

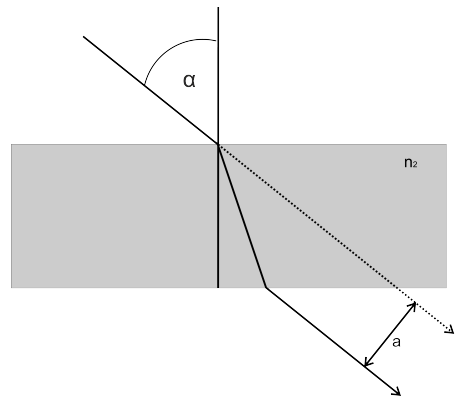
Lichttechnisches Institut
 Karlsruher Institut für Technologie
 Prof. Dr. rer. nat. Cornelius Neumann
 M. Sc. Markus Katona
 Engesserstraße 13
 76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
 Lösung zum 1. Übungsblatt
 Besprechung: Übung 30. April 2020

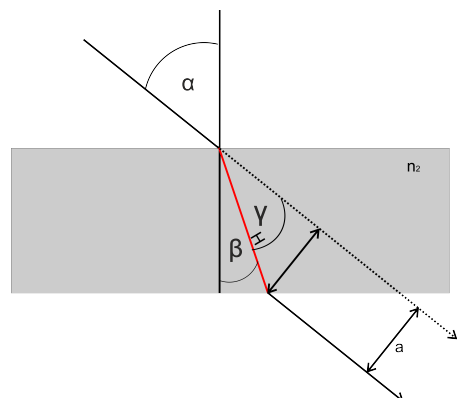
1. Glasplatte

Ein monochromatischer Lichtstrahl (Wellenlänge = 550 nm) trifft unter einem Winkel α auf eine von Luft ($n=1$) umgebene planparallele Glasplatte und wird durch die Platte um einen Abstand a versetzt.

a) Skizzieren Sie den Aufbau!



b) Leiten Sie einen Ausdruck für den Versatz a in Abhängigkeit von α und dem Winkel des gebrochenen Strahls β her!



Der gesuchte Versatz a lässt sich aus den geometrischen Beziehungen der oben stehenden Abbildung herleiten. Für den gebrochenen Strahl H gilt:

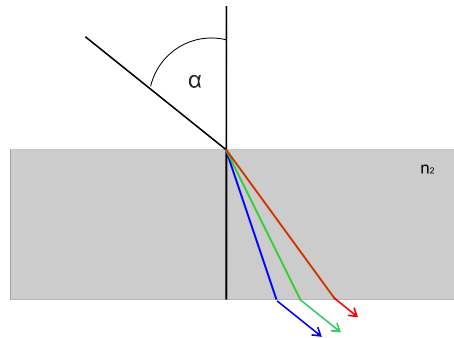
$$H = \frac{d}{\cos(\beta)} = \frac{a}{\sin(\gamma)}. \quad (1)$$

Umstellen und einsetzen von $\gamma = \alpha - \beta$ liefert den gewünschten Zusammenhang.

$$a = \frac{d \cdot \sin(\gamma)}{\cos(\beta)} = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)}. \quad (2)$$

- c) Erklären Sie qualitativ mithilfe einer Skizze was passiert, wenn man die Platte mit einem weißen Lichtstrahl durchleuchtet!

Der Brechungsindex hängt von der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts ab. Durch diese sogenannte Dispersion werden die unterschiedlichen Spektralanteile des weißen Lichtstrahls unterschiedlich stark gebrochen. Hierbei wird energiereicheres, also Licht mit einer niedrigen Wellenlänge, stärker gebrochen als energieärmeres Licht.



2. Optisches Filterglas

Gegeben ist der Glasfilter OG570 (siehe Datenblatt in Ilias) von Schott mit einer Dicke von exakt 2 mm. Der in Luft befindliche Filter wird mit inkohärentem, unpolarisiertem Licht bestrahlt.

- a) Bestimmen Sie den Anteil des transmittierten Lichts bei senkrechtem Einfall und einer Wellenlänge von 550 nm, 570 nm sowie 590 nm. Mehrfachreflexionen sind vernachlässigbar.

An der Grenzfläche des Filters wird zunächst ein Anteil (R) reflektiert. Anschließend findet im Filter Absorption (τ) statt und beim Austreten des Strahls findet erneut Reflexion (R) statt:

$$T_{\text{gesamt}} = (1 - R) \cdot \tau \cdot (1 - R) \quad (3)$$

Der Faktor $(1-R)$ kann direkt aus den Fresnelschen Formeln bestimmt werden

$$1 - R = 1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (4)$$

Mit den Datenblattwerten ergibt sich:

$$1 - R = 1 - \left(\frac{1 - 1,51}{1 + 1,51} \right)^2 = 0,9587 \quad (5)$$

$$(1 - R)^2 = 0,92 \quad (6)$$

Für τ gilt das Lambert-beersche Gesetz. Die Transmission ist laut Vorlesung gegeben als:

$$\ln(\tau) = -\alpha(\lambda)d \quad (7)$$

Da α nur abhängig der Wellenlänge ist, ergibt sich für ein gegebenes λ die Transmission in Abhängigkeit der Dicke d :

$$\frac{\ln(\tau)}{\ln(\tau_0)} = \frac{-\alpha(\lambda)d}{-\alpha(\lambda)d_0} \quad (8)$$

$$\ln(\tau) = \ln(\tau_0) \cdot \frac{d}{d_0} \quad (9)$$

$$\tau(d) = \tau_0^{(d/d_0)} \quad (10)$$

Die gesuchte Transmission ergibt sich somit zu:

λ (nm)	$\tau_0(d = 3mm)$	$\tau(d = 2mm)$	$(1 - R)^2 \cdot \tau$
550	$8,8 \cdot 10^{-3}$	0,043	0,0395
570	0,517	0,644	0,5919
590	0,930	0,953	0,8765

- b) Leiten Sie einen formalen Zusammenhang für die Transmission unter Beachtung von Mehrfachreflexionen für den senkrechten Einfall her! Wie unterscheiden sich die Ergebnisse zu a)?

Das grundsätzliche Vorgehen unterscheidet sich nicht von der Betrachtung aus a). Ein auf das Filterglas auftreffender Strahl wird an den zwei Materialübergängen je einmal reflektiert und einmal entlang der Dicke absorbiert:

$$T_1 = (1 - R)^2 \cdot \tau \quad (11)$$

Der an der zweiten Grenzfläche reflektierte Strahlanteil wird erneut zweimal innerhalb des Filters reflektiert sowie zweimal zusätzlich absorbiert:

$$T_2 = (1 - R)^2 \cdot \tau \cdot R^2 \cdot \tau^2 \quad (12)$$

Diese doppelte Reflektion und doppelte Absorption findet im Anschluss für jeden weiteren in das Filterglas zurückreflektierten Strahlanteil statt:

$$T_3 = (1 - R)^2 \cdot \tau \cdot R^4 \cdot \tau^4 \quad (13)$$

Die Transmission ergibt sich als Summe über alle einzelnen Transmissionen:

$$T_{\text{gesamt}} = \sum_{i=0}^{\infty} T_i = (1 - R)^2 \cdot \tau \sum_{i=0}^{\infty} (R\tau)^{2n} \quad (14)$$

Da stets $R\tau < 1$ gilt, handelt es sich bei der Summe um eine geometrische Reihe:

$$T_{\text{gesamt}} = (1 - R)^2 \cdot \tau \sum_{i=0}^{\infty} (R\tau)^{2n} = \frac{(1 - R)^2 \cdot \tau}{1 - R^2\tau^2} \quad (15)$$

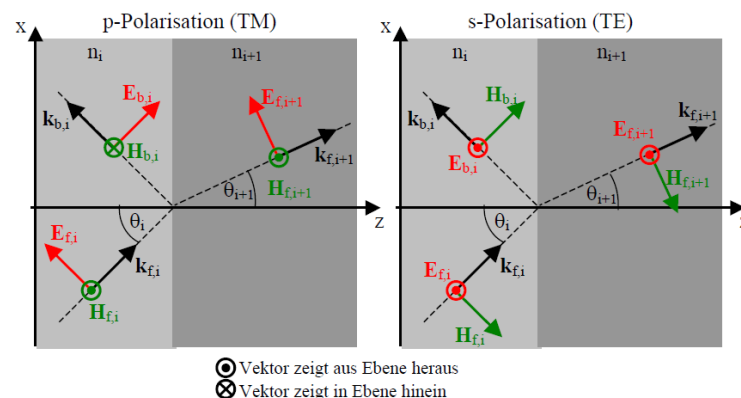
Für Gebiete mit einer hohen Absorption unterscheiden sich die Ergebnisse kaum. In den Bereichen geringer Absorption ist dagegen ein kleiner Unterschied zu erkennen.

λ (nm)	T_1	T_{gesamt}
550	0,0395	0,0395
570	0,5919	0,5923
590	0,8765	0,8779

3. Polarisation

a) Was versteht man unter s- und p-Polarisation?

Trifft eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche, so lässt sich aus der Ausbreitungsrichtung der Welle (k -Vektor) und der Flächennormalen der Grenzfläche eine Ebene aufspannen. Diese Ebene wird als Einfallsebene bezeichnet (häufig identisch mit der Zeichenebene, so auch in der unteren Abbildung). Der Anteil der elektrischen Feldkomponente, der senkrecht zu dieser Einfallsebene schwingt, ist s-polarisiert. Der Anteil, der parallel dazu schwingt, ist p-polarisiert. Häufig werden auch die Bezeichnungen TE für s- und TM für p-Polarisation verwendet.



- b) Was ist der Brewster-Winkel? Leiten Sie den Brewsterwinkel aus den Fresnelschen Formeln des Reflexionsgrads her!

Der Brewster-Winkel ist ein bestimmter Einfallswinkel bei dem kein p-polarisierter Feldanteil reflektiert wird. D.h. in diesem Winkel wird ausschließlich s-polarisiertes Licht reflektiert. Formal lässt sich der Brewster-Winkel aus den in der Vorlesung gegebenen Fresnelschen Formel der p-Polarisation herleiten, indem $R_p = 0$ gesetzt wird. Dies lässt sich entweder darüber erreichen, dass gilt $\tan(\theta_1 - \theta_2) = 0$ oder $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \infty$. Im ersten Fall wäre der Winkel des gebrochenen gleich dem Winkel des einfallenden Strahls, was der freien Propagation entspricht und somit nicht dem Brewsterwinkel an einer Grenzfläche. Demnach muss gelten:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \infty \quad (16)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90 \quad (17)$$

$$\theta_2 = 90 - \theta_1 \quad (18)$$

Unter Verwendung des Brechungsgesetzes erhält man:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) = n_2 \sin(90 - \theta_1) = n_2 \cos(\theta_1) \quad (19)$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (20)$$

- c) Skizzieren Sie qualitativ den Reflexionsgrad für p-polarisiertes Licht beim Übergang von Wasser ($n=1,33$) zu Luft ($n=1$)!

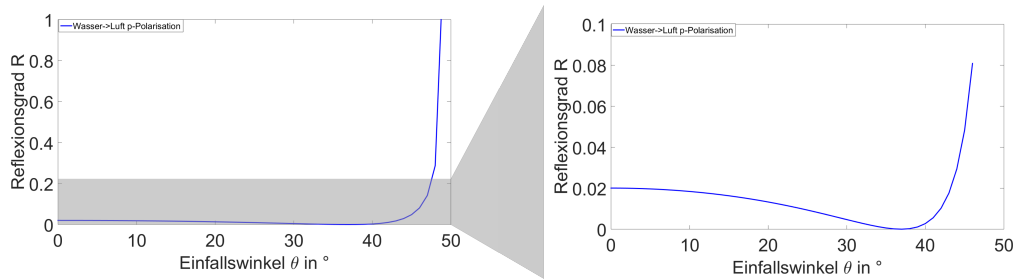
Es handelt sich um den Übergang von einem optisch dichteren in optisches dünneres Material. Von daher tritt Totalreflexion auf. Ferner ist bei p-Polarisation der Brewster-Winkel zu beachten. Die wesentlichen Eckpunkte ergeben sich gemäß der folgenden Formeln:

$$R_0 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(1,33 - 1)^2}{(1,33 + 1)^2} = 0,02 \quad (21)$$

$$\theta_{total} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{1,33} = 49 \quad (22)$$

$$\theta_{Brewster} = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1}{1,33} = 37 \quad (23)$$

Mithilfe der Eckpunkte lässt sich der gesuchte Reflexionsgrad zeichnen:

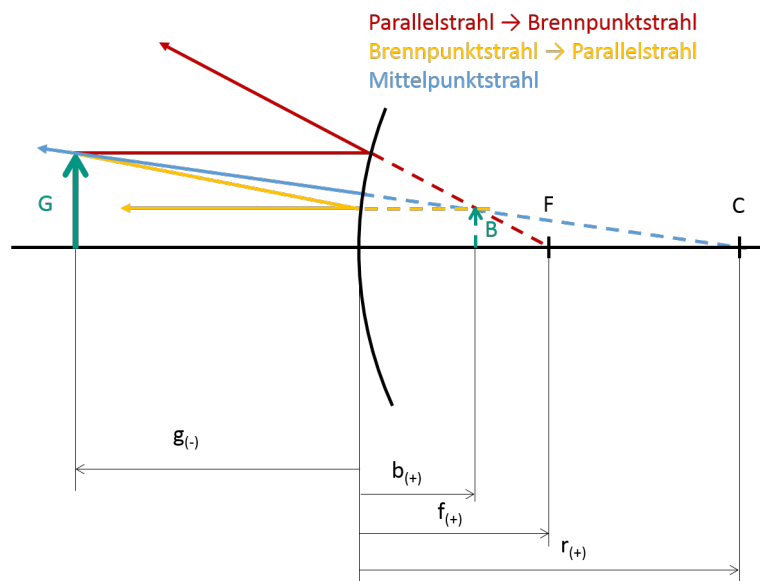


4. Spiegel

Gegeben ist ein sphärischer Spiegel mit einem Krümmungsradius von $|r| = C$, $C > 0$. Skizzieren Sie die Strahlengänge der Bildentstehung und benennen Sie die Eigenschaften (virtuell/reell, vergrößert/verkleinert, seitenrichtig/seitenverkehrt) des Bildes:

- a) Für die Verwendung als Wölbspiegel mit einer Gegenstandsweite von $-\frac{3}{4}C$!

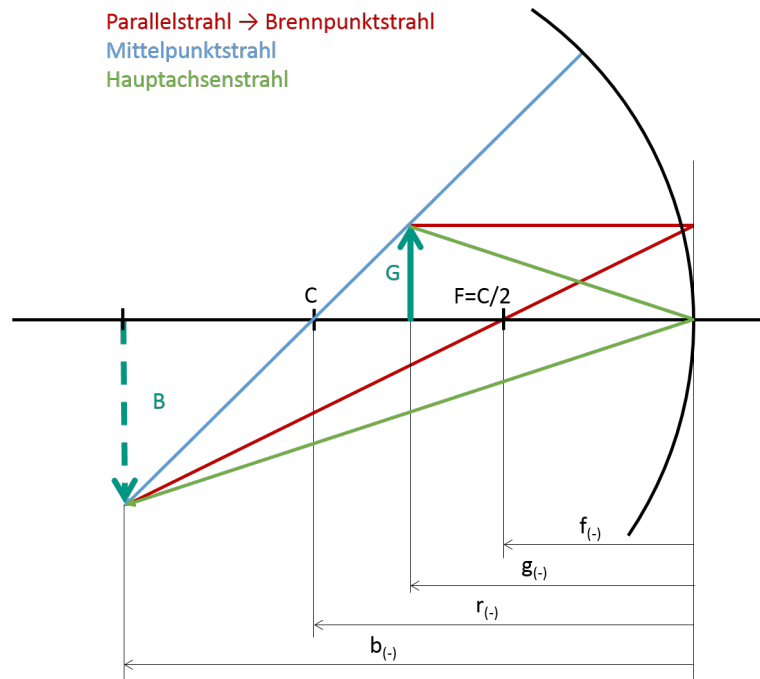
Entsprechend der Vorlesung ist der Krümmungsradius eines Wölbspiegels positiv. Die Brennweite berechnet sich mit $r = C$ zu $f = r/2 = C/2$. Die anschließende Konstruktion erfolgt dann immer nach dem Schema: Mittelpunktstrahl, Parallelstrahl wird zu Brennpunktstrahl und Brennpunktstrahl wird zu Parallelstrahl. Zur Bildkonstruktion sind prinzipiell immer zwei Strahlen ausreichend.



Gemäß der maßstabsgetreuen Skizze entsteht ein virtuelles, seitenrichtiges und verkleinertes Bild.

- b) Für die Verwendung als Hohlspiegel mit einer Gegenstandsweite von $-\frac{3}{4}C$!

Entsprechend der Vorlesung ist der Krümmungsradius eines Hohlspiegels negativ. Die Brennweite berechnet sich mit $r = -C$ zu $f = r/2 = -C/2$.



Gemäß der maßstabsgetreuen Skizze entsteht ein reelles, seitenverkehrtes und vergrößertes Bild.

- c) Berechnen Sie für den Fall aus Teilaufgabe a) die Bildweite für $C = 12 \text{ cm}$. Beachten Sie die Vorzeichenkonvention!

Da es sich um einen Wölbspiegel handelt ist der Radius r und somit die Brennweite f positiv definiert.

$$r = +12 \text{ cm} \quad (24)$$

$$f = \frac{r}{2} = \frac{+12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm} \quad (25)$$

Die Gegenstandsweite g ergibt sich zu:

$$g = -\frac{3}{4}C = -\frac{3}{4} \cdot 12 \text{ cm} = -9 \text{ cm} \quad (26)$$

Die Abbildungsgleichung für einen Spiegel lautet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (27)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g - f}{fg} \quad (28)$$

$$b = \frac{fg}{g - f} = \frac{6 \text{ cm} \cdot (-9 \text{ cm})}{-9 \text{ cm} - 6 \text{ cm}} = \frac{-54 \text{ cm}^2}{-15 \text{ cm}} = 3,6 \text{ cm} \quad (29)$$

Die Bildweite ist positiv, d.h. das Bild befindet sich 3,6 cm rechts des Spiegels. Dies deckt sich mit dem in Teilaufgabe a) konstruierten Bild.

5. Linsen

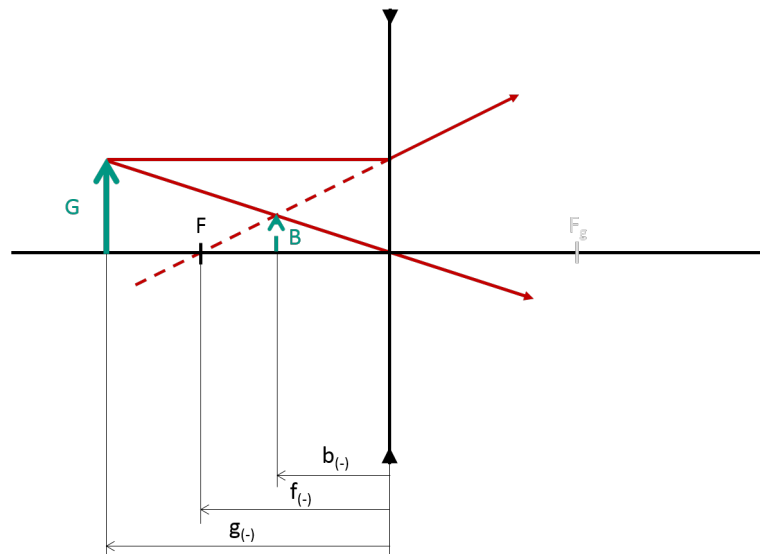
Gegeben ist eine dünne Linse mit den Radien $|r_1| = |r_2| = R$, $R > 0$. Skizzieren Sie die Strahlengänge der Bildentstehung und benennen Sie die Eigenschaften (virtuell/reell, vergrößert/verkleinert, seitenrichtig/seitenverkehrt) des Bildes:

- a) Wenn es sich um eine bikonkave Linse handelt bei einer Gegenstandsweite von $g = -R$ und einem Brechungsindex von $n_L = 1,75$!

Aus der allgemeinen Formel für eine dünne Linse lässt sich die Brennweite errechnen und damit der Strahlengang zeichnen. Da es sich um eine bikonkave Linse handelt, ist $-r_1 = r_2 = R$:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1,75 - 1}{1} \left(\frac{2}{-R} \right) = -\frac{3}{2 \cdot R} \quad (30)$$

$$f = -\frac{2}{3}R \quad (31)$$



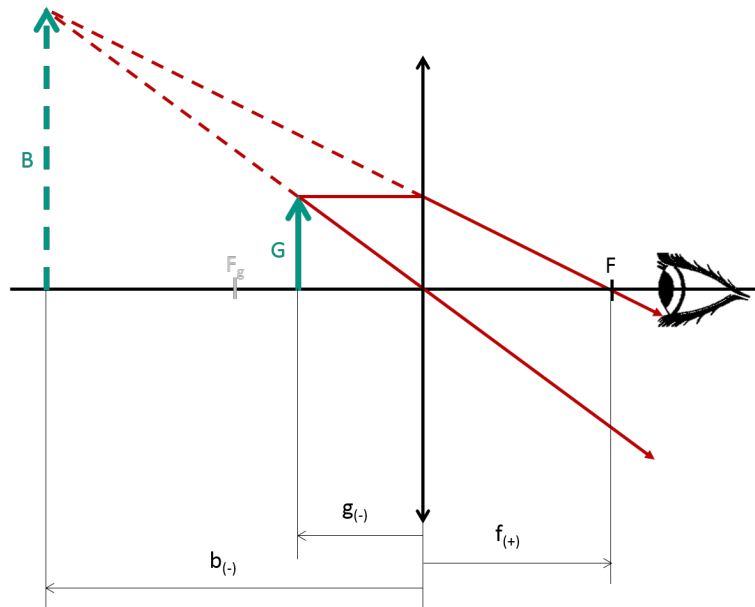
Gemäß der maßstabsgetreuen Skizze entsteht ein virtuelles, seitenrichtiges und verkleinertes Bild.

- b) Wenn es sich um eine bikonvexe Linse handelt, bei einer Gegenstandsweite von $g = -R$ und einem Brechungsindex von $n_L = 4/3$! Um was für ein optisches Instrument handelt es sich?

Aus der allgemeinen Formel für eine dünne Linse lässt sich die Brennweite errechnen und damit der Strahlengang zeichnen. Da es sich um eine bikonvexe Linse handelt, ist $r_1 = -r_2 = R$:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{4/3 - 1}{1} \left(\frac{2}{R} \right) = \frac{2}{3 \cdot R} \quad (32)$$

$$f = \frac{3}{2} R \quad (33)$$



Da sich die Gegenstandsweite g innerhalb der einfachen Brennweite einer bikonvexen Linse befindet handelt es sich um eine Lupe. Es entsteht ein virtuelles, seitenrichtiges und vergrößertes Bild.

- c) Berechnen Sie für den Fall aus Teilaufgabe a) die Bildweite für $R = 3 \text{ cm}$. Beachten Sie die Vorzeichenkonvention!

$$g = -R = -3 \text{ cm} \quad (34)$$

Aus Aufgabenteil a) folgt:

$$f = -\frac{2}{3} R = -2 \text{ cm} \quad (35)$$

Die Abbildungsgleichung für eine Linse lautet:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \quad (36)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{f + g}{fg} \quad (37)$$

$$b = \frac{fg}{f+g} = \frac{-2 \text{ cm} \cdot (-3 \text{ cm})}{-2 \text{ cm} + (-3 \text{ cm})} = \frac{6 \text{ cm}^2}{-5 \text{ cm}} = -1,2 \text{ cm} \quad (38)$$

Die Bildweite ist negativ, d.h. das Bild befindet sich 1,2 cm links der Linse. Dies deckt sich mit dem in Teilaufgabe a) konstruierten Bild.

6. Interferenz und Beugung am Gitter

Gegeben sei ein Beugungsgitter das zum Messen eines Spektrums verwendet werden soll. Ein Spektralbereich einer bestimmten Ordnung ist nutzbar, wenn der Spektralbereich nicht mit einer anderen Ordnung überlappt. Die kürzeste Wellenlänge einer gegebenen Lichtquelle sei 400 nm. Bestimmen Sie den nutzbaren Spektralbereich in den ersten drei Ordnungen des Beugungsgitters.

$$\sin(\theta) = \frac{m \cdot \lambda}{g} \quad (39)$$

Grenzbedingung (hier berührt sich die längste Wellenlänge λ_2 der m . Ordnung und die kürzeste Wellenlänge λ_1 der $(m+1)$. Ordnung)

$$m \cdot \lambda_2 = (m+1) \cdot \lambda_1 \quad (40)$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{\lambda_1}{m} \quad (41)$$

1. Ordnung: $\frac{400 \text{ nm}}{1} = 400 \text{ nm} \rightarrow \text{Intervall: } 400 \text{ nm} - 800 \text{ nm}$
2. Ordnung: $\frac{400 \text{ nm}}{2} = 200 \text{ nm} \rightarrow \text{Intervall: } 400 \text{ nm} - 600 \text{ nm}$
3. Ordnung: $\frac{400 \text{ nm}}{3} = 133 \text{ nm} \rightarrow \text{Intervall: } 400 \text{ nm} - 533 \text{ nm}$