Lichttechnisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie
Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
M. Sc. Benjamin Fritz
M. Sc. Henning Mescher
Engesserstraße 13
76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik
Musterlösung zum 2. Übungsblatt
Besprechung: 14. Mai 2020

1. **Unschärferelation**

a) Erläutern Sie den Begriff der *Unschärferelation*.

Die Unschärferelation macht die Aussage, dass eine gleichzeitige, beliebig genaue Messung so genannter KOMPLEMENTÄRER OBSERVABLEN, *also z.B. von Ort und Impuls, unmöglich ist. In der Quantenmechanik wird dieses Prinzip für alle physikalischen Systeme als gültig angenommen. In unserem Bild der Materiewellen ist das Auftreten eines solchen Zusammenhangs eigentlich nicht verwunderlich. Stellt man sich einen kurzen Wellenzug vor, so besteht dieser nicht mehr aus einer einzigen ebenen Welle, die eine wohldefinierte Wellenzahl und damit einen wohldefinierten Impuls hat. Wir benötigen ebene Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen Δk, die im Bereich des endlichen Pulses Δx konstruktiv und sonst destruktiv interferieren. Es ergibt sich, dass das Produkt dieser Unschärfe gerade $\frac{1}{2}$ ist, also $\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}$, mit der Beziehung $p = \hbar k$ folgt so $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. Eine Messung kann niemals genauer sein als dieses Produkt der Standardabweichungen.*

b) Mit Hilfe einer neuen Torlinientechnik können beim Fußball die Geschwindigkeit und Position des Balls gleichzeitig gemessen werden. Die Geschwindigkeit des Balls (m = 0,5 kg) kann dabei sogar auf $0,001\ \frac{m}{s}$ genau bestimmt werden. Führt die Unschärferelation zu einer Einschränkung der Messgenauigkeit bei der Ortsbestimmung des Balls?

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = 0,0005 \frac{kg \cdot m}{s} \tag{1}$$

Mit der Heisenbergschen Unschärferelation folgt:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta p} = 1,055 \cdot 10^{-31} m \tag{2}$$

Damit verhält sich die Messungenauigkeit der Ballposition zum Durchmesser des Fußballs wie ein Millimeter zur Ausdehnung des beobachtbaren Universums - praktisch führt die Unschärferelation also zu keinerlei Einschränkung, da eine solche Messgenauigkeit bei weitem nicht erreicht werden kann.

2. **Photoeffekt**

a) In welchem Wellenlängenbereich liegt der sichtbare Teil des Spektrums elektromagnetischer Strahlung?

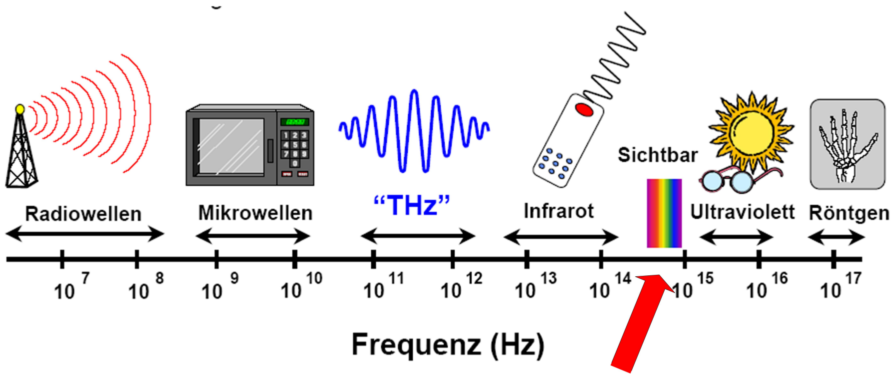

Abb. 1: Spektrum elektromagnetischer Strahlung

Der sichtbare Bereich des Spektrums reicht etwa von der Wellenlänge 400 nm (7,5·10^{14} *Hz, violettes Licht) bis 800 nm (3,75·10*^{14} *Hz, rotes Licht). Die Empfindlichkeit des Auges ist allerdings von Mensch zu Mensch unterschiedlich, weswegen diese Grenzen nur als Mittelwerte zu verstehen sind.*

b) Wie groß sind die Frequenzen (in Hertz) und Energiequanten (in Elektronenvolt bzw. Joule) einer Rundfunkwelle (λ=1000 m), einer UKW-Welle (λ=3 m) und weicher Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8}$ m)?

Die Wellenlänge λ *und die Frequenz* ν *sind verknüpft über* $\lambda\nu = c$*, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Energie eines Quants der Strahlung, also eines Photons, ergibt sich zu* $W = h\nu$*. Wir erhalten also:*

- Rundfunkwelle (λ=1000 m) $\rightarrow \nu = 300$ kHz,
  $W = 1,99 \cdot 10^{-28}$ J $= 1,24 \cdot 10^{-9}$ eV
- UKW-Welle (λ=3 m) $\rightarrow \nu = 100$ MHz,
  $W = 6,63 \cdot 10^{-26}$ J $= 4,14 \cdot 10^{-7}$ eV
- weiche Röntgenstrahlung (λ=10^{-8} m) $\rightarrow \nu = 3 \cdot 10^{+16}$ Hz,
  $W = 1,99 \cdot 10^{-17}$ J $= 124,21$ eV

c) Eine Photozelle enthält eine Kaliumkathode ($W_a = 2,25$ eV). Berechnen Sie die Grenzfrequenz für das Auftreten des Photoeffekts. Welche Geschwindigkeit haben die schnellsten Elektronen bei Beleuchtung mit UV-Licht ($\lambda = 100$ nm)? Wird die Geschwindigkeit bei Strahlung mit halber Wellenlänge doppelt so groß?

Die Grenzfrequenz ν_G *des Photoeffekts ist diejenige Frequenz, bei der die Energie der einfallenden Strahlungsquanten gerade ausreicht, um einem Elektron die Austrittsarbeit aus dem jeweiligen Material zu übertragen, also* $W_{Photon} = h\nu_G \overset{!}{=} W_A$*. Daraus folgt für Kalium* $\nu_G = W_A/h = 5,44 \cdot 10^{14}$ Hz $\rightarrow \lambda_G = 551,5$ nm. *Da das*

UV-Licht über eine kürzere Wellenlänge, also eine höhere Frequenz als die Grenzfrequenz verfügt, tragen die einzelnen Quanten mehr Energie, als zum Herausschlagen der Elektronen aus dem Kalium nötig. Diese kann zum Beispiel in kinetische Energie des Elektrons umgesetzt werden.Wenn wir davon ausgehen, dass das Photon seine gesamte Energie auf das Elektron überträgt und dieses sich vor dem Stoß in Ruhe befindet, folgt aus dem Energieerhaltungssatz:

$$W_{Photon} = h\nu \stackrel{!}{=} W_A + W_{kin,Elektron} = W_A + \frac{1}{2} m_e v_{max}^2 \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die maximale Geschwindigkeit v_{max}:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\nu - W_A\right)} = 1,89 \ \cdot 10^6 \text{ m/s} \tag{4}$$

Wie man sieht handelt es sich um einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen v_{max} und ν, damit wächst die Geschwindigkeit nicht linear mit der Frequenz der einfallenden Photonen. Eine nichtrelativistische Rechnung war hier durchaus noch erlaubt, da die Geschwindigkeit v_{max} weniger als 1% der Lichtgeschwindigkeit beträgt.

d) Wie groß muss die angelegte Spannung U sein, damit die aus einer Magnesium-Kathode ($W_a = 3,7$ eV) durch Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 302$ nm herausgeschlagenen Elektronen gerade nicht die Anode erreichen?

Wenn zwischen zwei Punkten eine Spannung U angelegt wird, müssen Elektronen als Träger einer Elementarladung die Energie $W_{pot} = eU$ aufbringen, um in Feldrichtung von einem Punkt zum anderen zu gelangen. In unserem Fall kann diese Energie durch die kinetische Energie des Elektrons aufgebracht werden, also $W_{pot} = eU \stackrel{!}{=} W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2$. Wieder liefern die einfallenden Photonen die Energie, die maximale kinetische Energie ist also $W_{kin} = W_{Photon} - W_A = 0,41$ eV. Da nun $U \stackrel{!}{=} W_{kin}/e$ sein muss, folgt für die Spannung $U = 0,41\ V$.

e) Zur richtigen Belichtung eines Films mit Silberkörnern benötigt man bei $\lambda = 550$ nm etwa 10^{-6} J/m^2. Wie viele Photonen sind für 1 mm^2 lichtempfindliche Fläche nötig?

Ein Lichtquant bei 550nm trägt $W_{Photon} = hc/\lambda = 3,61 \ \cdot 10^{-19}$ J Energie. Auf die Fläche A von 1 mm^2 benötigt man für die Belichtungsdosis $S = 10^{-6}$ J/m^2 also $n = S \cdot A/W_{Photon} \approx 2,77 \ \cdot 10^6$ Photonen.

3. **Doppelspalt-Experiment**

Laserlicht der Wellenlänge 633 nm fällt senkrecht auf einen Doppelspalt mit dem Spaltmittenabstand von $d = 0,30$ mm (siehe Abb. 2). Der Einfluss der Einzelspalte ist vernachlässigbar. Parallel zum Doppelspalt befindet sich im Abstand $L = 1,00$ m ein ebener Schirm.

a) Was ist auf dem Schirm zu beobachten? Erläutern Sie, wie das Phänomen entsteht.

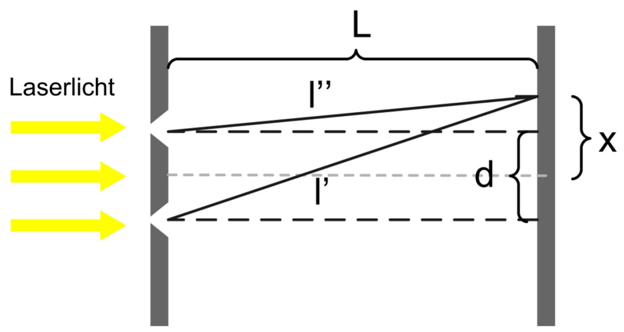

Abb. 2: Skizze zum Doppelspalt-Experiment

Man beobachtet ein System von hellen und dunklen Streifen - ein Interferenzmuster - auf dem Schirm. In den beiden Spalten des Doppelspaltes entstehen Elementarwellen. Diese Wellen interferieren miteinander. Der Gangunterschied zwischen den beiden Wellen bestimmt, ob es im Auftreffpunkt zu Helligkeit (konstruktive Interferenz) oder Dunkelheit (destruktive Interferenz) kommt.
Konstruktive Interferenz ergibt sich, wenn der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Destruktive Interferenz entsteht bei einem ungeradzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge.

b) Welchen Abstand x haben benachbarte Maxima auf dem Schirm?

Für konstruktive Interferenz müssen sich die Laufwege der Wellen, die von den beiden Spalten aus starten (l' und l''), gerade um ein ganzahliges Vielfaches der Wellenlänge unterscheiden (oder gleich sein). Damit muss $l' - l'' = m\lambda$ sein, wobei m eine ganze Zahl ist. Die Strecken l' und l'' können wir mit dem Satz des Pythogoras und den gegebenen Größen d, x und L ausdrücken, und kommen zu:

$$l' = \sqrt{L^2 + (x + d/2)^2} \quad (5)$$

$$l'' = \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2} \quad (6)$$

Der Gesamtausdruck lautet also:

$$m\lambda = l' - l'' = \sqrt{L^2 + (x + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2} \quad (7)$$

Nun gilt es die Wurzelausdrücke zu vereinfachen. Dazu ziehen wir zunächst den Ausdruck L^2 vor die Wurzel und erhalten für den ersten Teil:

$$l' = L\sqrt{1 + (x + d/2)^2 / L^2} = L\sqrt{1 + x^2/L^2 + xd/L^2 + \underbrace{d^2/(4L^2)}_{\textit{sehr klein}}} \quad (8)$$

Nun kann man den Wurzelterm in eine Taylorreihe um $x = 0$ entwickeln, da nach Aufgabenstellung $(x^2 + xd)/L^2 << 1$ brechen wir die Reihenentwicklung nach dem *ersten Glied ab. Die Taylorentwicklung einer Funktion $f(x)$ um $x = x_0$ ergab sich zu:*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^{\nu} \tag{9}$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} l'(x) &= L(1 + f'(x = 0)x) = L\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1 + x^2/L^2 + xd/L^2}\bigg|_{x=0} x\right) \\ &= L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2/L^2 + xd/L^2}}\left(\frac{2x}{L^2} + \frac{d}{L^2}\right)\bigg|_{x=0} x\right) = L + \frac{dx}{2L} \end{aligned}$$

Für den Teil l'' kommen wir auf gleiche Art und Weise zu $l''(x) = L - \frac{dx}{2L}$ und folglich gilt für den gesuchten Ausdruck:

$$m\lambda = l' - l'' = \frac{dx}{L} \to x = \frac{m\lambda L}{d} \tag{10}$$

Nun muss nur noch der Abstand zweier benachbarter Maxima bestimmt werden. Wenn das erste Maximum die Ordnung m (z.B. 3) hat, hat das nächste die Ordnung $m + 1$ (z.B. 4). Damit folgt $x_1 = m\lambda L/d$, $x_2 = (m + 1)\lambda L/d$ und für den Abstand $\Delta x = \lambda L/d$.

$$\Rightarrow \Delta x = 2,11 \text{ mm}$$

c) Nun fällt Licht eines anderen Lasers auf die gleiche Anordnung, wobei die beiden Maxima 2. Ordnung einen Abstand von $6,8$ mm besitzen. Berechnen Sie die Wellenlänge des einfallenden Lichtes.

Wir lösen die Formel aus der letzten Teilaufgabe nach λ auf und bekommen mit $x(m = 2) = \frac{6{,}8 \ mm}{2} = 3,4$ mm und $m = 2$:

$$\lambda = \frac{d \cdot x(m = 2)}{m \cdot L} = 510 \text{ nm}$$

4. Schrödingergleichung, Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte

a) Vergleichen Sie die Schrödingergleichung für $V(x,\ t) = 0$ mit der Wellengleichung des elektrischen Feldes. Welches sind die wichtigsten Gemeinsamkeiten, wo unterscheiden sich die beiden?

Die Wellengleichung für das elektrische Feld ergibt sich zu:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,\ t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{11}$$

Die SCHRÖDINGER*gleichung für ein verschwindendes Potential dagegen lautet:*

$$j\hbar\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{12}$$

Zunächst ergibt sich als formaler Unterschied, dass die Wellengleichung auch die Zeit in der zweiten Ableitung enthält. Dieser Umstand führt, obwohl beide Gleichungen durch ebene Wellen ($g(x,\ t) = A\exp j\left(k_x x - \omega t\right)$) gelöst werden, zu einer sich unterscheidenden Beziehung zwischen der Wellenzahl k_x und der Kreisfrequenz ω. Eine solche Beziehung nennt man Dispersionsrelation, sie reflektiert den unterschiedlichen Charakter der Photonen, deren Zeitentwicklung als Teile eines elektrischen Feldes die Wellengleichung enthält, und den Elektronen, deren zeitliche Änderung durch die Schrödingergleichung ausgedrückt wird. Des Weiteren benutzt man zwar für beide Gleichungen komplexe Lösungsansätze, im Falle der Wellengleichung ist das aber nur ein Rechentrick. Um Aussagen über das elektrische Feld als Messgröße zu machen, muss man wieder in die Welt der reellen Funktionen gelangen. Die Lösungen der Schrödingergleichung dagegen sind echt komplexe Funktionen. Das ist gestattet, weil die Wellenfunktion an sich keinen Messwert darstellt und somit nicht reell sein muss.

b) Zeigen Sie, dass ebene Wellen Lösungen der SCHRÖDINGERgleichung für ein zeitlich konstantes Potential sind.

Eine ebene Welle wird beschrieben durch $g(x,\ t) = A\exp j\left(k_x x - \omega t\right)$. Wobei A die Amplitude der Welle, k_x die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz sind. Die Schrödingergleichung ist definiert als:

$$j\hbar\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,\ t) \tag{13}$$

Setzt man nun die ebene Welle ein und wertet die Ableitungen aus, so erhält man:

$$\hbar\omega A\exp j\left(k_x x - \omega t\right) = \left(\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + V(x)\right)A\exp j\left(k_x x - \omega t\right), \tag{14}$$

was offenbar gilt, falls:

$$\hbar\omega = \left(\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + V(x)\right). \tag{15}$$

Hier sei darauf hingewiesen, dass auf der linken Seite der Ausdruck $W = \hbar\omega$ steht, der nach de-Broglie die Energie mit der Kreisfrequenz verknüpft. Rechts finden wir die potentielle Energie plus einen Term, den wir über die zweite de-Broglie-Beziehung, $p = \hbar k$, und dem klassischen Zusammenhang $p = mv$ umformen können zu:

$$\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = W_{kin,\ klassisch} \tag{16}$$

Offensichtlich korrespondiert dieser Term also mit der klassischen Beschreibung der kinetischen Energie.

c) Zeigen Sie, dass eine Überlagerung mehrerer ebener Wellen, die Lösungen der SGL sind, diese ebenfalls löst.

Wir definieren eine Überlagerung von ebenen Wellen als $s(x,\ t) = ag_1(x,\ t) + bg_2(x,\ t)$*, wobei* a *und* b *Konstanten und* g_1 *und* g_2 *die ebenen Wellen sind. Einsetzen dieser Überlagerung in die linke Seite der Schrödingergleichung liefert*

$$j\hbar\frac{\partial s(x,\ t)}{\partial t} = j\hbar\frac{\partial(ag_1(x,\ t) + bg_2(x,\ t))}{\partial t} \tag{17}$$

Mit der Linearität von $\frac{\partial}{\partial t}$ *folgt*

$$j\hbar\frac{\partial(ag_1(x,\ t) + bg_2(x,\ t))}{\partial t} = aj\hbar\frac{\partial(g_1(x,\ t))}{\partial t} + bj\hbar\frac{\partial(g_2(x,\ t))}{\partial t}. \tag{18}$$

Da g_1 *und* g_2 *die Schrödingergleichung per Definition lösen, folgt*

$$\begin{aligned} &aj\hbar\frac{\partial(g_1(x,\ t))}{\partial t} + bj\hbar\frac{\partial(g_2(x,\ t))}{\partial t} \\ &= a\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)g_1(x,\ t) + b\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)g_2(x,\ t) \end{aligned} \tag{19}$$

und mit der Linearität von $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *schließlich*

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)g_1(x,\ t) + b\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)g_2(x,\ t) \\ = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)(ag_1(x,\ t) + bg_2(x,\ t)) \\ \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)s(x,\ t). \end{aligned} \tag{20}$$

Insgesamt folgt aus den Gleichungen 17 bis 20 also

$$j\hbar\frac{\partial s(x,\ t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)s(x,\ t), \tag{21}$$

das heißt $s(x,\ t)$ *löst die Schrödingergleichung ebenfalls.*