

Einleitung Festkörperelektronik / Grundlagen der Quantenmechanik

2. Übung Optik und Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2020

Benjamin Fritz, Henning Mescher



Vorlesungsbetreuung

■ Benjamin Fritz

- LTI, Geb. 30.34, R218
- 0721 / 608 - 42547
- benjamin.fritz@kit.edu



■ Henning Mescher

- LTI, Geb. 30.34, R118.2
- 0721 / 608 - 47742
- henning.mescher@kit.edu



Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag	Pfingstmontag	
2			V11 FE (8)	V17 FE (14)
3				Ü8 FE (7), Ausgabe T7
4			V12 FE (9)	
5		V4 FE (1)	Ü5 FE (4), Ausgabe T3	
6				Tut 6
7		V5 FE (2), Ausgabe U2		V18 FE (15)
8				
9			V13 FE (10)	V19 FE (16), (Institutsführung)
10			Ausgabe Ü6/T4	Ausgabe Ü9/T8
11		Tut 1	Fronleichnam	
12		V6 FE (3), Ausgabe Ü3	Brückentag	
13				Tut 7
14		Ü2 FE (1)		V20 FE (17)
15		V7 FE (4), Ausgabe T2	Tut 3	
16			V14 FE (11)	
17				Ü9 FE (8), Ausgabe Ü10
18				
19		Ü3 FE (2)	Ü6 FE (5), Ausgabe Ü7/T5	
20	VL-Beginn	Ausgabe Ü4		Tut 8
21	V1 Optik (1), Ausgabe U1	Christi Himmelfahrt		V21 FE (18)
22		V8 FE (5)	Tut 4	
23	V2 Optik (2)		V15 FE (12)	V22 FE (19)
24				Ü10 FE (9), VL-Ende
25		Tut 2		
26		V9 FE (6)	Ü7 FE (6), Ausgabe Ü8/T6	
27				
28	V3 Optik (3)	V10 FE (7)		
29	Deadline Tut.-Anmeldung	Ü4 FE (3), Ausgabe U5	Tut 5	
30	U1 Optik, Ausgabe T1		V16 FE (13)	
31		Pfingsten		



Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
Brückentag
Ausgabe:
Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand:04.05.2020

Dienstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Donnerstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Freitagstermine: 11:30 - 13:00, 11.40 Johann-Gottfried-Tulla-Hörsaal

Tutorien – Termine

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08:00-09:30		Tut 4, 30.10 IPQ Raum 3.42 Sitzplätze: 21 Tut 3, 30.34 R119 Sitzplätze: 22	Tut 9: 30.33 SR ITE Sitzplätze: 21	Tut 12, 30.10 IPQ Raum 3.42 Sitzplätze: 21	Tut 15: 30.36 IEH Raum 11 Sitzplätze: 21 Tut 16, 30.34 R119 Sitzplätze: 22
09:45-11:15		Tut 5: 30.36 IEH Raum 11 Sitzplätze: 21 Tut 6, 30.34 R119 Sitzplätze: 22			
11:30-13:00	Tut 1, 30.36 IEH Raum 11 Sitzplätze: 21 Tut 2, 30.34 R119 Sitzplätze: 22	Vorlesung/Übung		Vorlesung/Übung	Vorlesung/Übung
14:00-15:30		Tut 7: 30.33 SR ITE Sitzplätze: 21 Tut 8, 30.34 R119 Sitzplätze: 22	Tut 10: 30.36 IEH Raum 11 Sitzplätze: 21 Tut 11, 30.34 R119 Sitzplätze: 22		
15:45-17:15				Tut 13: 30.33 SR ITE Sitzplätze: 21 Tut 14, 30.34 R119 Sitzplätze: 22	Tut 17: 30.36 IEH Raum 11 Sitzplätze: 21 Tut 18, 30.34 R119 Sitzplätze: 22

Tutoriumswochen:

T1: 11. - 15. Mai, T2: 25. - 29. Mai, T3: 15. - 19. Juni, T4: 22. - 26. Juni, T5: 29. Juni - 3. Juli, T6: 6. - 10. Juli, T7: 13. - 17. Juli, T8: 20. - 24. Juli

Vorlesung: Festkörperelektronik

■ Dozent:

- Prof. Uli Lemmer
- Lichttechnisches Institut (LTI), Geb. 30.34, Raum 222
- Tel: 0721 / 608 – 42530
- E-Mail: uli.lemmer@kit.edu
- URL: www.lti.kit.edu

■ Alle Materialien zur Veranstaltung:

- URL: ilias.studium.kit.edu

■ Prüfung: schriftlich, 2 Stunden

■ Vorkenntnisse: HM I-III, Experimentalphysik, Elektromagnetische Felder und Elektromagnetische Wellen

Ablauf für Übung und Tutorien

- Übungsblätter und Tutoriumsaufgaben ab dem Ausgabetermin (siehe Terminplanung) in ILIAS:
Erreichbar über die OFE-Seite: https://www.lti.kit.edu/4668_8560.php
Unter LVNr.: 2313719
Oder direkt: IlIAS
- Getrennte Aufgabenblätter für Übung und Tutorium
- Musterlösungen nach Besprechung zeitnah in ILIAS
- Fragestunde zur Klausurvorbereitung (Termin ausstehend)

Übungsblätter rechnen ist die beste Klausurvorbereitung!

Klausur

- Klausurtermin: 21.08.2020, XX:00 – XX:00 Uhr
- Klausurdauer: 120 Minuten
- Klausuranmeldung:
 - Wird noch bekannt gegeben
- Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, 1 DIN-A4 Blatt handschriftlicher Notizen (doppelseitig), Tabelle mit physikalischen Konstanten und Integralen (wird mit Klausur ausgeteilt)

Literaturempfehlungen

- Folien
- Skript Festkörperelektronik (Download über ILIAS)
- Skript Elektrophysik (Prof. W. Heering, Download über ILIAS)
- Quantenmechanik
 - Feynman Vorlesungen über Physik (Feynman, Leighton, Sands)
 - Physikalische Chemie (P.W. Atkins)
 - Experimentalphysik III (W. Demtröder)
- Halbleiter:
 - Festkörperphysik, Einführung in die Grundlagen (Ibach, Lüth)
 - Advanced Semiconductor Fundamentals (Robert F. Pierret)
 - Semiconductor Device Fundamentals (R.F. Pierret, deckt auch HLB ab)
- Zahlreiche weitere Empfehlungen in ILIAS

Online-Ressourcen

■ Quantenmechanik

- <http://www.falstad.com/mathphysics.html>

■ Halbleiterbauelemente

- Homepage von Prof. Bart Zeghbroeck, University of Colorado, USA
 - <http://ecee.colorado.edu/~bart/book/book/index.html>



■ Online-Material an der Universität Kiel (Prof. Föll)

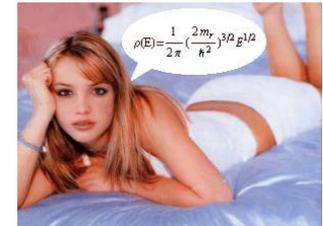
- http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/semi_en/index.html

Online-Ressourcen

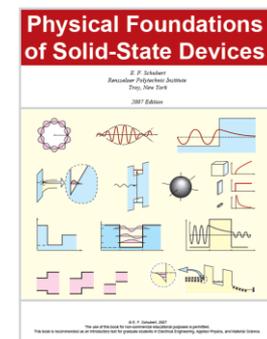
■ Halbleiterbauelemente

- Britney Spears, is one of the most popular singers of all time ... less attention has been paid to her ability as a semiconductor physicist. Marvel at her incredible physical talents, as we remedy this.

- <http://www.britneyspears.ac/>



- Prof. E.F. Schubert: Physical Foundations of Solid-State Devices
 - Verfügbar in ILIAS



Einbettung ins Studium

Materialwissenschaftliche/
bauelementorientierte Vorlesungen:

Experimentalphysik



Festkörperelektronik



Bauelemente der Elektrotechnik



Studienmodelle

Festkörperelektronik ist auch ...

...angewandte HM/WT.

...eine Mischung aus
Elektromagnetische Felder,
Elektromagnetische Wellen
und Hochfrequenztechnik mit
Materiewellen.

Was bringt mir die Festkörperelektronik?

Grundlagen der Quantenmechanik



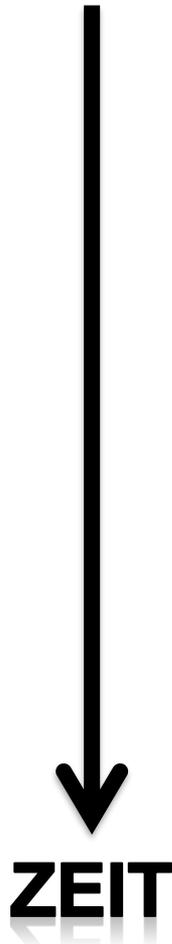
Verständnis der
festkörperphysikalischen Vorgänge
in elektronischen Bauelementen und
Werkstoffen der Elektrotechnik



Grundlagen der Halbleiterbauelemente



Inhalte der Vorlesung



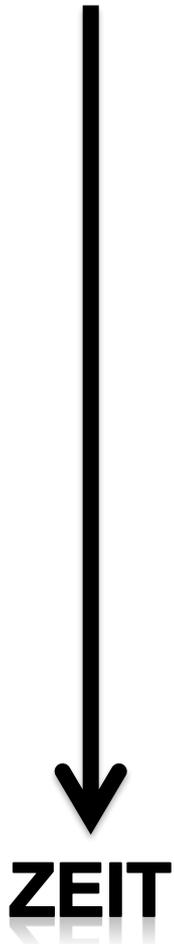
1. Grundlagen der Quantenmechanik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen in Kristallen
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Halbleiter im Nichtgleichgewicht
9. Der pn-Übergang

Inhalte der 2. Übung / des 1. Tutoriums

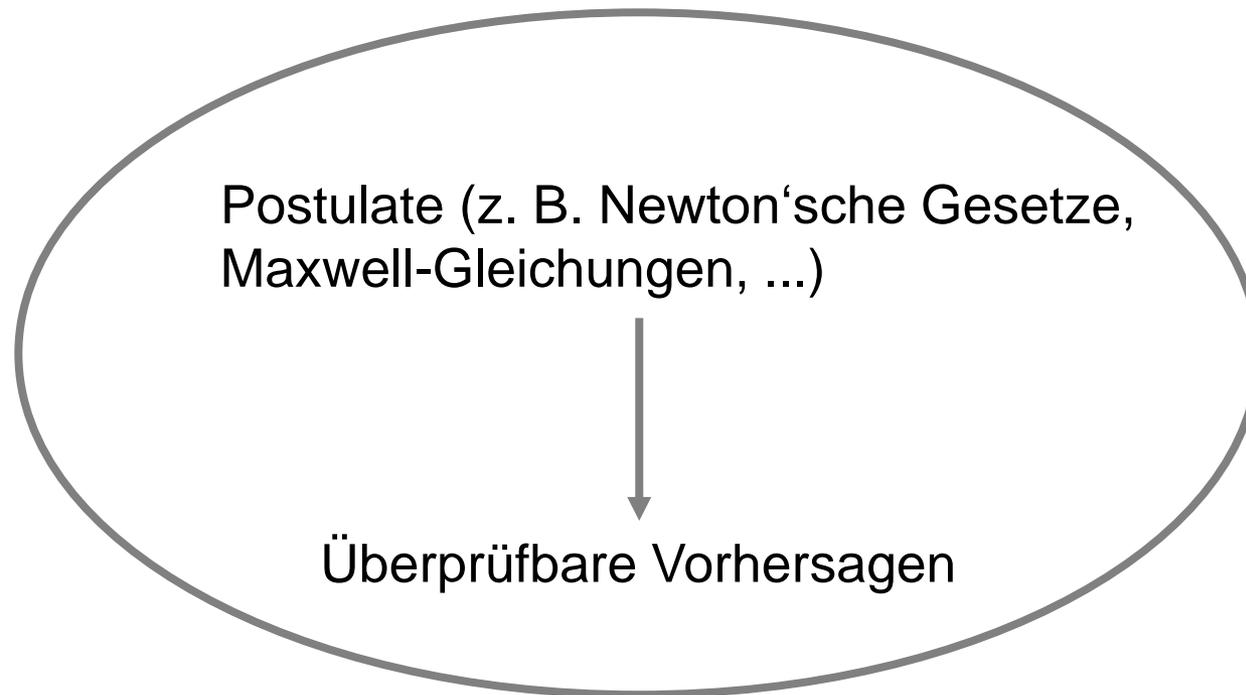
1 Grundlagen der Quantenmechanik

- 1.1 Einleitung
- 1.2 Historisches
- 1.3 Die Schrödingergleichung
- 1.4 Das freie quantenmechanische Elektron
- 1.5 Quantenmechanische Erwartungswerte

Ü-Blatt 2



Klassik vs. Quantenmechanik



 : Gültigkeitsbereich (z. B. $v \ll c$ für die Newton'sche Mechanik)

Quantenmechanik, insbesondere zur Beschreibung atomarer Vorgänge

Einführung von $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (*Planck'sches Wirkungsquantum*)

Klassik vs. Quantenmechanik

- Alternative Betrachtungen in der Quantenmechanik am Beispiel eines Teilchens
 - Ein Teilchen wird durch eine komplexwertige Wellenfunktion beschrieben
 - Die Wellenfunktion ist nicht observabel, aber das Betragsquadrat der Wellenfunktion ist proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens und ist messbar
 - Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion wird durch die Schrödingergleichung beschrieben
 - Es gibt physikalische Eigenschaften des Teilchens, die sich nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmen lassen

A1 Unschärferelation

- a) Erläutern Sie den Begriff der *Unschärferelation*.



Bildquelle: [wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heisenberg_300.jpg), 22.04.2014



- Allgemein:
 - Gleichzeitige beliebig genaue Messung zweier komplementärer Observablen unmöglich

- Orts-Impuls-Unschärfe:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Energie-Zeit-Unschärfe:

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Orts-Wellenzahl-Unschärfe:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

A1 Unschärferelation

- b) Mit Hilfe einer neuen Torlinientechnik können beim Fußball die Geschwindigkeit und Position des Balls gleichzeitig gemessen werden. Die Geschwindigkeit des Balls ($m = 0,5 \text{ kg}$) kann dabei sogar auf $0,001 \text{ m/s}$ genau bestimmt werden. Führt die Unschärferelation zu einer Einschränkung der Messgenauigkeit bei der Ortsbestimmung des Balls?



$$\begin{aligned}
 m &= 0,5 \text{ kg} & \Delta v &= 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 p &= mv \Rightarrow \Delta p = m \Delta v = 0,0005 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} \\
 \Delta x \Delta p &\geq \frac{h}{2} & \Rightarrow \Delta x &\geq \frac{h}{2 \Delta p} \\
 & & &= 1,055 \cdot 10^{-31} \text{ m}
 \end{aligned}$$

A1 Unschärferelation

- b) Mit Hilfe einer neuen Torlinientechnik können beim Fußball die Geschwindigkeit und Position des Balls gleichzeitig gemessen werden. Die Geschwindigkeit des Balls ($m = 0,5 \text{ kg}$) kann dabei sogar auf $0,001 \text{ m/s}$ genau bestimmt werden. Führt die Unschärferelation zu einer Einschränkung der Messgenauigkeit bei der Ortsbestimmung des Balls?



$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$\Delta v = 0,001 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = 0,0005 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta p} = 1,055 \cdot 10^{-31} \text{ m}$$

Welle-Teilchen-Dualismus

- Neben der Unschärfe ein weiteres Phänomen der Quantenmechanik
- Klassisch:
 - Teilchenphänomene vs. Wellenphänomene
- Quantenmechanik:
 - Teilchen verhalten sich wie Wellen
 - Wellen verhalten sich wie Teilchen



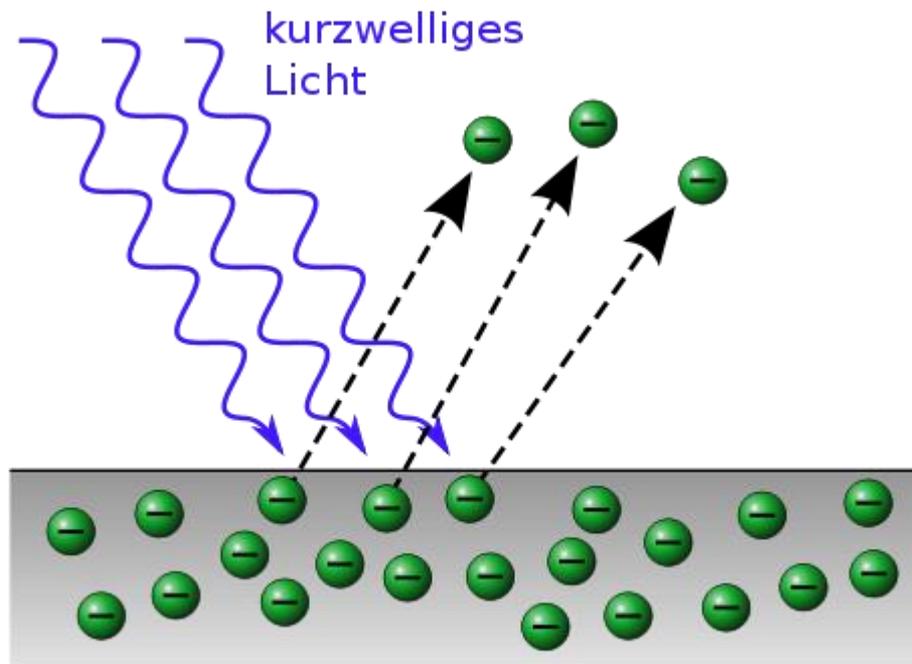
Welle-Teilchen-Dualismus

- de Broglie Beziehung (1924): $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$



Photoeffekt

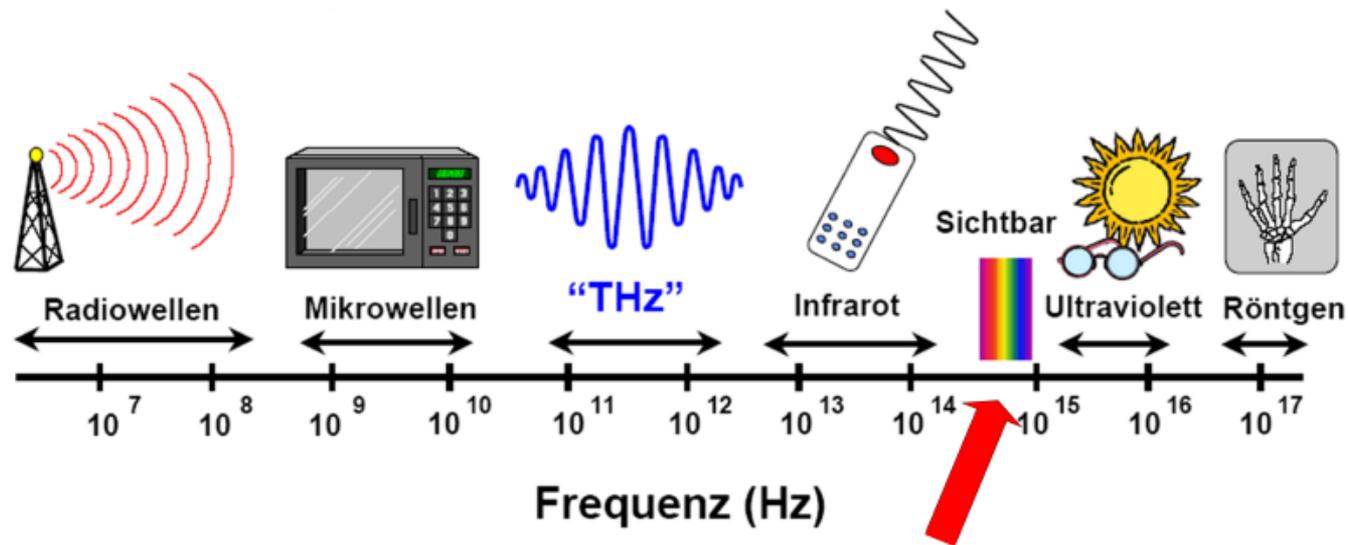
- Beispiel für den Teilchencharakter von Licht



Bildquelle: wikipedia.org, 13.04.2015

A2 Photoeffekt

- a) In welchem Wellenlängenbereich liegt der sichtbare Teil des Spektrums elektromagnetischer Strahlung?



Etwa von 400 nm ($7,5 \cdot 10^{14}$ Hz, Violett) bis 800 nm ($3,75 \cdot 10^{14}$ Hz, Rot)

A2 Photoeffekt

- b) Wie groß sind die Frequenzen (in Hertz) und Energiequanten (in Elektronenvolt bzw. Joule) einer Rundfunkwelle ($\lambda = 1000 \text{ m}$), einer UKW-Welle ($\lambda = 3 \text{ m}$) und weicher Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8} \text{ m}$)?

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$W = hf$$

$$\lambda = 1000 \text{ m} \Rightarrow f = 300 \text{ kHz} \Rightarrow W = 1,99 \cdot 10^{-28} \text{ J} = 1,24 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$$

A2 Photoeffekt

- b) Wie groß sind die Frequenzen (in Hertz) und Energiequanten (in Elektronenvolt bzw. Joule) einer Rundfunkwelle ($\lambda = 1000 \text{ m}$), einer UKW-Welle ($\lambda = 3 \text{ m}$) und weicher Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8} \text{ m}$)?

- Allgemein

- Frequenz: $f = \frac{c}{\lambda}$

- Energie: $W = hf$

Division mit Elementarladung e

- Rundfunkwelle

- Frequenz: 300 kHz

- Energie: $1,99 \cdot 10^{-28} \text{ J} = 1,24 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$

- UKW-Welle

- Frequenz: 100 MHz

- Energie: $6,63 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 4,14 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$

- Weiche Röntgenstrahlung

- Frequenz: $3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$

- Energie: $1,99 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 124,21 \text{ eV}$

A2 Photoeffekt

- c₁) Eine Photozelle enthält eine Kaliumkathode ($W_a = 2,25 \text{ eV}$). Berechnen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffekts.

$$W_{ph} = W_a$$

$$W_{ph} = hf$$

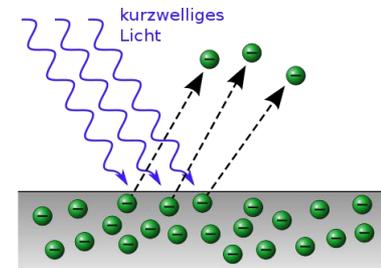
$$\Rightarrow hf = W_a$$

$$\Rightarrow f = \frac{W_a}{h} = 3,44 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 551,5 \text{ nm}$$

$$\leftarrow W = hf = h\nu$$



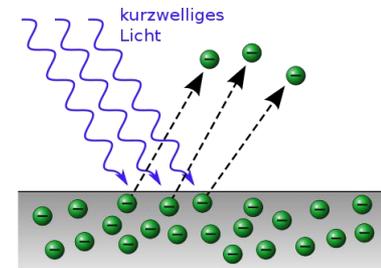
Bildquelle: wikipedia.org, 13.04.2015

A2 Photoeffekt

- c₁) Eine Photozelle enthält eine Kaliumkathode ($W_a = 2,25 \text{ eV}$). Berechnen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffekts.

- Grenzbedingung:

$$W_{\text{Photon}} = W_a \quad \rightarrow \quad hf = h \frac{c}{\lambda} = W_a$$



Bildquelle: wikipedia.org, 13.04.2015

- Grenzfrequenz:

$$f = \frac{W_a}{h} = 5,44 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

entspricht einer Wellenlänge von $\lambda = 551,5 \text{ nm}$

A2 Photoeffekt

- c₂) Welche Geschwindigkeit haben die schnellsten Elektronen bei Beleuchtung mit UV-Licht ($\lambda = 100 \text{ nm}$)? Wird die Geschwindigkeit bei Strahlung mit halber Wellenlänge doppelt so groß?

$$\begin{aligned}
 W_{ph} &= W_a + W_{kin. e^-} \\
 &= W_a + \frac{1}{2} m_e v_{max}^2
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{2(W_{ph} - W_a)}{m_e}} = v_{max} \quad \text{mit } W_{ph} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - W_a\right)}{m_e}} = 1,89 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A2 Photoeffekt

- c₂) Welche Geschwindigkeit haben die schnellsten Elektronen bei Beleuchtung mit UV-Licht ($\lambda = 100 \text{ nm}$)? Wird die Geschwindigkeit bei Strahlung mit halber Wellenlänge doppelt so groß?

- Energieerhaltung bei Beleuchtung:

$$W_{\text{Photon}} = W_a + W_{\text{kin, Elektron}} = W_a + \frac{1}{2} m_e v_{\text{max}}^2$$

→

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left(h \frac{c}{\lambda} - W_a \right)}$$

$$= 1,89 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Halbe Wellenlänge: $v_{\text{max},2} = 2,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

→ keine Verdopplung der Geschwindigkeit, da nichtlinearer Zusammenhang

A2 Photoeffekt

- d) Wie groß muss die angelegte Spannung U sein, damit die aus einer Magnesium-Kathode ($W_a = 3,7 \text{ eV}$) durch Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 302 \text{ nm}$ herausgeschlagenen Elektronen gerade nicht die Anode erreichen?

$$W_{ph} = W_a + W_{k.i.e^-} \quad W_{pot} = eU$$

$$W_{pot} = W_{k.i.e^-}$$

$$\Rightarrow eU = W_{ph} - W_a$$

$$\Rightarrow U = \frac{W_{ph} - W_a}{e} = \frac{\frac{hc}{\lambda} - W_a}{e} = 0,41 \text{ V}$$

A2 Photoeffekt

- d) Wie groß muss die angelegte Spannung U sein, damit die aus einer Magnesium-Kathode ($W_a = 3,7 \text{ eV}$) durch Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 302 \text{ nm}$ herausgeschlagenen Elektronen gerade nicht die Anode erreichen?
- Grenzbedingung:

$$W_{pot} = W_{kin} \quad \rightarrow \quad eU = W_{Photon} - W_a$$

- Berechnung der Spannung:

$$U = \frac{h \frac{c}{\lambda} - W_a}{e} = 0,41 \text{ V}$$

A2 Photoeffekt

- e) Zur richtigen Belichtung eines Film mit Silberkörnern benötigt man bei $\lambda = 550 \text{ nm}$ etwa 10^{-6} J/m^2 . Wie viele Photonen sind für 1 mm^2 lichtempfindliche Fläche nötig?

$$W_{ph} = h f = \frac{hc}{\lambda} = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$S = \frac{W}{A} \rightarrow n W_{ph}$$

$$\Rightarrow S = \frac{n W_{ph}}{A} \Rightarrow n = \frac{SA}{W_{ph}} = 2,79 \cdot 10^6$$

A2 Photoeffekt

- e) Zur richtigen Belichtung eines Film mit Silberkörnern benötigt man bei $\lambda = 550 \text{ nm}$ etwa 10^{-6} J/m^2 . Wie viele Photonen sind für 1 mm^2 lichtempfindliche Fläche nötig?
- Berechnung der Photonenenergie:

$$W_{\text{Photon}} = hf = h \frac{c}{\lambda} = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- Berechnung der notwendigen Anzahl an Photonen:

$$n \cdot W_{\text{Photon}} = S \cdot A$$

→

$$n = S \cdot \frac{A}{W_{\text{Photon}}} = 2,77 \cdot 10^6 \text{ Photonen}$$

Historisches zur Quantenmechanik: Interferenz

Interferenz ist ein typisches Wellenphänomen. Experimente hierzu können z.B. in der Badewanne erfolgen.

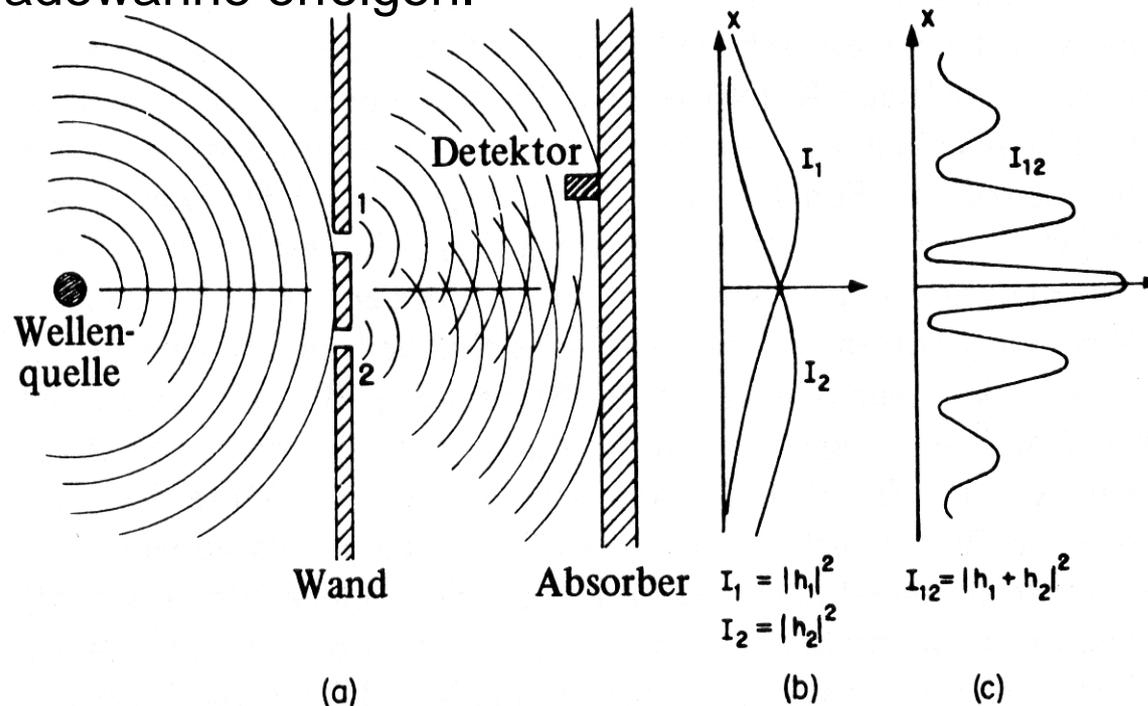


Fig. 1–2. Interferenzexperiment mit Wasserwellen.

Quelle: Feynman Lectures

Viele Interferenzphänomene sind auch im Bereich der Optik bekannt. Hier kommt es zu einer Überlagerung von elektromagnetischen Wellen.

Historisches zur Quantenmechanik: Interferenz

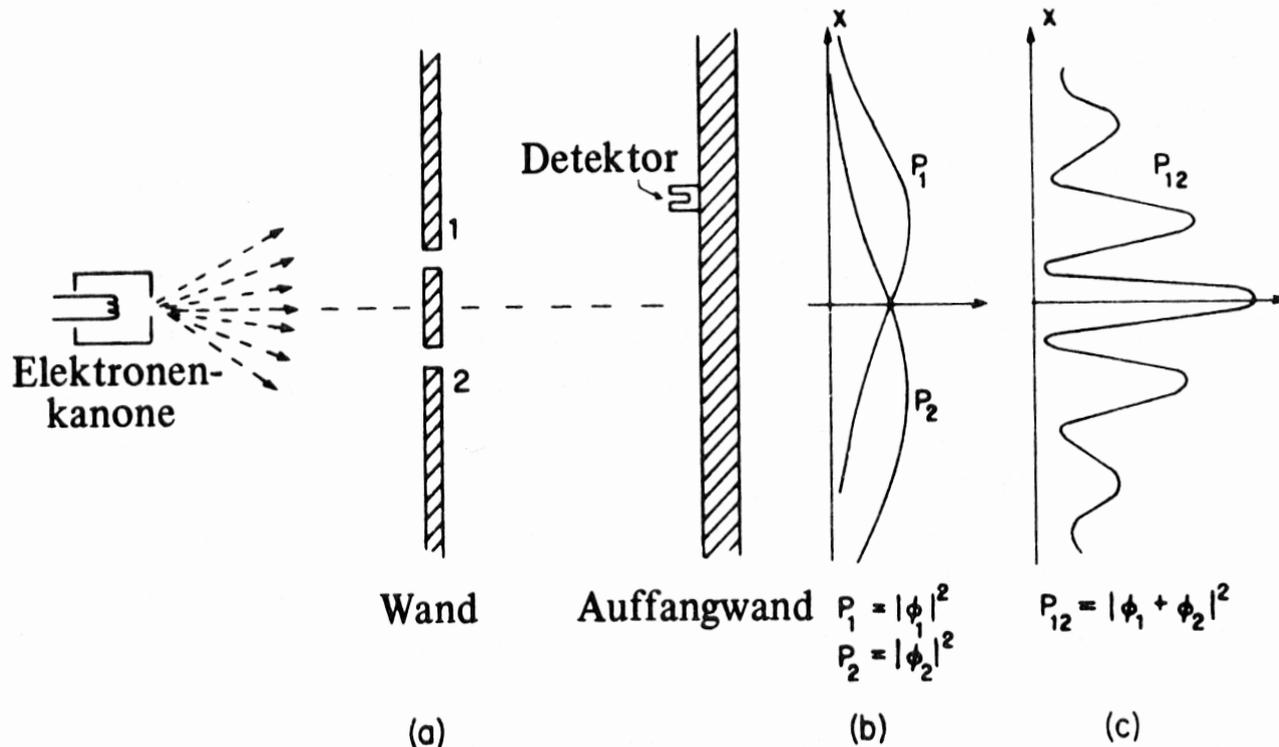
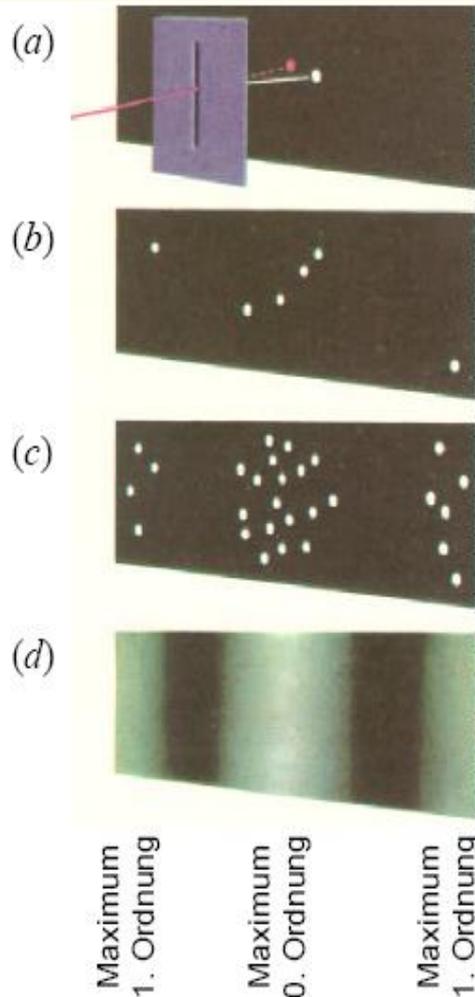


Fig. 1–3. Interferenzexperiment mit Elektronen.

Quelle: Feynman Lectures

Mit einem ähnlichen Experiment konnten Davisson und Germer 1927 erstmals die Interferenz von Elektronen nachweisen. Teilchen treten auch als Felder (Wellen) auf.

Teilchen als Wellen



Beugung im Teilchenbild.

(a) Die Flugbahn des einzelnen Teilchens weicht von der geraden Richtung ab.

(b) Die Auftreffpunkte mehrerer Teilchen sind scheinbar regellos verteilt.

(c) Häufung an bestimmten Stellen.

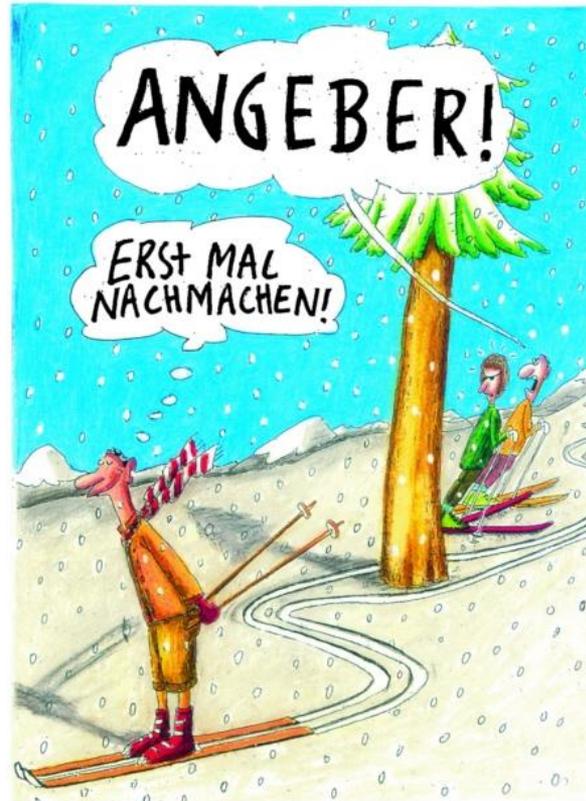
(d) Gesamtes Erscheinungsbild.

➤ Flugbahn des einzelnen Teilchens nicht bekannt

➤ Wahrscheinlichkeitsaussagen

Quelle: H. Leipner, U Halle

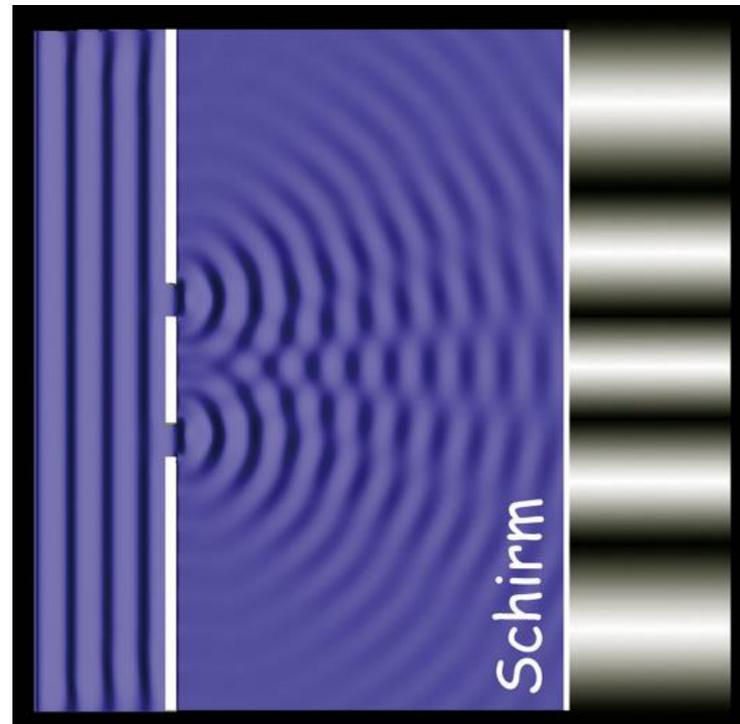
A3 Doppelspalt-Experiment



Quelle: <http://www.oberstufenphysik.de/graph/doppelspaltskifahrer.jpg>, 22.04.2014, 16:00

A3 a) Doppelspalt-Experiment

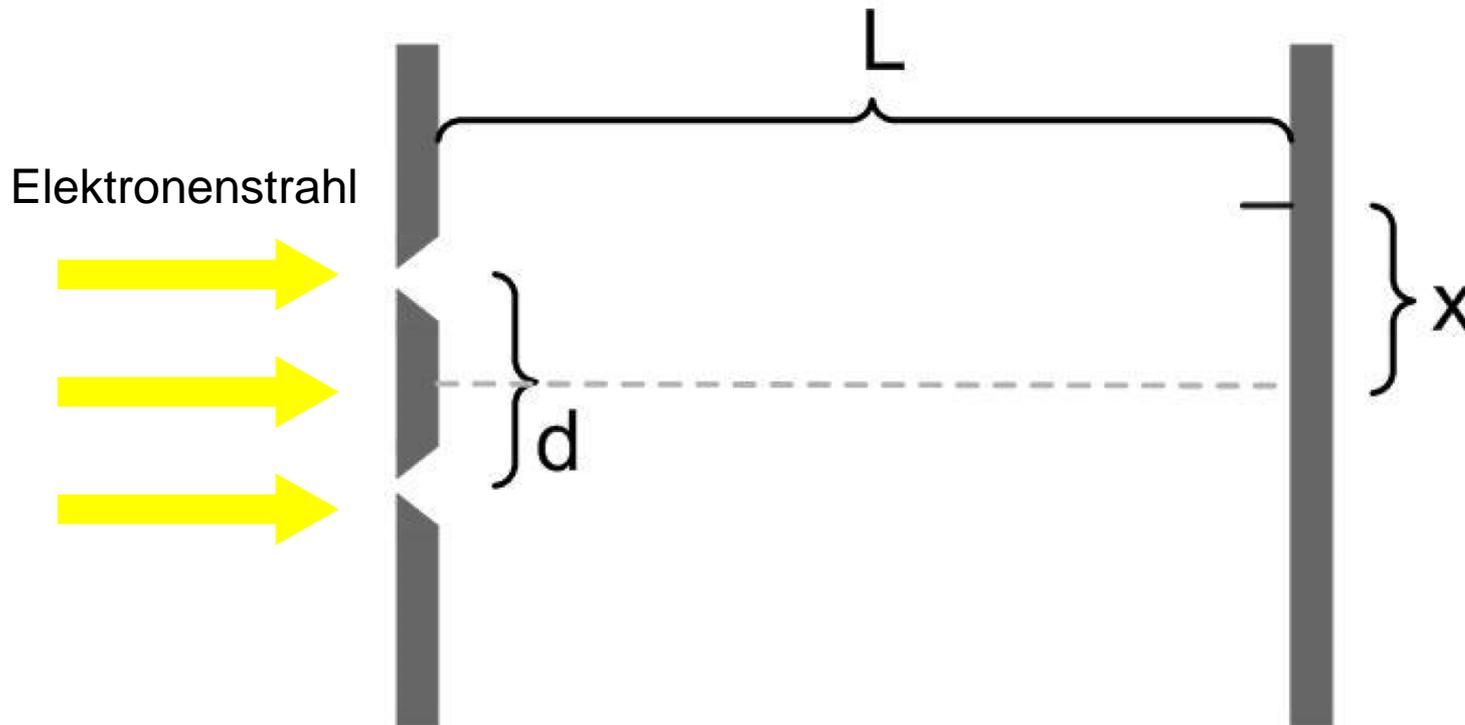
- Alternative Betrachtungsweise: Huygens-Prinzip



Quelle: <http://www.oebv.at/sixcms/media.php/229/26-10.jpg> (22.04.2014, 10:35)

A3 a) Doppelspalt-Experiment

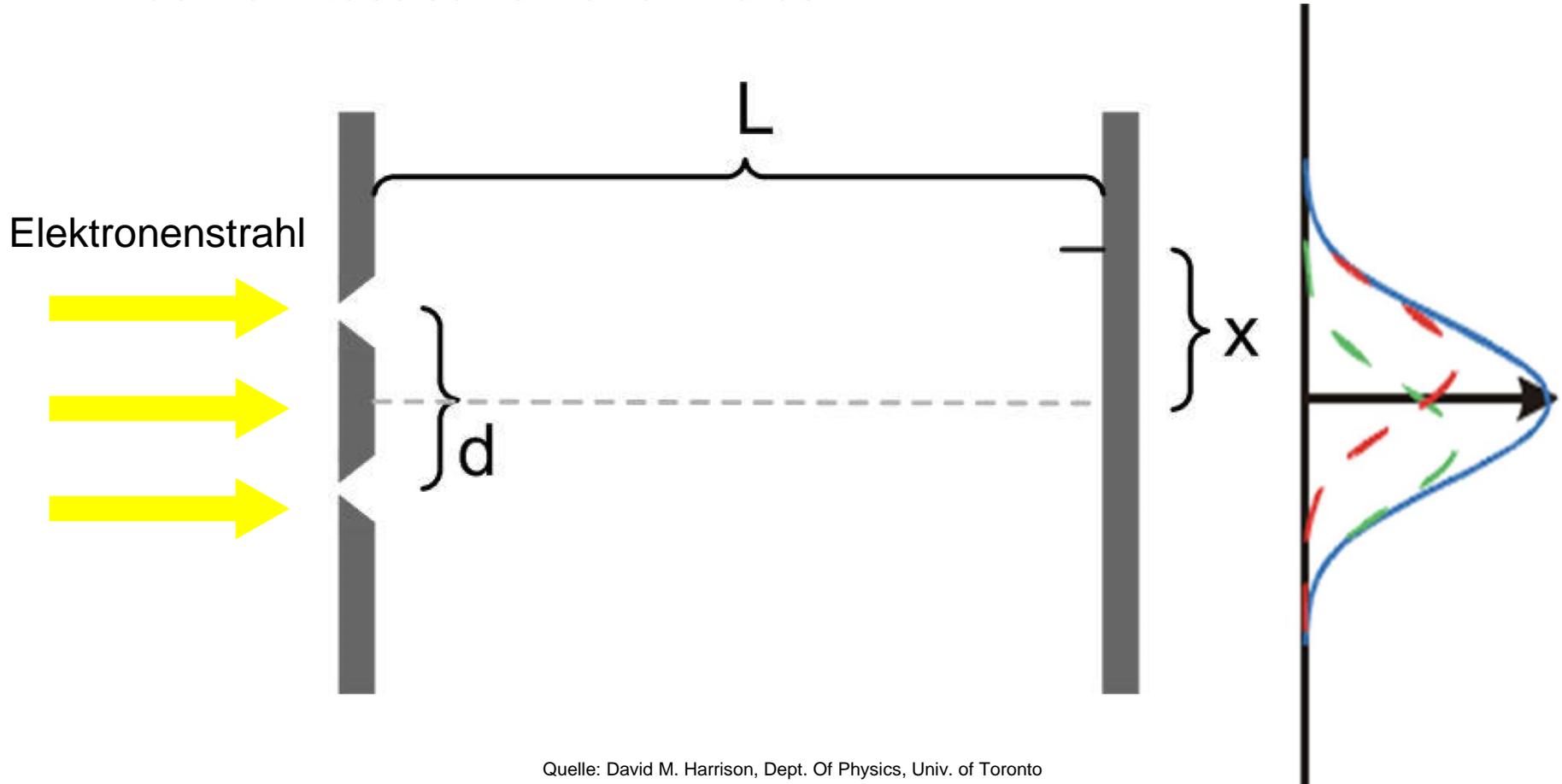
■ Versuchsaufbau



Quelle: David M. Harrison, Dept. Of Physics, Univ. of Toronto

A3 a) Doppelspalt-Experiment

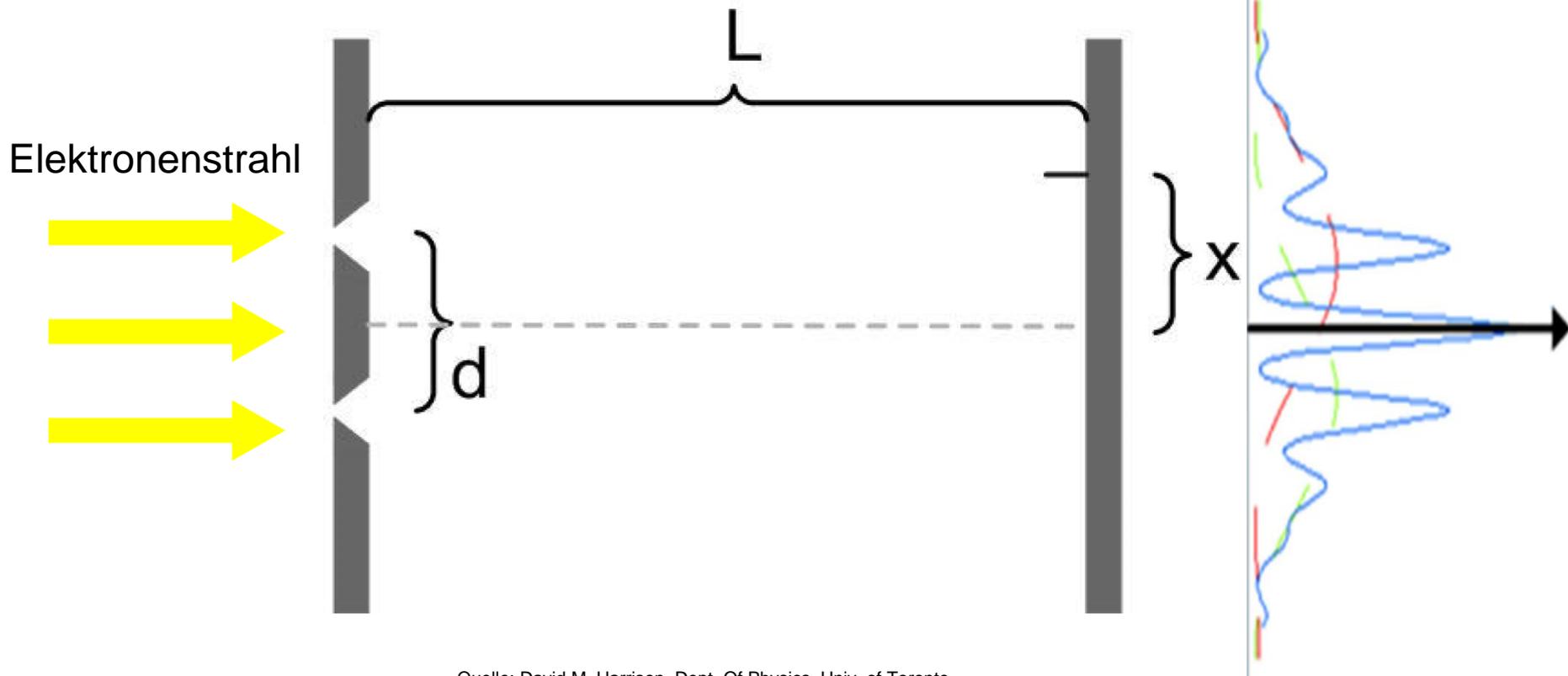
- Was man klassisch erwarten würde:



Quelle: David M. Harrison, Dept. Of Physics, Univ. of Toronto

A3 a) Doppelspalt-Experiment

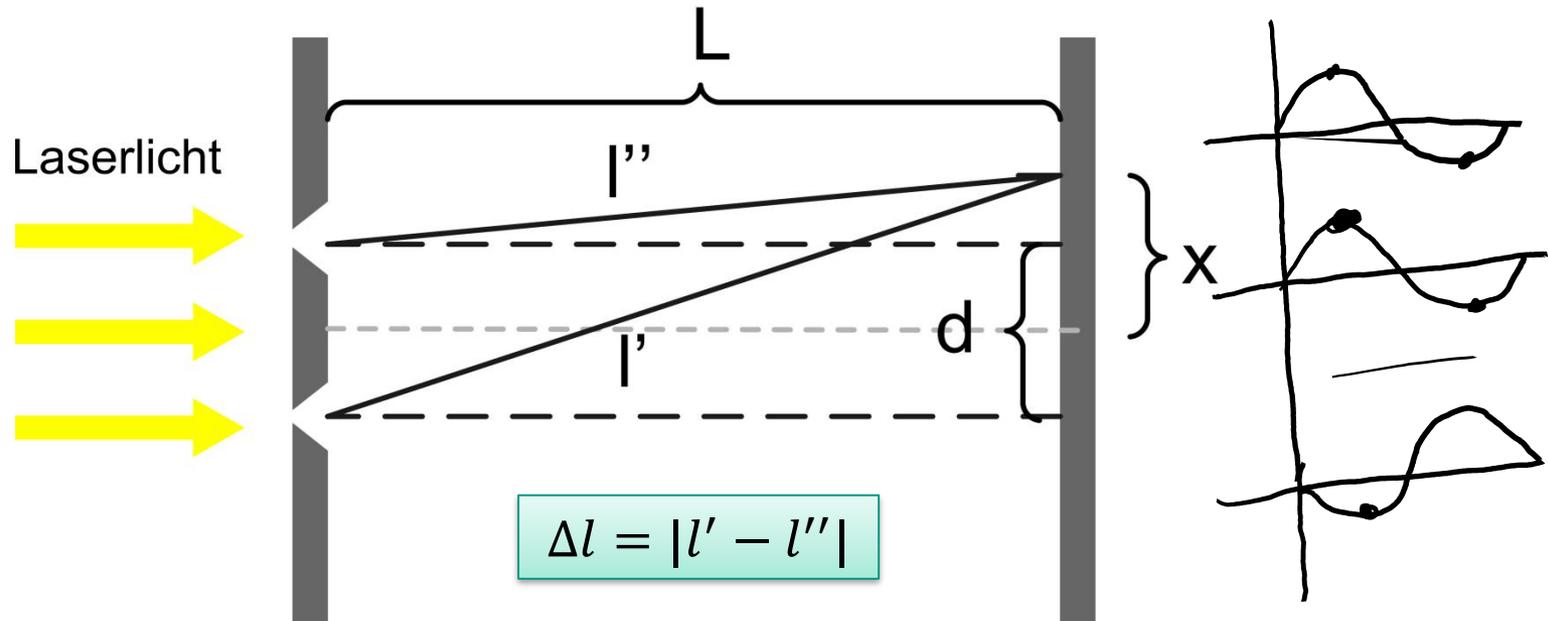
- Was tatsächlich gemessen wird:



Quelle: David M. Harrison, Dept. Of Physics, Univ. of Toronto

A3 a) Doppelspalt-Experiment

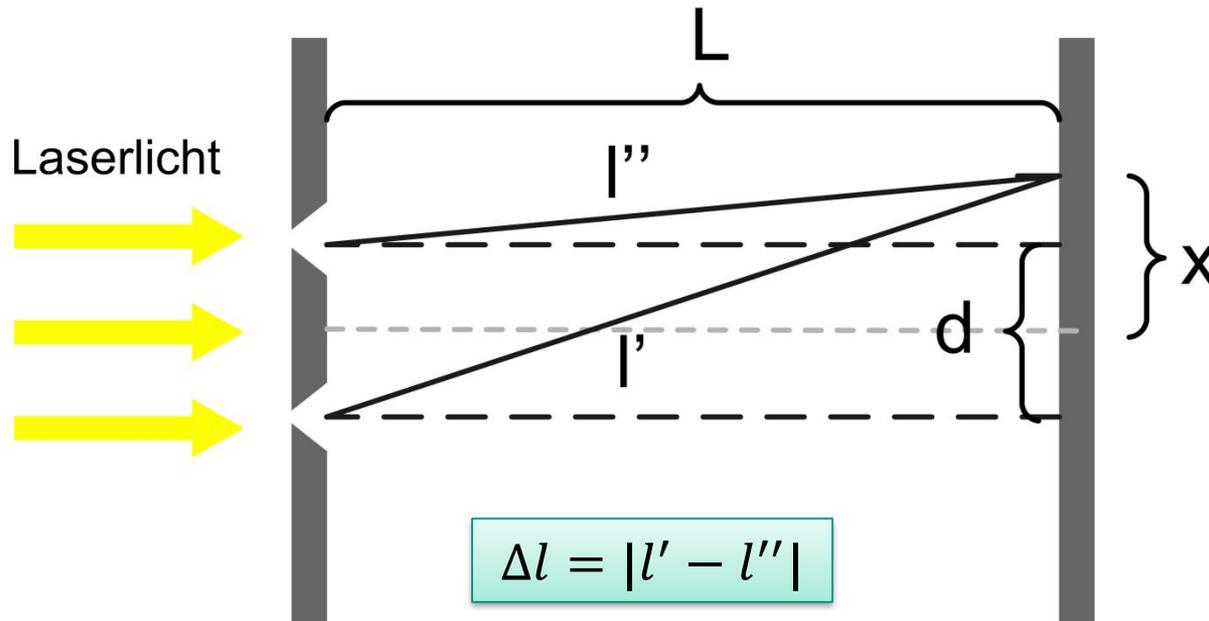
Zur einfacheren Vorstellung trifft in der Aufgabe monochromatisches Laserlicht auf den Doppelspalt. Gemäß dem Doppelspaltexperiment würde ein Elektronenstrahl zum selben Ergebnis führen.



- Maximum: Konstruktive Interferenz $\rightarrow \Delta l = n\lambda/2$ mit $n=0,2,4,\dots$ $\Delta l = m\lambda$
- Minimum: Destruktive Interferenz $\rightarrow \Delta l = n\lambda/2$ mit $n=1,3,5,\dots$

A3 b) Doppelspalt-Experiment

Welchen Abstand x haben benachbarte Maxima auf dem Schirm?



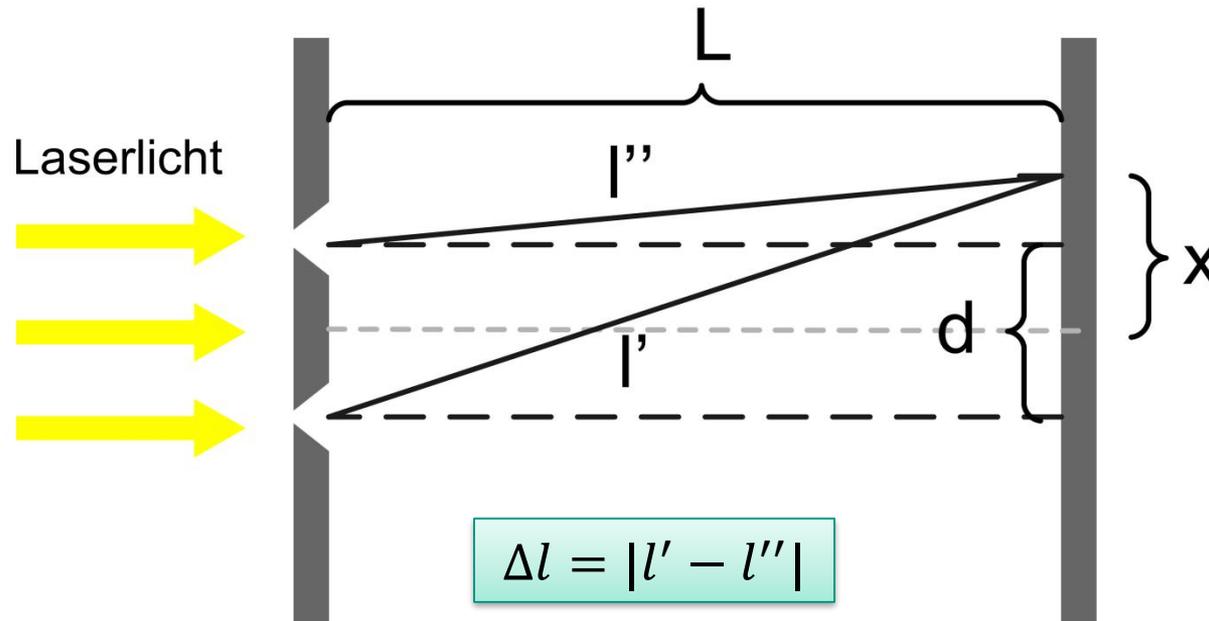
Maxima: Konstruktiv
 $\Delta l = m\lambda$

$$e^1 = \sqrt{L^2 + (x + \frac{d}{2})^2}$$

$$e^2 = \sqrt{L^2 + (x - \frac{d}{2})^2}$$

A3 b) Doppelspalt-Experiment

Welchen Abstand x haben benachbarte Maxima auf dem Schirm?



- Lösungsansatz 1: mathematisch

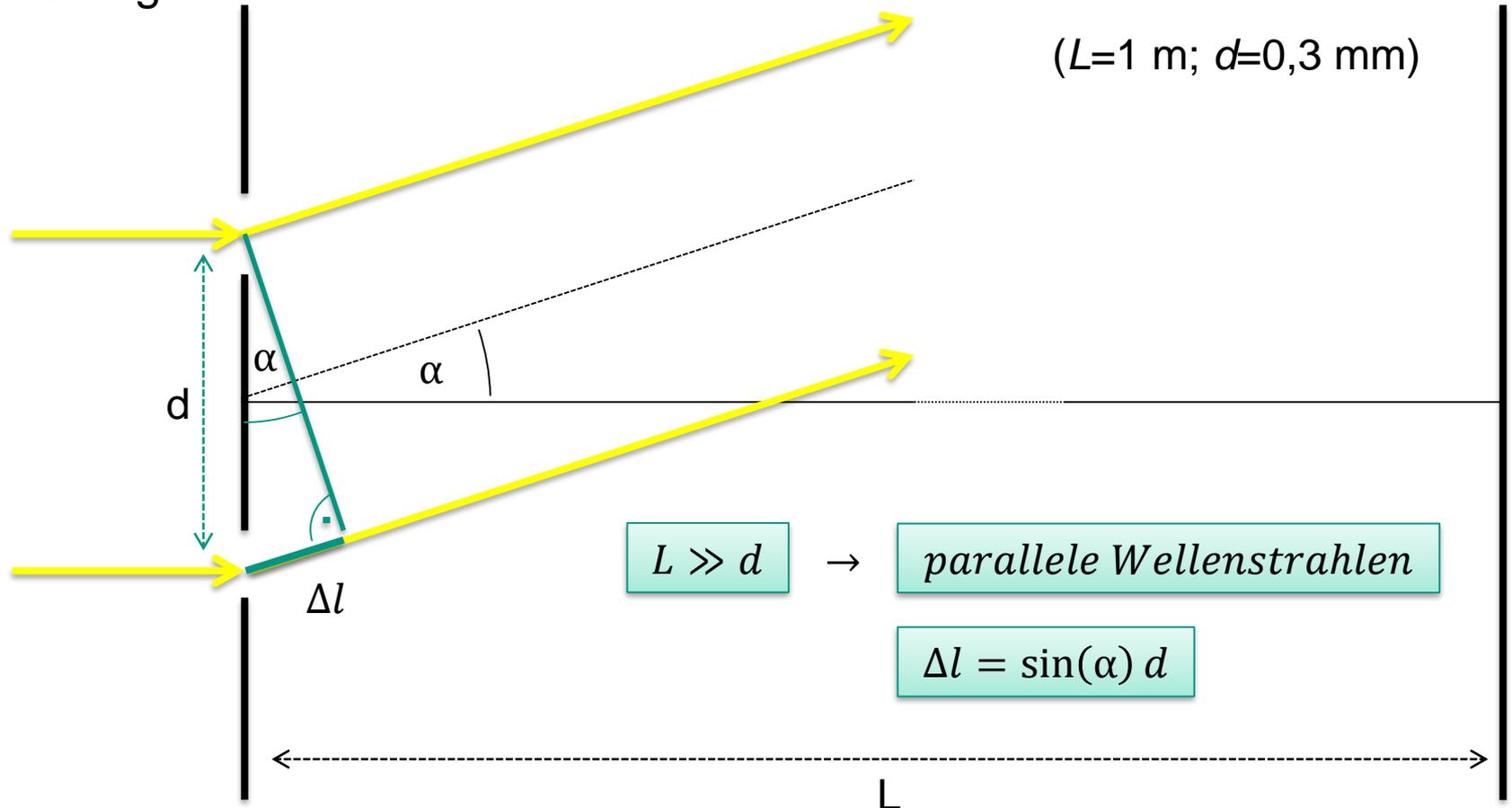
$$l' = \sqrt{L^2 + (x + d/2)^2}$$

$$l'' = \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2}$$

→ Ausführlicher Lösungsweg in der Musterlösung

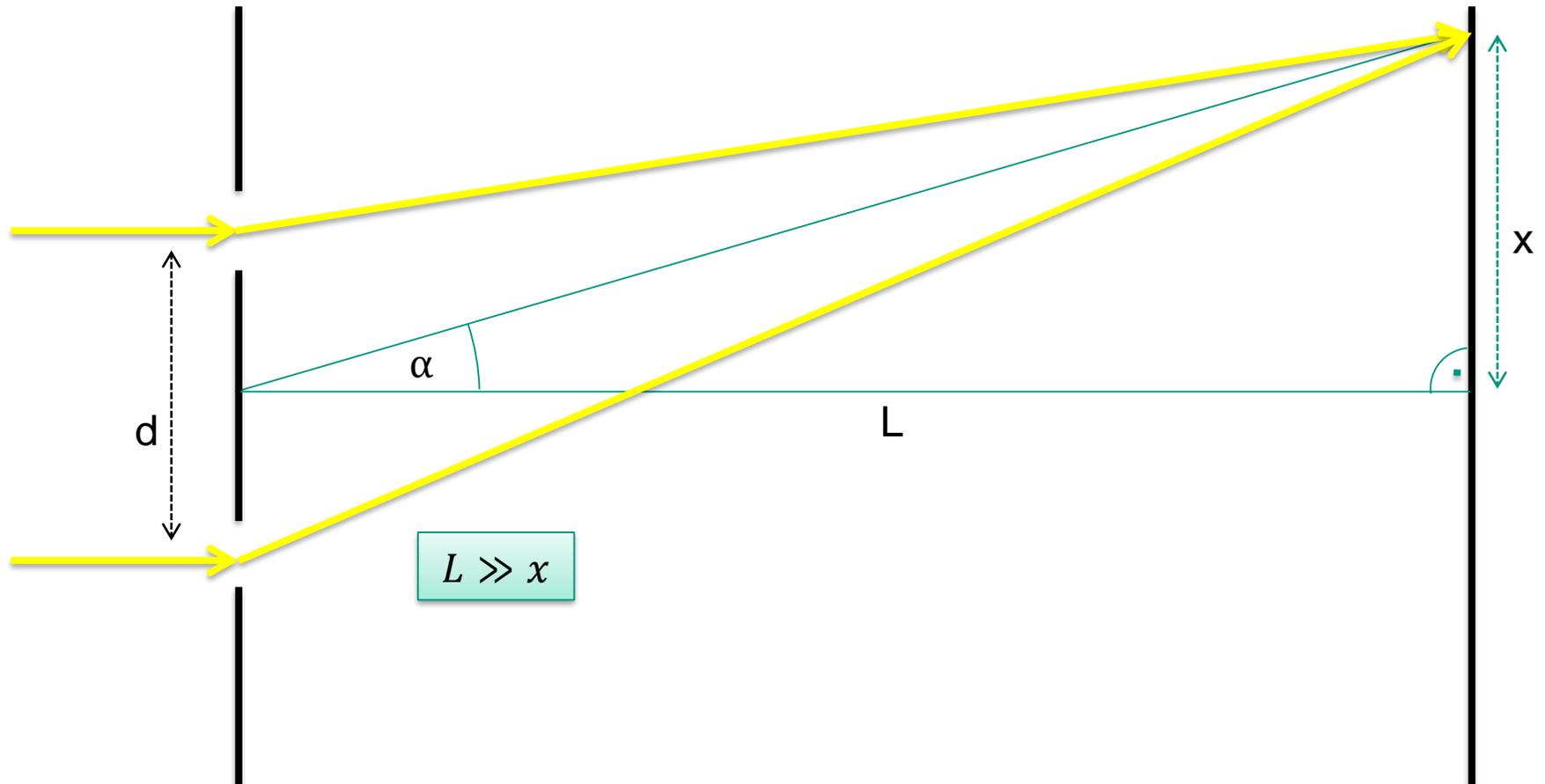
A3 b) Doppelspalt-Experiment

- Lösungsansatz 2: geometrisch
- Näherung 1:



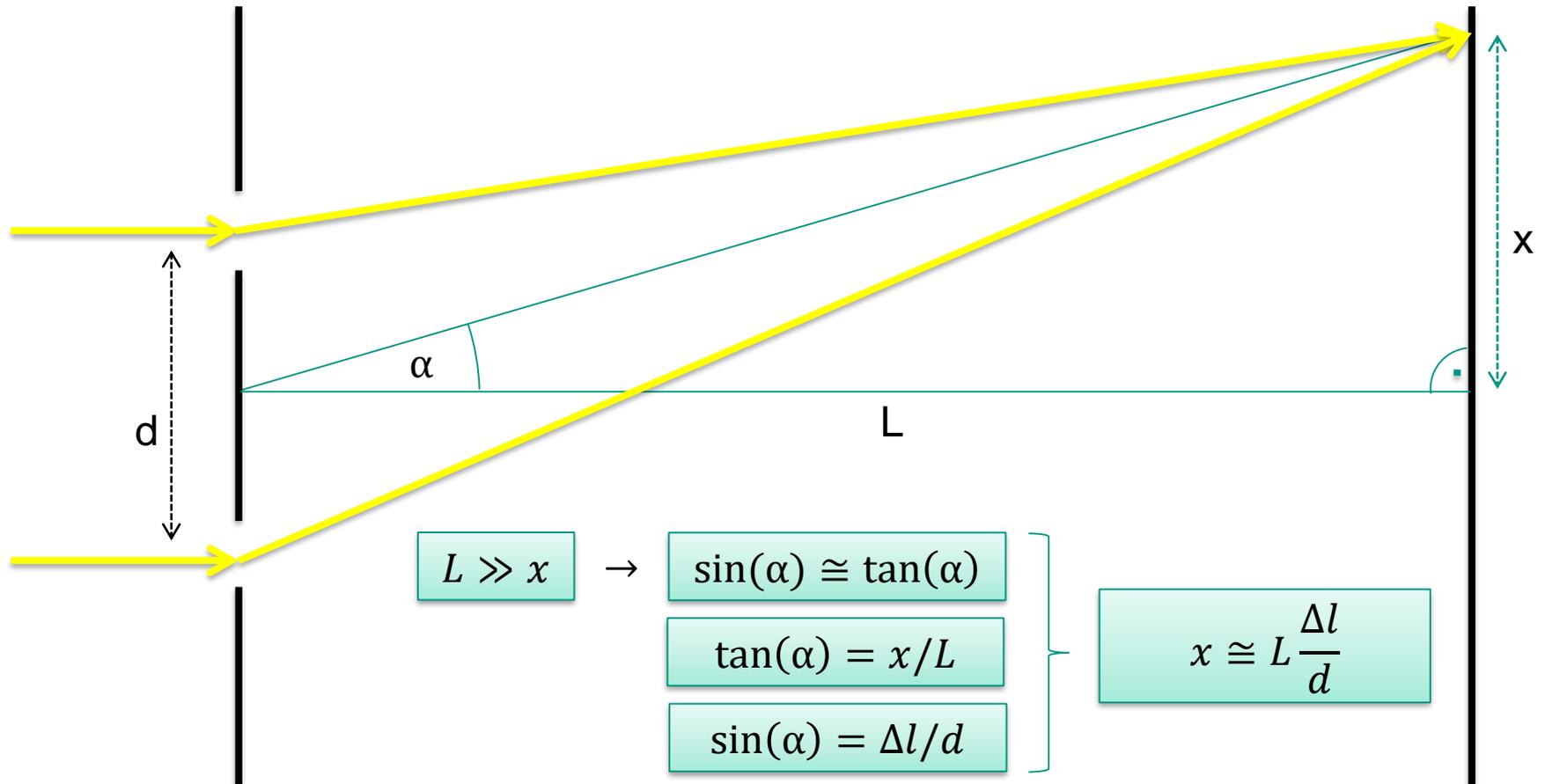
A3 b) Doppelspalt-Experiment

■ Näherung 2:



A3 b) Doppelspalt-Experiment

■ Näherung 2:



A3 b) Doppelspalt-Experiment

- Mit $x \cong L \frac{\Delta l}{d}$ und $\Delta l = n\lambda$ mit $n=0,1,2,\dots$ ergeben sich für die

$$X(n) = L \frac{n\lambda}{d}$$

$$\Delta X = X(n+1) - X(n) = L \frac{(n+1)\lambda}{d} - L \frac{n\lambda}{d} = L \frac{\lambda}{d} = 2,11 \text{ mm}$$

A3 b) Doppelspalt-Experiment

- Mit $x \cong L \frac{\Delta l}{d}$ und $\Delta l = n\lambda$ mit $n=0,1,2,\dots$ ergeben sich für die

x-Werte der Maxima n-ter Ordnung:

$$\rightarrow x(n) \cong L \frac{n\lambda}{d}$$

- Damit berechnet sich der Abstand zwischen zwei Maxima zu:

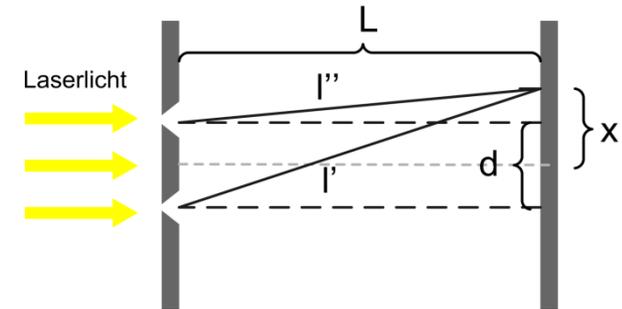
$$\Delta x = L \frac{(n+1)\lambda}{d} - L \frac{n\lambda}{d} = L \frac{\lambda}{d}$$

Mit $L = 1,00 \text{ m}$; $\lambda = 633 \text{ nm}$ und $d = 0,3 \text{ mm}$ ergibt sich:

$$\Delta x = 2,11 \text{ mm}$$

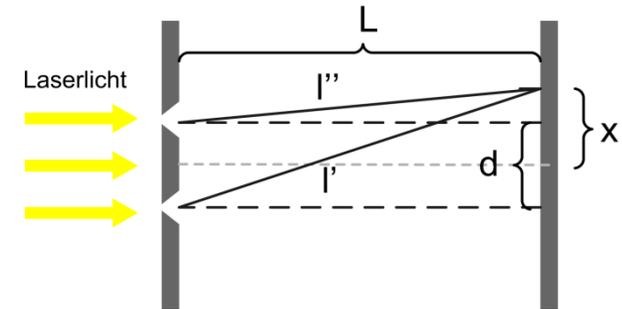
A3 c) Doppelspalt-Experiment

Nun fällt Licht eines anderen Lasers auf die gleiche Anordnung, wobei die beiden Maxima 2. Ordnung einen Abstand von 6,8 mm besitzen. Berechnen Sie die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.



A3 c) Doppelspalt-Experiment

Nun fällt Licht eines anderen Lasers auf die gleiche Anordnung, wobei die beiden Maxima 2. Ordnung einen Abstand von 6,8 mm besitzen. Berechnen Sie die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.



- x-Wert eines Maximums 2. Ordnung aus Aufgabenstellung:

$$\rightarrow x(2) = \frac{6,8}{2} \text{ mm} = 3,4 \text{ mm}$$

- Auflösen der Formel aus der letzten Teilaufgabe nach λ :

$$\rightarrow \lambda \cong \frac{x(n)d}{nL}$$

Mit $L=1 \text{ m}$, $d=0,3 \text{ mm}$, $n=2$ und $x(2)=3,4 \text{ mm}$ ergibt sich:

$$\rightarrow \lambda \cong 510 \text{ nm}$$

Wie beschreiben wir den Welle-Teilchen-Dualismus mathematisch?

- Ziel: Beschreibung der Dynamik eines quantenmechanischen Zustandes
- Zustandsbegriff:
 - *Zustand* eines Systems: Minimaler Satz von physikalischen Größen, aus dem sich die maximale Information ableiten lässt.
- Änderung eines Zustandes:
 - eindeutige Vorhersage über den Zustand zum Zeitpunkt t aus der Kenntnis des Zustandes zum Zeitpunkt t_0 .
- Mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = F[Z(t)]$$

- Zeitliche Änderung des Zustandes wird beschrieben durch Differentialgleichung 1. Ordnung (Evolutionsgleichung)

1. Postulat der Quantenmechanik:

Der quantenmechanische Zustand eines Teilchens der Masse m , das sich in einem Kraftfeld mit dem Potential $V(x,t)$ befindet, lässt sich als komplexwertige Funktion $\psi(x,t)$ des Ortes und der Zeit beschreiben. Seine Zeitentwicklung gehorcht der zeitabhängigen **Schrödingergleichung**:



Erwin Schrödinger
(1887-1961)

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t) \right\} \psi(x,t)$$

mit $\hbar = h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{Js}$; $j^2 = -1$

$\psi(x,t)$ heißt **Wellenfunktion** des Teilchen

Die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$

...und was bringt uns jetzt die Wellenfunktion ????

2. Postulat der Quantenmechanik:

Die Wellenfunktion ist nicht observabel (=keine Messgröße);
ihr Absolutquadrat

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)$$

ist proportional zur Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens
im Raum.

... nehmen wir als Messgröße den Ort:

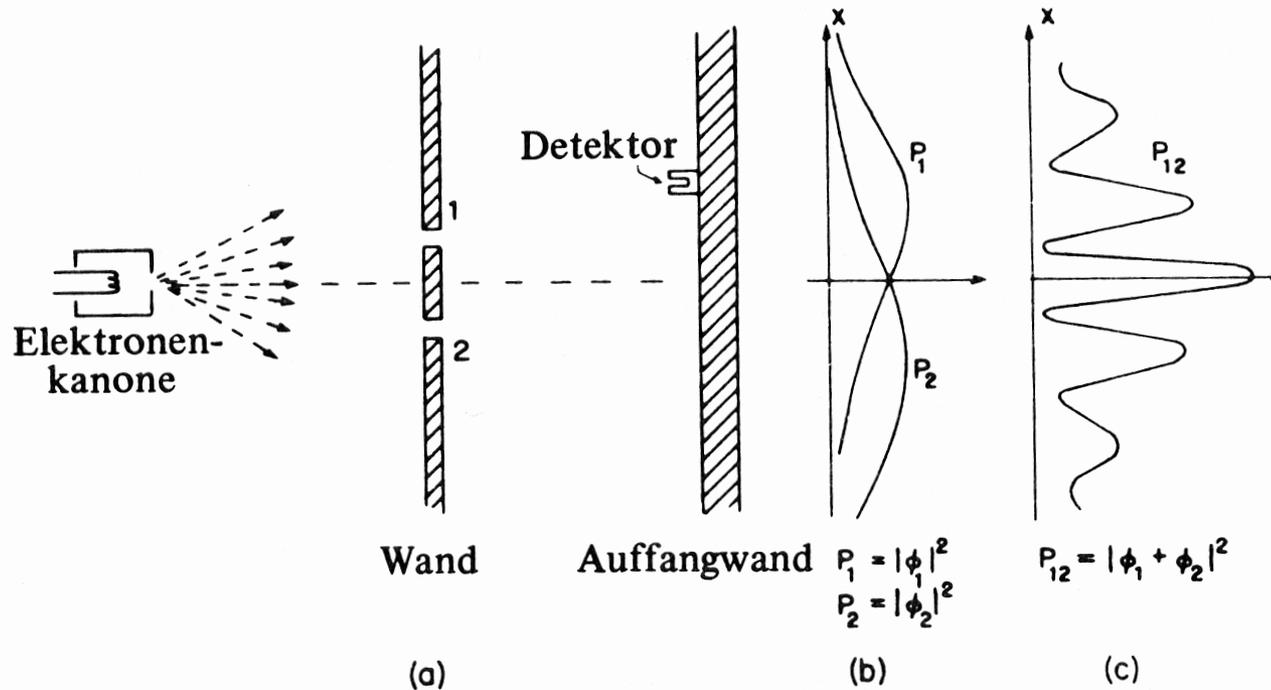


Fig. 1–3. Interferenzexperiment mit Elektronen.

... aha, $\Psi(x,t)$ regelt also z. B. das Entstehen von Elektronen-Interferenzmustern

$\rho(x,t)$ ist messbar, $\Psi(x,t)$ selbst aber NICHT !

A4 a) Schrödingergleichung

- Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2}$$

- Schrödingergleichung für ein verschwindendes Potential

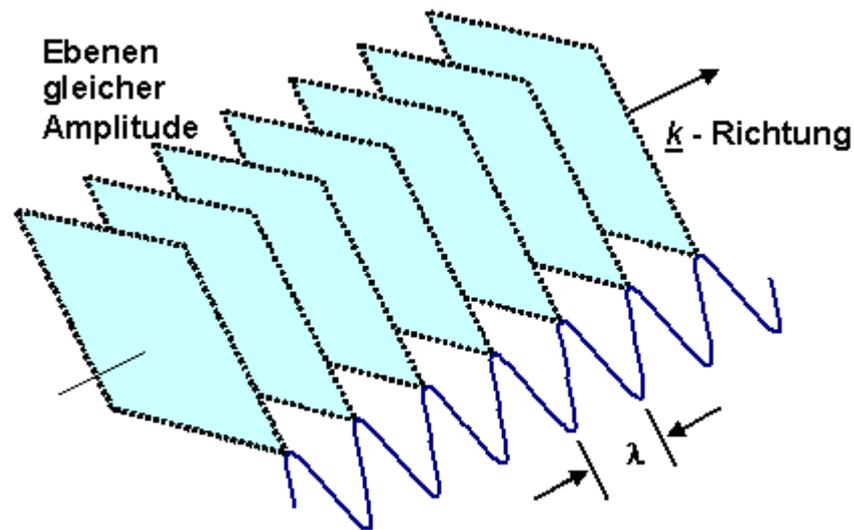
$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

- Vergleich:

- Wellengleichung hat die Zeit in der zweiten Ableitung
- Beide Gleichungen durch ebene Wellen lösbar
- Komplexe Lösungsansätze für beide Gleichungen
 - Für Wellengleichung nur Rechentrick, um Aussage als Messgröße zu erhalten
 - Für Schrödingergleichung gelten echt komplexe Funktionen

A4 b) Schrödingergleichung

- Ansatz: ebene Welle
- Wellenfronten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Teilchen vollständig delokalisiert
- Beschreibung: $\psi(x, t) = Ae^{j(kx - \omega t)}$



Quelle: [Uni Kiel, 15.04.2015](#)

A4 b) Schrödingergleichung

- Ebene Welle:

$$\psi(x, t) = A e^{j(kx - \omega t)}$$

- Schrödingergleichung für zeitlich konstantes Potential:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

$$\partial_t \psi = A e^{j(kx - \omega t)} (-j\omega) = (-j\omega) \psi$$

$$\partial_x^2 \psi = A e^{j(kx - \omega t)} (jk)^2 = -k^2 \psi$$

$$\hbar \omega \psi = \left(+ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + V(x) \psi \right)$$

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) \quad \hookrightarrow \omega_{\text{pot}}$$

$$\downarrow \quad \hookrightarrow p = \hbar k \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = \omega_{\text{kin}}$$

A4 b) Schrödingergleichung

- Ebene Welle:

$$\psi(x, t) = Ae^{j(kx - \omega t)}$$

- Schrödingergleichung für zeitlich konstantes Potential:

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

- Lösung, falls:

$$\hbar\omega = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) \right)$$

- Klassischer Vergleich:

$$W = (W_{kin} + W_{pot})$$

A4 c) Schrödingergleichung

- Ansatz: Superposition ebener Wellen

$$\psi(x, t) = a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t)$$

$$\psi_1(x, t) = A_1 e^{j(k_x x - \omega t)}$$

$$\psi_2(x, t) = A_2 e^{j(k_x x - \omega t)}$$

- Einsetzen in Schrödingergleichung
 - Linearität der Differentialoperatoren d/dt und d^2/dx^2 verwenden
 - $\psi_1(x, t)$ und $\psi_2(x, t)$ per Definition Lösungen der SGL

$$\begin{aligned}
 j\hbar \partial_t \psi &= a j\hbar \partial_t \psi_1 + b j\hbar \partial_t \psi_2 \\
 &= a \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right) \psi_1 + b \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right) \psi_2 \\
 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right) \underbrace{(a\psi_1 + b\psi_2)}_{\psi}
 \end{aligned}$$

A4 c) Schrödingergleichung

- Ansatz: Superposition ebener Wellen

$$\psi(x, t) = a\psi_1(x, t) + b\psi_2(x, t)$$

$$\psi_1(x, t) = A_1 e^{j(k_x x - \omega t)}$$

$$\psi_2(x, t) = A_2 e^{j(k_x x - \omega t)}$$

- Einsetzen in Schrödingergleichung

- Linearität der Differentialoperatoren d/dt und d^2/dx^2 verwenden
- $\psi_1(x, t)$ und $\psi_2(x, t)$ per Definition Lösungen der SGL

$$j\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = a j\hbar \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t} + b j\hbar \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) = a \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_1(x, t) + b \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_2(x, t)$$

Lernziele der 1. Übung

- Bedeutung und Anwendung der Heisenbergschen Unschärferelation
- Vertrautheit mit dem Welle-Teilchen-Dualismus
 - Verstehen des Photoeffekts und grundlegende Berechnungen
 - Grundlegende Berechnungen am Doppelspalt und Transfer des Gelernten auf ähnliche Konstrukte wie optische Gitter
- Vertrautheit mit der Schrödingergleichung und deren Lösung

- Lernziele des 1. Tutoriums: Dispersion, Fourier-Transformation der Gauß-Funktion

Ankündigungen

- Lösungen zur 2. Übung: 14. Mai 2020 (nach der Übung) in ILIAS
 - Lösungen zum 1. Tutorium: 15. Mai 2020 (nach der Übung) in ILIAS
-

- Nächste Übung (Ü3): 19. Mai 2020
- Nächstem Tutorien: 25. - 29. Mai 2020