in x-Richtung angegeben $\rightarrow$ 1D-Betrachtung
 - offenbar kein E-Feld angelegt $\rightarrow$ kein Driftstrom $\rightarrow$ nur Diffusionsstrom
 - Δn ist konstant auf Oberfläche: $\Delta n(0) = \Delta n_0$
 - Absaugung an Unterseite: $\Delta n(d) = 0$
 - stationärer Zustand: $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$
 - keine Generation außerhalb Randzone, Rekombinationsrate: $r = \frac{\Delta n}{\tau_n}$

A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Kontinuitätsgleichung (allgemein):

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \vec{J} + e(g_n - r_n) = e \vec{\nabla} (n \mu \vec{E} + D \vec{\nabla} n) + e(g_n - r_n)$$

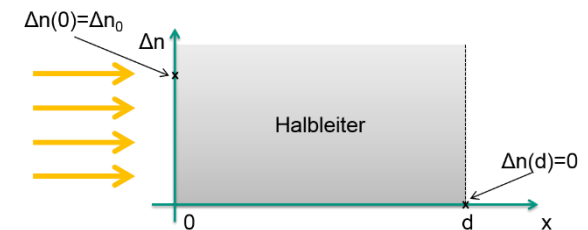
■ Kontinuitätsgleichung (mit Hinweisen)

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} = 0$$

■ Randbedingungen:

$$\Delta n(x = 0) = \Delta n_0$$

$$\Delta n(x = d) = 0$$



A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte.

■ Kontinuitätsgleichung aus a): $0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n$

■ 2 linear unabhängige Lösungen:

$$\Delta n(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right)$$

mit Diffusionslänge $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

■ Mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta n_0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \end{aligned}$$

A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Lösen der beiden Gleichungen:

$$\rightarrow C_1 = \Delta n_0 - C_2$$

$$\rightarrow 0 = (\Delta n_0 - C_2) \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)$$

$$\rightarrow \Delta n_0 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) = C_2 \left(\exp\left(\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \right)$$

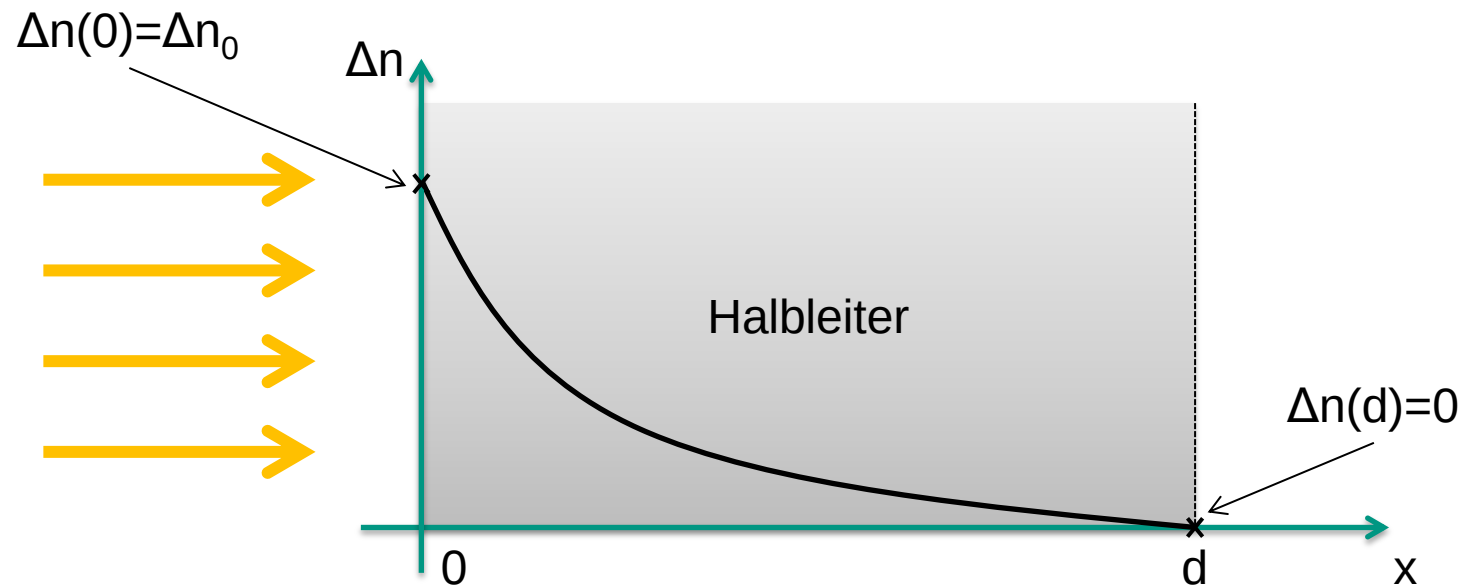
$$C_2 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{-\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} + \frac{\Delta n_0 \left(1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} = -\frac{\Delta n_0 \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$C_1 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)}$$

A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

$$\Delta n(x) = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right)$$



A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Ein allgemeinerer Ausdruck für die Rekombinationsrate eines konstant beleuchteten Halbleiters habe die folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

(Shockley-Read-Hall-Rekombination)



A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Der Halbleiter sei stark n-dotiert. Die Löcheranzahl und die Elektronenanzahl seien durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im dotierten unbeleuchteten Halbleiter (n_{dot} und p_{dot}) auf n bzw. p erhöht, wobei $p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ gelten soll. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen die Gleichung so weit wie möglich.

■ Mit $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p (n_{dot} + \Delta n) + \tau_n (p_{dot} + \Delta p)}$$

A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Mit $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$:

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

Massenwirkungsgesetz

$$= \frac{\overbrace{n_{dot}p_{dot}}^{=n_i^2} + \Delta np_{dot} + \Delta pn_{dot} + \Delta n\Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

$$= \frac{\Delta np_{dot} + \Delta pn_{dot} + \Delta n\Delta p}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

$p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ impliziert:

$$r = \frac{\Delta \cancel{n} p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \cancel{\Delta p}}{\tau_p (n_{dot} + \cancel{\Delta n}) + \tau_n (\cancel{p_{dot}} + \cancel{\Delta p})}$$

p_{dot} , Δn und Δp sind vernachlässigbar gegenüber n_{dot}

- Majoritäten (n) bleiben durch die Photogeneration fast unverändert, Minoritäten (p) steigen dagegen an

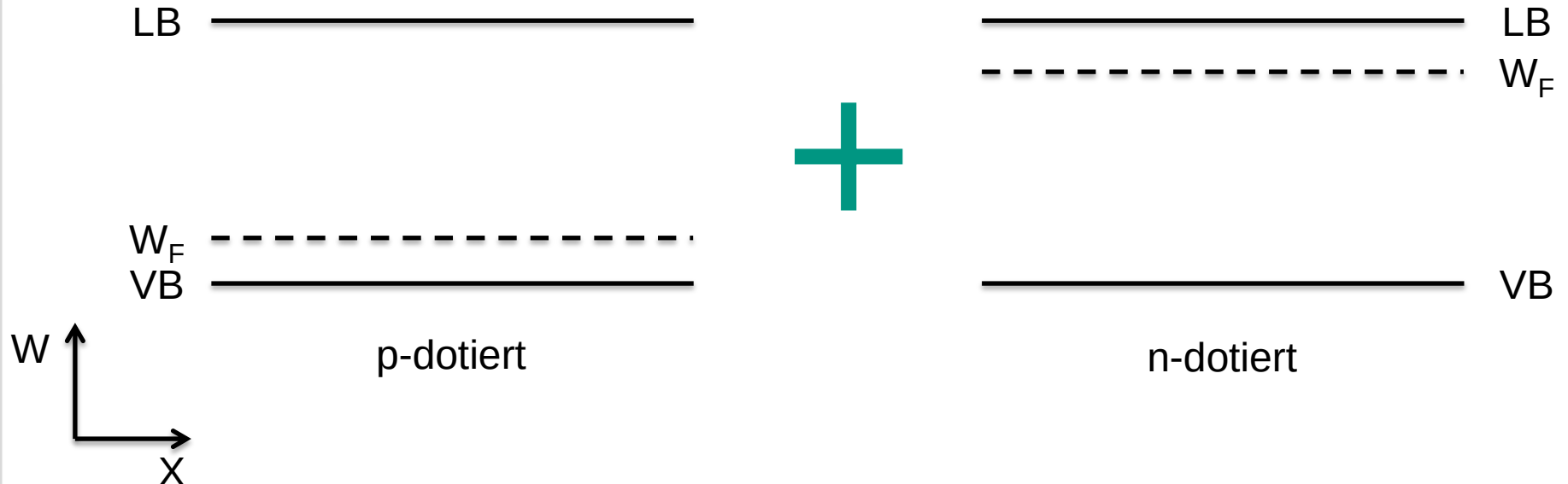
- Rekombinationsrate ist hauptsächlich durch Minoritäten bestimmt!

$$r = \frac{\Delta p n_{dot}}{\tau_p n_{dot}} = \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

A3 pn-Übergang

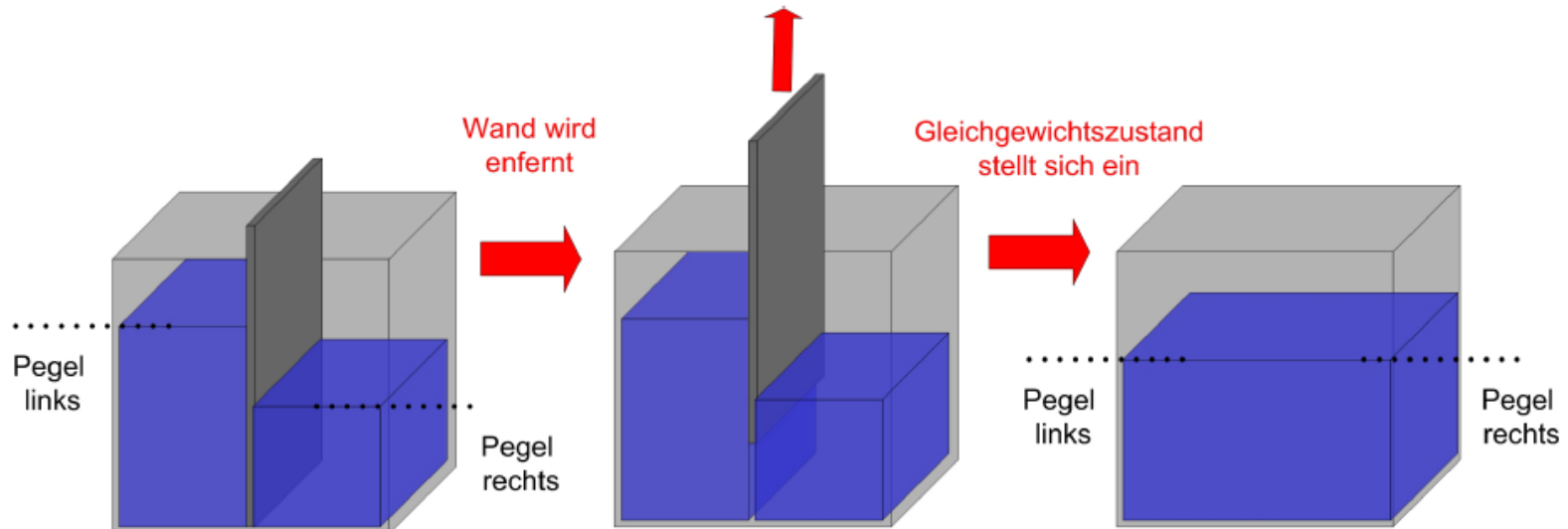
Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

■ ...ohne äußere Vorspannung:



A3 pn-Übergang

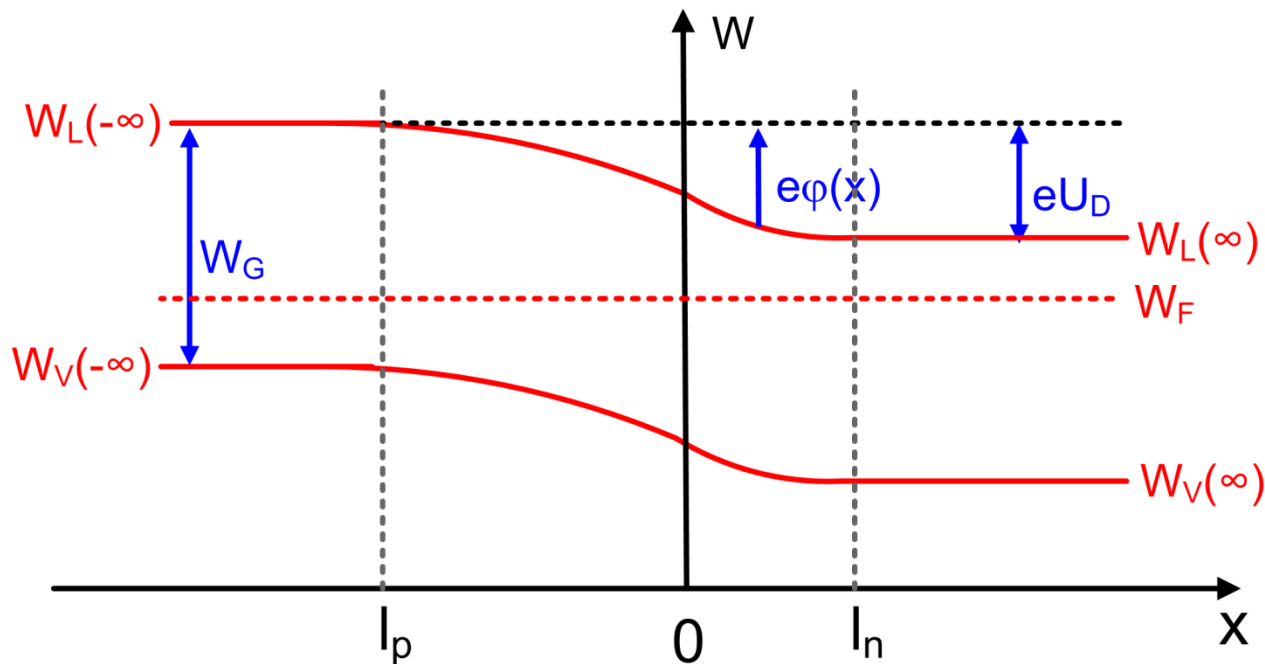
- ABER: unterschiedliche Fermi-niveaus für p- und n-Seite
- Einstellung eines Gleichgewichts beim Zusammenbringen
- Analogie mit Wasserpegeln



A3 pn-Übergang

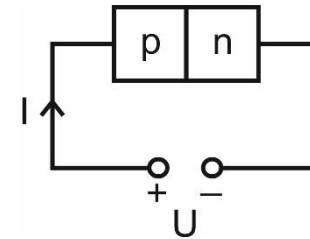
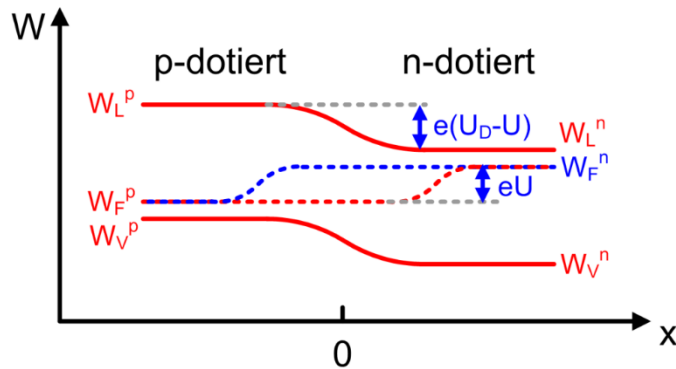
Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

■ ...ohne äußere Vorspannung:

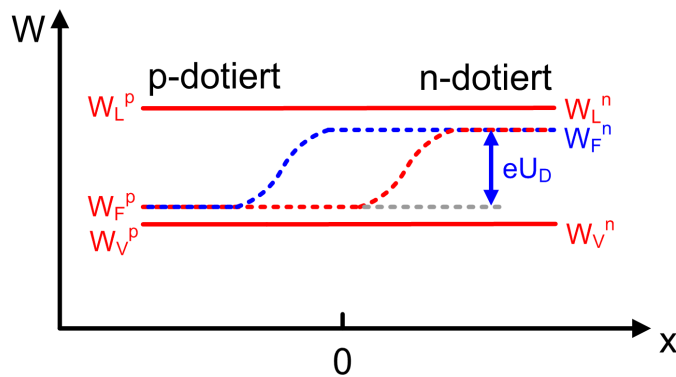


A3 pn-Übergang

- ...mit äußerer Vorspannung $+U$ in Durchlassrichtung:



- Flachbandfall: $U = U_D$



Applet:

<http://jas.eng.buffalo.edu/education/pn/biasedPN/index.html>

Zusammenfassende Fragen

- Was wird als Dotierung von Halbleitern bezeichnet, wie lässt diese sich realisieren und wozu dient sie?
- Wodurch lässt sich das Gleichgewicht eines Halbleiters stören?
- Wie lassen sich Ladungsträgerdichten im Nicht-Gleichgewicht beschreiben?
- Wie ändern sich Bandstruktur und Fermi-Energie eines pn-Übergangs bei angelegter Spannung?

Zusammenfassung der Übungen

- **Welle-Teilchen-Dualismus** (Photoeffekt, de-Broglie-Wellenlänge, ...)
- **Wellenpakete** (Dispersion, Fourier-Transformation, freies Elektron, ...)
- **Schrödinger-Gleichung** (verschiedene Potentiale, Stetigkeitsbedingungen, Reflexion, Transmission, Tunneleffekt, gekoppelte Potentialtöpfe, 3D, ...)
- **Wasserstoffatom** (Orbitale, Quantenzahlen, ...)
- **Atombindungen**
- **Kristallstrukturen** (Gittervektoren, Bravais-Gitter, Bloch-Oszillation, ...)
- **Bandstrukturen** (Bandlücke, effektive Masse, (in)direkter Halbleiter, ...)
- **Ladungsträgerdichten** (Zustandsdichte, Fermi-Funktion, Leitfähigkeit, ...)
- **Dotierung**
- **Halbleiter im Nichtgleichgewicht** (Kontinuitätsgleichung, Drift & Diffusion, Beleuchtung, ...)
- **pn-Übergang**