

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M.Sc. Henning Mescher

M.Sc. Benjamin Fritz

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

Musterlösung zum 3. Übungsblatt

19.05.2020

1. Das freie Elektron

- a) In einem Elektronenmikroskop werden Elektronen mit einer de-Broglie Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11}$ m verwendet. Welche kinetische Energie besitzt ein einzelnes Elektron? Die nicht-relativistische Näherung sei gültig!

$$W = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_e} = 2,41 \text{ fJ} = 15,04 \text{ keV}$$

- b) Gegeben sind folgende Dispersionsrelationen:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{Photon}}(k) &= ck \\ \omega_{\text{Elektron}}(k) &= \frac{\hbar k^2}{2m_e}\end{aligned}$$

Berechnen sie die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und die Gruppengeschwindigkeit v_g in beiden Fällen.

Für Photonen ergibt sich

$$v_{\text{ph}} = v_g = c,$$

für Elektronen folgt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m_e} \text{ und } v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m_e}$$

- c) Freie Elektronen können beschrieben werden als ebene Welle,

$$\psi(x, t) = A \exp(j(kx - \omega t)).$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Impulsoperators den Impulserwartungswert $\langle \hat{p}(t) \rangle$ und das Impulserwartungswertquadrat $\langle \hat{p}^2(t) \rangle$ für ein freies Elektron. Bestimmen Sie damit die Unschärfe des Impulses $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2}$. Was folgt daraus über die Unschärferelation für die Ortsunschärfe Δx ?

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}(t) \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{p} \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) (-j\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) (-j^2 \hbar k) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar k \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2(t) \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \hat{p}^2 \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{+j(kx+\omega t)} \cdot \left(-j\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \cdot A e^{-j(kx+\omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{+j(kx+\omega t)} \cdot \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \cdot A e^{-j(kx+\omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{+j(kx+\omega t)} \cdot (-\hbar^2 (-jk)^2) \cdot A e^{-j(kx+\omega t)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar^2 k^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \\
&= \hbar^2 k^2
\end{aligned}$$

Mit den angegebenen Werten folgt unmittelbar:

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2(t) \rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2} = 0$$

Es gilt die Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Damit folgt

$$\Delta x \rightarrow \infty$$

Da der Impuls exakt bestimmt ist, ist der Ort also maximal unbestimmt.

2. Parabolisches Potential

Komplexe Potentiale in Quantenbauelementen können in erster Näherung häufig durch parabolische Funktionen angenähert werden. Ein entsprechender Ausdruck lautet $V(x) =$

$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. Man erkennt die Ähnlichkeiten zur potentiellen Energie eines klassischen harmonischen Oszillators mit der Federkonstanten $k = m\omega^2$, $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}k\hat{x}^2$, weswegen man hier von einem *quantenmechanischen harmonischen Oszillator* spricht.

- a) Recherchieren Sie, wie die Funktionen ψ_n aussehen, die die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das parabolischen Potential lösen. Wie lautet die Formel für die zugehörigen Eigenwerte W_n ?

Für die Eigenwerte des parabolischen Potentials findet man $W_n = \hbar\omega (n + 1/2)$, hier ist für die Quantenzahl n Null oder eine natürliche Zahl einzusetzen. Die zugehörigen Eigenfunktionen ergeben sich zu:

$$\psi_n(x) = \frac{c_n}{\sqrt{b}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad (1)$$

Wobei $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ist und die c_n Normierungskonstanten sind. Die H_n stehen für die Hermiteschen Polynome, die nach der Regel $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$ gebildet werden. In der Verwendung der Hermiteschen Polynome liegt auch ein Grund, warum die Zustände für den harmonischen Oszillator ab dem Zustand 0 gezählt werden - es wäre verwirrend, den ersten Zustand mit dem Hermiteschen Polynom H_0 mit dem Index 1 zu versehen. Damit unterscheidet sich der harmonische Oszillator in der Nummerierung der Zustände vom unendlichen Potentialtopf.

- b) Wie unterscheiden sich die Lösungen des parabolischen Potentials von denen des unendlich hohen Potentialtopfs? Zählen Sie zudem die Gemeinsamkeiten auf.

In beiden Fällen erhalten wir diskrete Lösungen für die Energiewerte, wobei der niedrigste Zustand eine Energie größer Null hat. Ebenso wechseln sich gerade und ungerade Lösungen ab, wobei der Grundzustand eine gerade Lösung ist. Unterschiedlich sind die Abstände der Energieniveaus, beim harmonischen Oszillator erhalten wir äquidistante, beim unendlichen Potentialtopf nimmt der Abstand quadratisch zu. Außerdem weisen die Wellenfunktionen im unendlichen Potentialtopf an dessen Grenzen einen Knoten auf.

- c) Zeigen Sie, dass $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ die SGL lösen.

H_0 :

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_0 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi_0 \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \left(\frac{c_0}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{b^2} \right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \left(\frac{c_0}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

...

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_0 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{x^2}{b^4} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \left(\frac{c_0}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2 \omega^2 x^2}{\hbar^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \left(\frac{c_0}{\sqrt{b}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \hbar \omega}_{=W_0} \psi_0
\end{aligned} \tag{3}$$

H_1 :

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_1 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi_1 \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \left(\frac{c_1}{\sqrt{b}} 2 \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{b}} 2 \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_1 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left(x e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \frac{2c_1}{\sqrt{b^3}} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_1 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2b^2}} - \frac{x^2}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \frac{2c_1}{\sqrt{b^3}} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_1 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{x}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} - \frac{2x}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} + \frac{x^3}{b^4} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right) \frac{2c_1}{\sqrt{b^3}} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_1 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{b^2} - \frac{2}{b^2} + \frac{x^2}{b^4} \right) \underbrace{\left(x e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \right)}_{=\psi_1} \frac{2c_1}{\sqrt{b^3}} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi_1 \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{3}{b^2} + \frac{x^2}{b^4} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi_1 \\
&= \left(\frac{\hbar^2 \cdot 3m\omega}{2m\hbar} - \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2 x^2}{2m\hbar^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi_1 \\
&= \underbrace{\frac{3}{2} \hbar \omega}_{=W_1} \psi_1
\end{aligned} \tag{4}$$

- d) Der normierte Grundzustand des eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist

$$\psi_0(x) = \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \tag{5}$$

mit der Konstanten $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie den Erwartungswert für die kinetische Energie des harmonischen Oszillators im Grundzustand.

Nützliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{6}$$

Die kinetische Energie ergibt sich zu $W_{kin} = \frac{p^2}{2m}$. In Operatorschreibweise setzen wir den Impulsoperator ein, also $\hat{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, somit erhalten wir für den Operator der kinetischen Energie:

$$\hat{W}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (7)$$

Für den Erwartungswert der kinetischen Energie erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \hat{W}_{kin} \rangle &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{W} \psi_0 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_0 dx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{W} \psi_0 dx \quad (\text{da } \psi_0 \text{ bereits normiert gegeben ist}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{b^{1/2} \sqrt{\pi^{1/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) + \frac{x^2}{b^4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{b^2} \sqrt{b^2\pi} + \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2\pi}\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{1}{2b^2} \sqrt{b^2\pi} = \frac{\hbar^2}{4mb^2} = \frac{1}{4} \hbar\omega \end{aligned} \quad (8)$$

- e) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis des letzten Aufgabenteils den Erwartungswert der potentiellen Energie des Grundzustands und erläutern Sie ihr Vorgehen.

Die Gesamtenergie des Grundzustands des harmonischen Oszillators ist $W_T = \frac{1}{2} \hbar\omega$. Die Gesamtenergie berechnet sich aus der Summe der potentiellen und kinetischen Energie, gleiches gilt auch für die Erwartungswerte. Mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe erhalten wir $\langle \hat{W}_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \hbar\omega$.

3. Potentialtopf mit endlich hohen Wänden

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{für } x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (9)$$

eines endlichen Potentialtopfes der Tiefe V_0 .

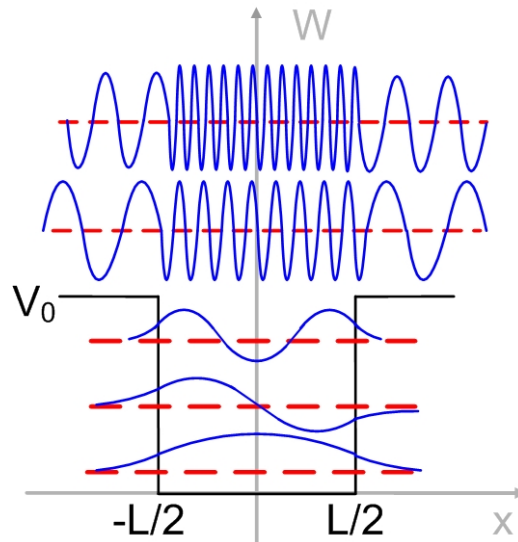


Abb. 1: Potentialverlauf und Eigenfunktionen

- a) Skizzieren Sie $V(x)$.

Das Potential ist in Abbildung 1 dargestellt.

- b) Zeichnen sie die zugehörigen Eigenfunktionen für $W < V_0$ und zwei Eigenfunktionen für $W > V_0$ ein. Gehen Sie davon aus, dass es genau drei gebundene Eigenzustände gibt. Worin unterscheiden sich die Wellenfunktionen für $W < V_0$ und $W > V_0$ qualitativ?

Die Lösungen mit $W > V_0$ haben die Form von ebenen Wellen und sind daher unendlich ausgedehnt. Außerdem gibt es hier zu jeder Energie eine Lösung. Die gebundenen Lösungen dagegen fallen in der Barriere exponentiell ab, sind also im Quantentopf lokalisiert, man vergleiche Abbildung 1. Zudem ist ihr Energiespektrum diskret.

- c) Welche Gleichung liefert die Lösung für die elektronischen Zustände in einem solchen System mit $W < V_0$? Machen Sie Lösungsansätze für die drei Bereiche mit konstantem Potential und stellen Sie die zur Lösung nötigen Rand- und Nebenbedingungen auf. Setzen Sie die Ansätze in die erhaltenen Bedingungen ein. Das explizite Lösen dieses Gleichungssystems ist **nicht** verlangt!

Die stationäre Schrödingergleichung liefert die Energieeigenwerte dieses Problems. In unserem Fall zerfällt das Problem in drei Einzelprobleme mit jeweils konstantem Potential. Damit ergibt sich:

$$\text{Gebiet 1: } \psi_1(x) = A \exp(-\kappa_1 x) + B \exp(\kappa_1 x)$$

$$\text{Gebiet 2: } \psi_2(x) = C \exp(jk_2 x) + D \exp(-jk_2 x)$$

$$\text{Gebiet 3: } \psi_3(x) = E \exp(-\kappa_3 x) + F \exp(\kappa_3 x)$$

Hier wurde schon ausgenutzt, dass die Wellenzahlen in der Barriere für $W < V_0$ imaginär sind und so die oszillierenden komplexen Exponentialfunktionen in reel-

le Exponentialfunktionen verwandeln. Daran knüpft die Forderung an, dass in den Gebieten 1 und 3 die Lösungen exponentiell abfallen müssen, weil sonst die Wellenfunktionen weit weg vom Topf divergieren. Wir folgern $A = F = 0$. Die restlichen vier Variablen können wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen an den Übergängen 1-2 und 2-3 bestimmen.

$$\text{Nebenbedingung 1: } \psi_1(x = -L/2) = \psi_2(x = -L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 2: } \psi'_1(x = -L/2) = \psi'_2(x = -L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 3: } \psi_2(x = +L/2) = \psi_3(x = +L/2)$$

$$\text{Nebenbedingung 4: } \psi'_2(x = +L/2) = \psi'_3(x = +L/2)$$

Damit haben wir vier unabhängige Nebenbedingungen, um vier Konstanten zu bestimmen, das Problem ist lösbar. Einsetzen liefert weiterhin:

$$1: \quad B \exp(-\kappa_1 L/2) = D \exp(+jk_2 L/2) + C \exp(-jk_2 L/2)$$

$$2: \quad B(\kappa_1) \exp(-\kappa_1 L/2) = D(-jk_2) \exp(+jk_2 L/2) + C(jk_2) \exp(-jk_2 L/2)$$

$$3: \quad D \exp(-jk_2 L/2) + C \exp(+jk_2 L/2) = E \exp(-\kappa_3 L/2)$$

$$4: \quad D(-jk_2) \exp(-jk_2 L/2) + C(jk_2) \exp(+jk_2 L/2) = E(-\kappa_3) \exp(-\kappa_3 L/2)$$

- d) Zeigen und erklären Sie anhand einer Skizze, wie sich das Aussehen der Lösungen verändert, wenn $V_0 \rightarrow \infty$.

Mit unendlich hohen Wänden wird der endliche zum unendlichen Potentialtopf. Dann ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Barrieren Null, die Wellenfunktion hat an der Grenze einen Knoten. Natürlich gibt es im unendlichen Potentialtopf auch keine ungebundenen Lösungen.

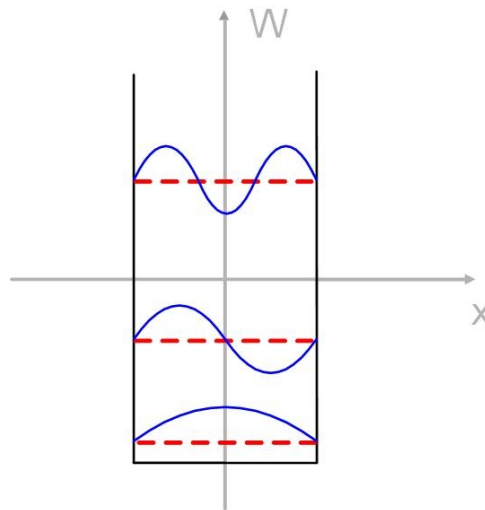


Abb. 2: Unendlicher Potentialtopf

4. Stückweise konstantes Potential

Gegeben sei das Potential:

$$V_0(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 & \text{Bereich I} \\ 0 & : 0 \leq x < a & \text{Bereich II} \\ V_0 & : a \leq x < b & \text{Bereich III} \\ \infty & : x \geq b & \text{Bereich IV} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$ und $b > 0$.

a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf!

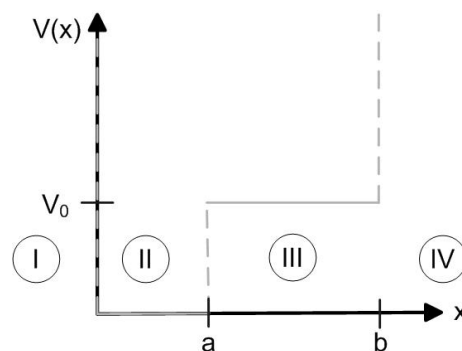


Abb. 3: Stückweise konstantes Potential

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte eines Teilchens im Potential! Gehen Sie von Energien $W > V_0$ aus. Vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich. Die resultierende Gleichung ist nur noch numerisch lösbar.

In den Bereichen I und IV muss die Wellenfunktion wegen des unendlichen Potentials Null sein. In den beiden anderen Bereichen stellen wir einen Ansatz mit ebenen

Wellen auf:

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ae^{jk_{\text{II}}x} + Be^{-jk_{\text{II}}x} \text{ mit } k_{\text{II}} = \sqrt{2mW/\hbar^2} \quad (10)$$

$$\psi_{\text{III}}(x) = Ce^{jk_{\text{III}}x} + De^{-jk_{\text{III}}x} \text{ mit } k_{\text{III}} = \sqrt{2m(W - V_0)/\hbar^2} \quad (11)$$

Für den Bereich II folgt aus der Randbedingung $\psi_{\text{II}}(0) = 0$:

$$\psi_{\text{II}}(0) = Ae^{jk_{\text{II}}0} + Be^{-jk_{\text{II}}0} = A + B = 0 \quad (12)$$

und somit

$$\psi_{\text{II}}(x) = A(e^{jk_{\text{II}}x} - e^{-jk_{\text{II}}x}) = \underbrace{2jA}_{=K_{\text{II}}} \sin k_{\text{II}}x. \quad (13)$$

Analog erhalten wir für den Bereich III:

$$\psi_{\text{III}}(b) = Ce^{jk_{\text{III}}(b)} + De^{-jk_{\text{III}}(b)} = 0 \quad (14)$$

$$D = -Ce^{j2k_{\text{III}}(b)} \quad (15)$$

Einsetzen und das Ausklammern von $e^{jk_{\text{III}}(b)}$ ergibt:

$$\psi_{\text{III}}(x) = C(e^{jk_{\text{III}}(x)} - e^{j2k_{\text{III}}(b)}e^{-jk_{\text{III}}(x)}) \quad (16)$$

$$= Ce^{jk_{\text{III}}(b)}(e^{jk_{\text{III}}(x-b)} - e^{-jk_{\text{III}}(x-b)}) \quad (17)$$

$$= \underbrace{2jCe^{jk_{\text{III}}(b)}}_{=K_{\text{III}}} \sin k_{\text{III}}(x - b). \quad (18)$$

Den Ausdruck für die Gesamtenergie erhält man aus den Stetigkeitsbedingungen der Wellenfunktion an der Stelle $x = a$:

$$\psi_{\text{II}}(a) = \psi_{\text{III}}(a) \quad (19)$$

$$\psi'_{\text{II}}(a) = \psi'_{\text{III}}(a) \quad (20)$$

also

$$K_{\text{II}} \sin(k_{\text{II}}a) = K_{\text{III}} \sin(k_{\text{III}}(a - b)) \quad (21)$$

$$K_{\text{II}} k_{\text{II}} \cos(k_{\text{II}}a) = K_{\text{III}} k_{\text{III}} \cos(k_{\text{III}}(a - b)) \quad (22)$$

Die Konstanten K_i können eliminiert werden, indem wir Gleichung 21 durch Gleichung 22 dividieren:

$$\frac{1}{k_{\text{II}}} \tan(k_{\text{II}}a) = \frac{1}{k_{\text{III}}} \tan(k_{\text{III}}(a - b)) \quad (23)$$

$$\frac{k_{\text{II}}}{k_{\text{III}}} = \frac{\tan(k_{\text{II}}a)}{\tan(k_{\text{III}}(a - b))} \quad (24)$$

$$\sqrt{\frac{W}{W - V_0}} = \frac{\tan\left(\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a\right)}{\tan\left(\sqrt{\frac{2m(W - V_0)}{\hbar^2}}(a - b)\right)} \quad (25)$$

Dieser implizite Ausdruck enthält die Eigen-Energien des Problems, kann aber analytisch nicht gelöst werden.