

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M. Sc. Benjamin Fritz

M. Sc. Henning Mescher

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

6. Übungsblatt

Besprechung: Übung 19. Juni 2020

1. Bloch-Oszillationen

Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2}(1 + \cos ka)$ mit $\Delta W = 2 \text{ eV}$ beschreiben.

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die effektive Masse m_{eff} des Elektrons bei $k = 0$, $k = \frac{\pi}{a}$ und $k = \frac{\pi}{2a}$ im angegebenen Kristallpotential.
- Skizzieren Sie $W(k)$, $v(k)$ und $m_{\text{eff}}(k)$.
- Nun werde ein elektrisches Feld angelegt, das auf die Elektronen eine Kraft F ausübt. Zeigen Sie, dass hiernach die Elektronen-Geschwindigkeit und der Elektronen-Ort zeitlich oszillieren (Bloch-Oszillationen).
- Warum fließt dann ein Strom bei angelegtem elektrischen Feld? Berechnen Sie dazu aus der Beweglichkeit $\mu = 1300 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ der Elektronen in Silizium die mittlere Streuzeit τ , verwenden Sie als Abschätzung für die effektive Masse der Elektronen den Wert $0.32 m_0$. Vergleichen Sie diese Streuzeit mit einer Bloch-Oszillations-Periode für eine Feldstärke von 10^6 V/m .

Benutzen Sie:

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$

Die Gitterkonstante beträgt $a_{\text{Si}} = 5.43 \text{ \AA}$.

2. Kronig-Penney-Modell

Bisher haben wir nur qualitative Aussagen über das Entstehen der Bandstruktur gemacht. Eine Möglichkeit, quantitative Aussagen zu machen, bietet das Kronig-Penney-Modell. Hier wird das periodische Potential im eindimensionalen Kristall durch ein Rechteckprofil angenähert (Abbildung 1).

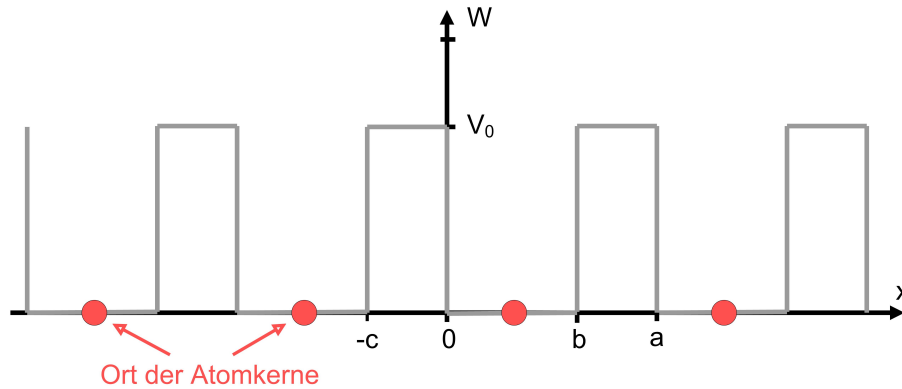


Abb. 1: Potentialverlauf im Kronig-Penney-Modell

- Geben Sie den Ansatz für ein Elektron als Blochwelle im Kristall an. Welche Eigenschaften haben die Bestandteile des Bloch-Ansatzes?
- Nun betrachten Sie eine Einheitszelle des Kristalls ($-c \leq x \leq b$). Setzen Sie den Ansatz aus a) für die beiden Bereiche konstanten Potentials in die Schrödingergleichung ein. Leiten Sie ab, vereinfachen Sie die Gleichung und führen Sie die Abkürzungen $\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)}$ und $\kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$ ein.
- Finden Sie in den beiden Gebieten Lösungsansätze für die Differentialgleichungen.
- Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der in den im letzten Aufgabenteil gefundenen Lösungen auftretenden Konstanten mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen und der Periodizität der Bloch-Funktionen auf.
- Das aus den Randbedingungen folgende Gleichungssystem ist wie üblich nur lösbar, falls seine Determinante Δ verschwindet. In diesem Fall ergibt sich:

$$\Delta = j8\kappa_1\kappa_2 e^{jk} \left(\cos(ka) - \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{2\kappa_1\kappa_2} \sinh(\kappa_2 c) \sin(\kappa_1 b) - \cosh(\kappa_2 c) \cos(\kappa_1 b) \right)$$

Werten Sie die Bedingung $\Delta = 0$ aus, indem Sie nach k auflösen und zusätzlich für κ_1 und κ_2 die mit V_0 erweiterten Ausdrücke $\kappa_1 = \sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{W}{V_0}\right)}$ und $\kappa_2 = \sqrt{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{V_0}\right)\right)}$ einsetzen. Sie sollten am Ende eine Gleichung der Form $k = \frac{1}{a} \arccos\left(L\left(\frac{W}{V_0}\right)\right)$ erhalten, wobei L eine Funktion ist.

- f) In Abbildung 2 ist die Funktion $L\left(\frac{W}{V_0}\right)$ für ein Verhältnis der Längen c und b von $c/b = 0.1$ und für $\frac{2mV_0b^2}{4\hbar^2} = 36$ (hiermit wird die Höhe des Potentials V_0 festgelegt) aufgetragen. Beachten Sie, dass nicht L über W/V_0 aufgetragen ist, sondern W/V_0 über L . Mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Aufgabenteil können Sie nun in der Abbildung die Bildung von Bändern und Bandlücken visualisieren.

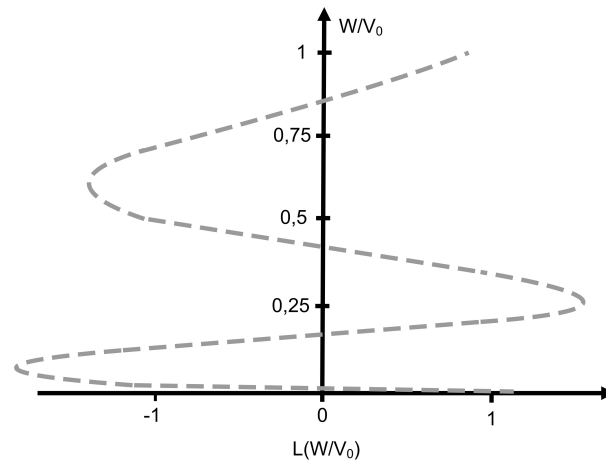


Abb. 2: Zeichnerische Lösung zum Kronig-Penney-Modell