

Bloch-Oszillationen & Kronig-Penney-Modell

6. Übung Optik und Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2020

Benjamin Fritz, Henning Mescher



Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag	Pfingstmontag	
2			V11 FE (8)	V17 FE (14)
3				Ü8 FE (7), Ausgabe T7
4			V12 FE (9)	
5		V4 FE (1)	U5 FE (4), Ausgabe T3	
6				Tut 6
7		V5 FE (2), Ausgabe U2		V18 FE (15)
8				
9			V13 FE (10)	V19 FE (16), (Institutsführung)
10			Ausgabe Ü6/T4	Ausgabe Ü9/T8
11		Tut 1	Fronleichnam	
12		V6 FE (3), Ausgabe Ü3	Brückentag	
13				Tut 7
14		Ü2 FE (1)		V20 FE (17)
15		V7 FE (4), Ausgabe T2	Tut 3	
16			V14 FE (11)	
17				Ü9 FE (8), Ausgabe U10
18				
19			Ü6 FE (5), Ausgabe Ü7/T5	
20	VL-Beginn	Ausgabe Ü4		Tut 8
21	V1 Optik (1), Ausgabe Ü1	Christi Himmelfahrt		V21 FE (18)
22		V8 FE (5)	Tut 4	
23	V2 Optik (2)		V15 FE (12)	V22 FE (19)
24				Ü10 FE (9), VL-Ende
25		Tut 2		
26		V9 FE (6)	Ü7 FE (6), Ausgabe Ü8/T6	
27				
28	V3 Optik (3)	V10 FE (7)		
29	Deadline Tut.-Anmeldung	Ü4 FE (3), Ausgabe Ü5	Tut 5	
30	U1 Optik, Ausgabe T1		V16 FE (13)	
31		Pfingsten		

Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
Brückentag

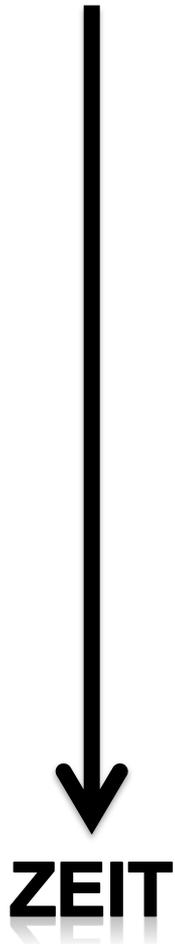
Ausgabe:
 Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand:04.05.2020



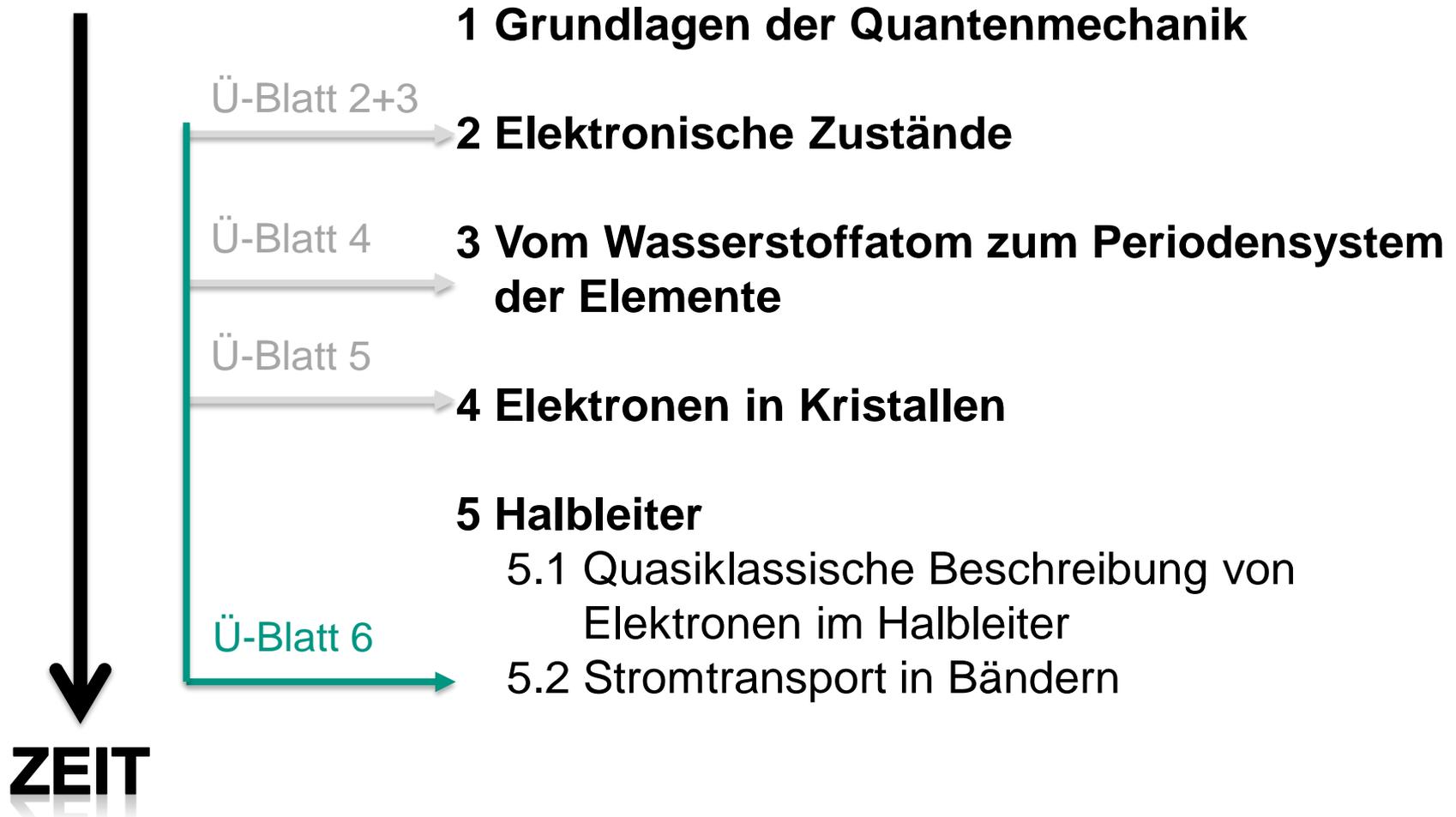
Dienstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Donnerstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Freitagstermine: 11:30 - 13:00, 11.40 Johann-Gottfried-Tulla-Hörsaal

Stand der Dinge



1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge



Wiederholung

- Wellenfunktionen im Wasserstoffatom $\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\phi, \theta)$

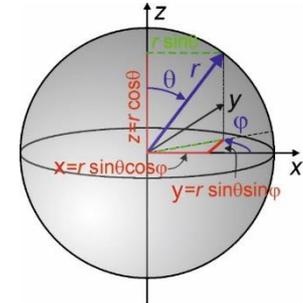
n	l	$R_{n,l}(r)$
1	0	$2Ne^{-x}$
2	0	$2Ne^{-x}(1-x)$
2	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}$

$$N = \left(\frac{1}{na_0}\right)^{3/2}$$

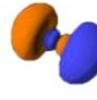
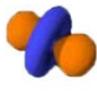
$$x = \frac{r}{na_0}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

l	m	$Y_{l,m}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	± 1	$\mp \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{\pm j\phi}$
1	0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$

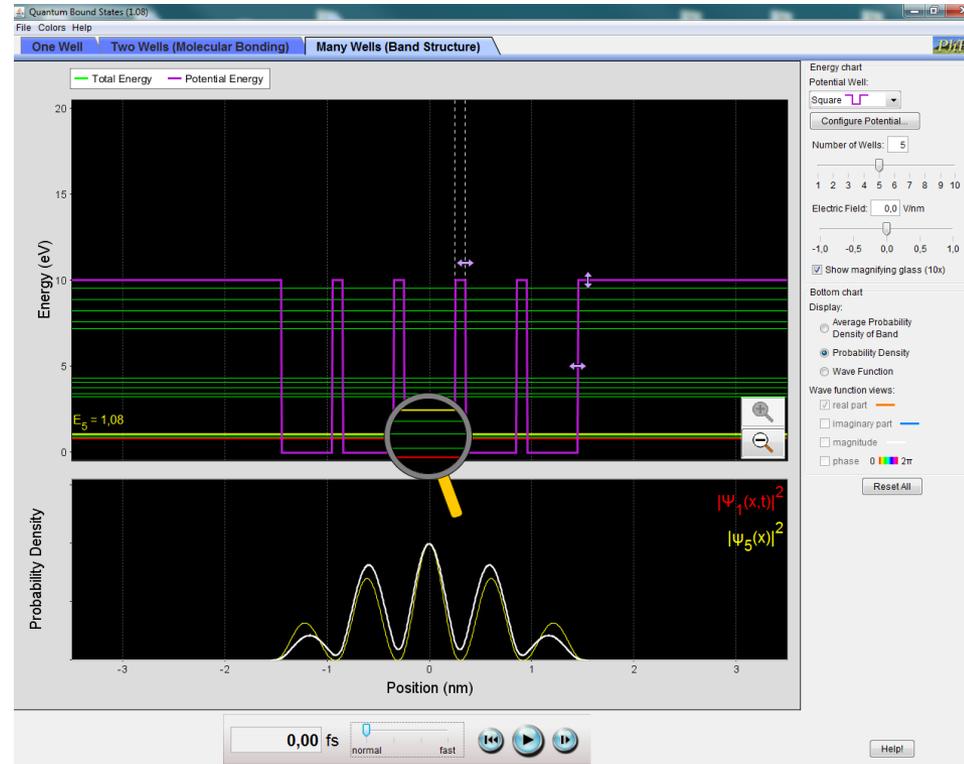


- Quantenzahlen eines Elektrons im Wasserstoffatom:

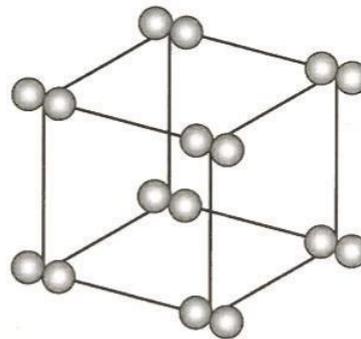
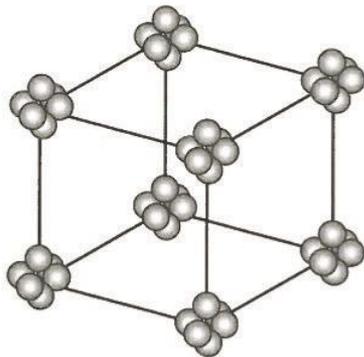
$n=1$		$n = 1, 2, 3, \dots$	(Hauptquantenzahl)				
$n=2$		$l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$	(Nebenquantenzahl, Drehimpulsquantenzahl)				
		$m = -l, (-l+1), \dots, 0, \dots, l$	(Magnetquantenzahl)				
		$s = \pm \frac{1}{2}$	(Spinquantenzahl)				
$n=3$							
							
							
							
							
							
	$l=0$ $m=0$	$l=1$ $m=0$	$l=1$ $m=1$	$l=2$ $m=0$	$l=2$ $m=1$	$l=2$ $m=2$	

Wiederholung

- Gekoppelte Potentialtöpfe:



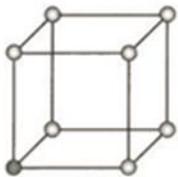
- Kristall-Gitter:



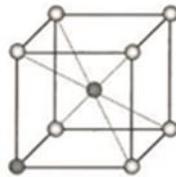
Kristall: Gitter + Basis

Wiederholung– Kristalle

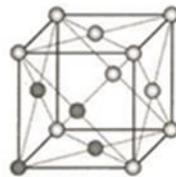
■ 14 Möglichkeiten – die Bravais-Gitter:



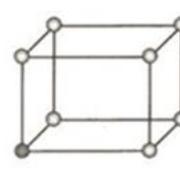
kubisch
primitiv



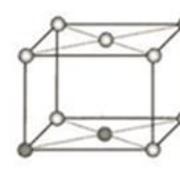
kubisch
raumzentriert



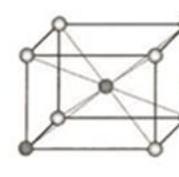
kubisch
flächenzentriert



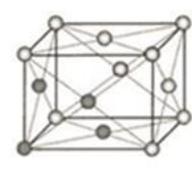
orthorhombisch
primitiv



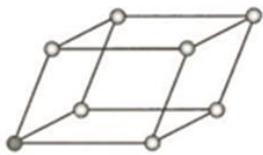
orthorhombisch
basiszentriert



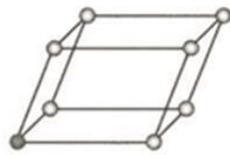
orthorhombisch
raumzentriert



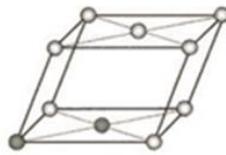
orthorhombisch
flächenzentriert



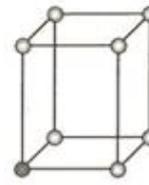
triklin



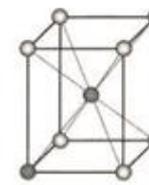
monoklin
primitiv



monoklin
basiszentriert



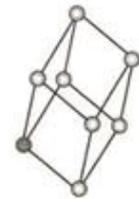
tetragonal
primitiv



tetragonal
raumzentriert



hexagonal



trigonal
(rhomboedrisch)

A1 Bloch-Oszillationen

Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos(ka))$ mit $\Delta W = 2 \text{ eV}$ beschreiben.

■ Benutzen Sie:

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$

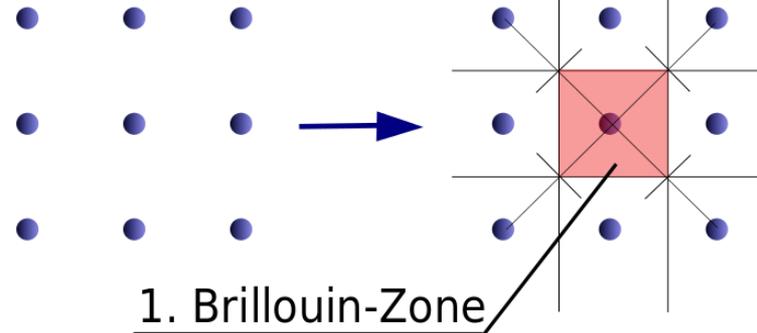
Die Gitterkonstante beträgt:

$$a_{\text{Si}} = 5.43 \text{ \AA}$$

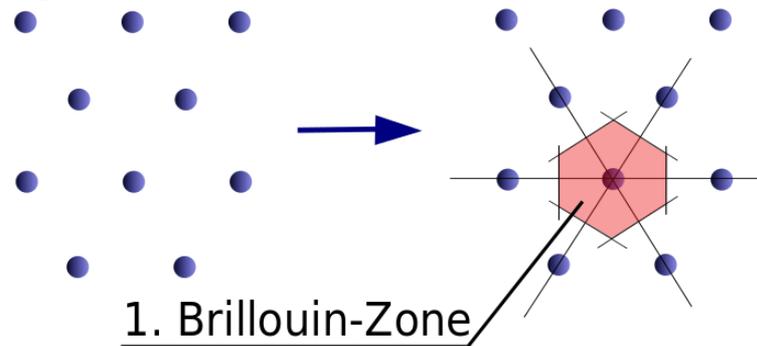
Einschub Gitterstruktur

■ 1. Brillouin-Zone

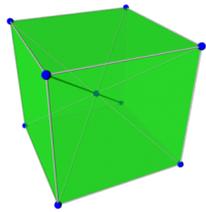
quadratisches Gitter:



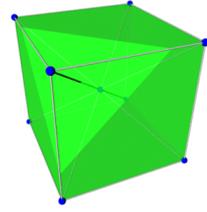
hexagonales Gitter:



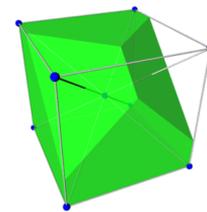
Einschub Gitterstruktur



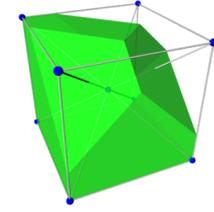
1



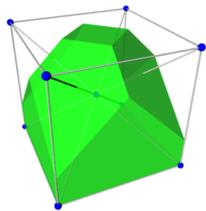
2



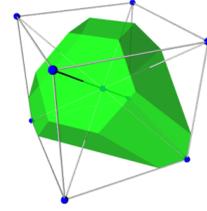
3



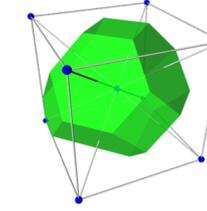
4



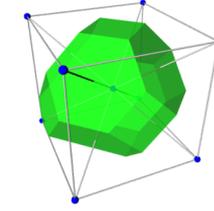
5



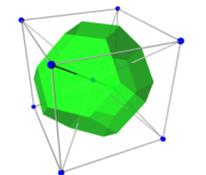
6



7



8



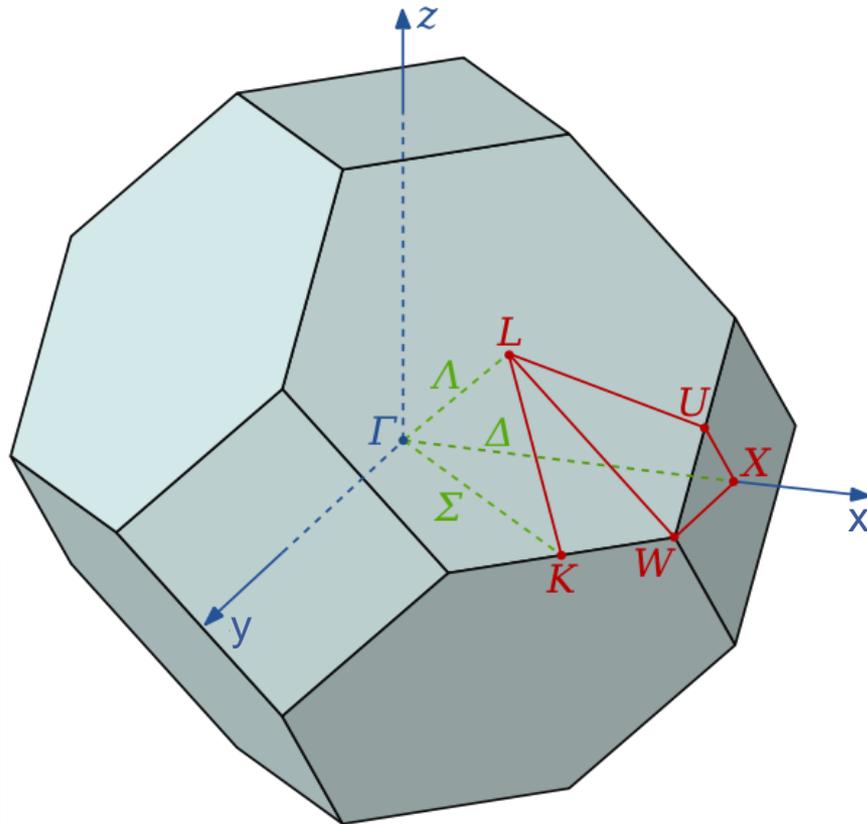
9



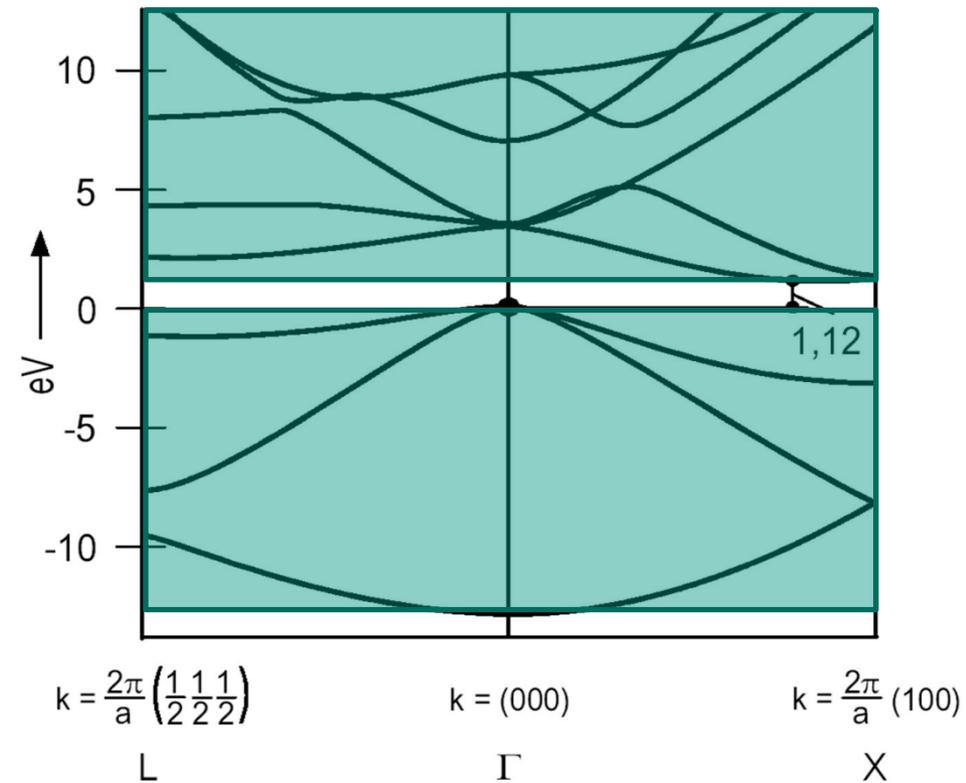
1. Brillouin-Zone eines kubisch flächenzentrierten Gitters

(wenn Kristall kubisch flächenzentriert, dann reziprokes Gitter kubisch raumzentriert und anders herum!)

Einschub Gitterstruktur



■ $\Gamma=(0,0,0)$, $X(1,0,0)$, $L(1/2,1/2,1/2)$



Bandstruktur von Silizium

A1 Bloch-Oszillationen

Das Leitungsband in Silizium lässt sich im Bereich $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ in der Kristallrichtung (100) (zwischen Γ - und X-Punkt) näherungsweise durch das Potential $W(k) = \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos(ka))$ mit $\Delta W = 2 \text{ eV}$ beschreiben.

■ Benutzen Sie:

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$

Die Gitterkonstante beträgt:

$$a_{\text{Si}} = 5.43 \text{ \AA}$$

Einschub: Geschwindigkeit & effektive Masse

- Wie kommt man auf die Formeln für v und m_{eff} ?

- Geschwindigkeit:
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k}$$

$$\uparrow$$

$$W = \hbar \omega$$

- effektive Masse:

- Klassischer Ansatz: $dW = -eE v_g dt$ und $dW = \left(\frac{\partial W}{\partial k} \right) dk = \hbar v_g dk$

- $dk = - \left(\frac{eE}{\hbar} \right) dt$ $F = -eE = \hbar \frac{dk}{dt}$

$$a = \frac{dv_g}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial k} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} m_{\text{eff}} = \frac{F}{a} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

A1 a) Bloch-Oszillationen

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v und die effektive Masse m_{eff} des Elektrons bei $k = 0$, $k = \frac{\pi}{a}$ und $k = \frac{\pi}{2a}$ im angegebenen Kristallpotential.

- Partielle Ableitung des Potentials:

$$\begin{aligned}
 W(k) &= \frac{\Delta W}{2} (1 + \cos ka) \\
 \frac{\partial W}{\partial k} &= -\frac{a\Delta W}{2} \sin ka \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} &= -\frac{a^2 \Delta W}{2} \cos ka
 \end{aligned}$$

- Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin ka \\
 (m_{\text{eff}})^{-1} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = -\frac{a^2 \Delta W}{2\hbar^2} \cos ka
 \end{aligned}$$

A1 a) Bloch-Oszillationen

Elektronenmasse:
 $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k} = -\frac{a \Delta W}{2\hbar} \sin ka$$

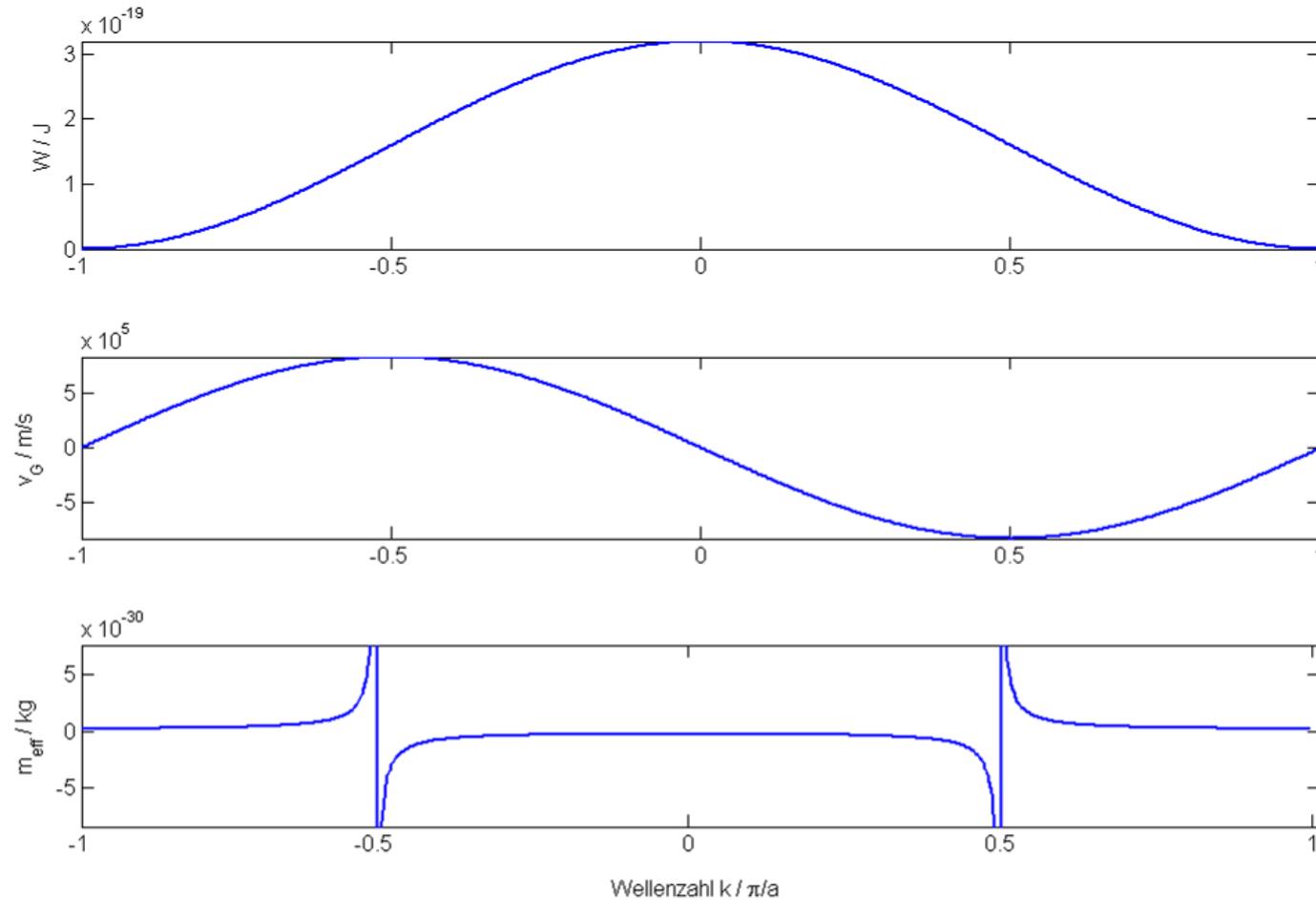
$$(m_{\text{eff}})^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} = -\frac{a^2 \Delta W}{2\hbar^2} \cos ka$$

■ Einsetzen der k-Werte ergibt:

k	W(k)	v(k)	1/m _{eff} (k)	m _{eff} (k)
0	2 eV	0	$-\frac{a^2 \Delta W}{2\hbar^2}$	$-2,35 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$\frac{\pi}{2a}$	1 eV	$8,25 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	∞
$\frac{\pi}{a}$	0 eV	0	$+\frac{a^2 \Delta W}{2\hbar^2}$	$+2,35 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

A1 b) Bloch-Oszillationen

Skizzieren Sie $W(k)$, $v(k)$ und $m_{\text{eff}}(k)$.



A1 c) Bloch-Oszillationen

Nun werde ein elektrisches Feld angelegt, das auf die Elektronen eine Kraft F ausübt. Zeigen Sie, dass hiernach die Elektronen-Geschwindigkeit und der Elektronen-Ort zeitlich oszillieren (Bloch-Oszillationen).

- Wir haben bestimmt:

$$v = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin \underbrace{ka}$$

zeitabhängig?

- Aus dem Skript wissen wir:

$$F = \hbar \frac{dk}{dt}$$

- Integration mit konstantem F und $t_0 = 0$:

$$\frac{Ft}{\hbar} = k - k_0$$

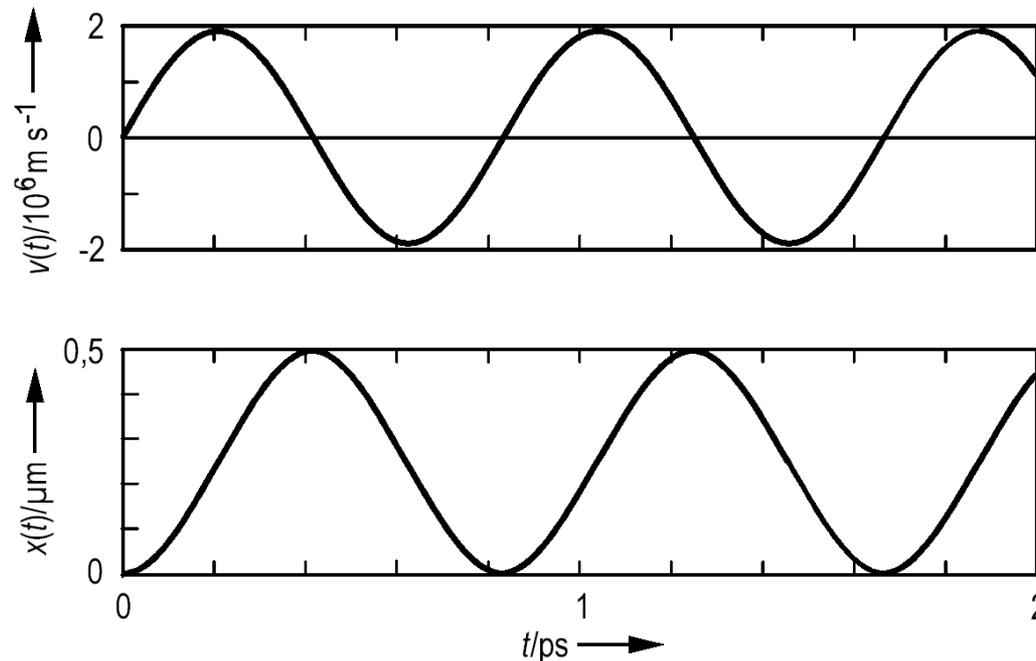
$$k(t) = k_0 + \frac{Ft}{\hbar}$$

A1 c) Bloch-Oszillationen

$$v(t) = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin k(t)a = -\frac{a\Delta W}{2\hbar} \sin \left(a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right) \right)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{\Delta W}{2F} \left(\cos \left(a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right) \right) - \cos (ak_0) \right)$$

- Ort und Geschwindigkeit oszillieren zeitlich:



A1 d) Bloch-Oszillationen

Warum fließt dann ein Strom bei angelegtem elektrischen Feld?
Berechnen Sie dazu aus der Beweglichkeit der Elektronen in Silizium die mittlere Streuzzeit τ . Vergleichen Sie diese Streuzzeit mit einer Bloch-Oszillations-Periode für eine Feldstärke von 10^6 V/m.

■ Gegeben ist:

$$\mu = 1300 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}, \quad m_{\text{eff}} = 0.32m_0$$

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W}{\partial k}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W}{\partial k^2}, \quad \mu = \frac{q\tau}{m_{\text{eff}}}$$

A1 d) Bloch-Oszillationen

- Streuzeit der Elektronen in Silizium:

$$\mu = \frac{e_0 \tau}{m_{\text{eff}}} \rightarrow \tau = \frac{\mu m_{\text{eff}}}{e_0} = 2.37 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

- Periode der Bloch-Oszillation:

$$x(t) = x_0 + \frac{\Delta W}{2F} \left(\cos \left(a \left(k_0 + \frac{Ft}{\hbar} \right) \right) - \cos (ak_0) \right)$$

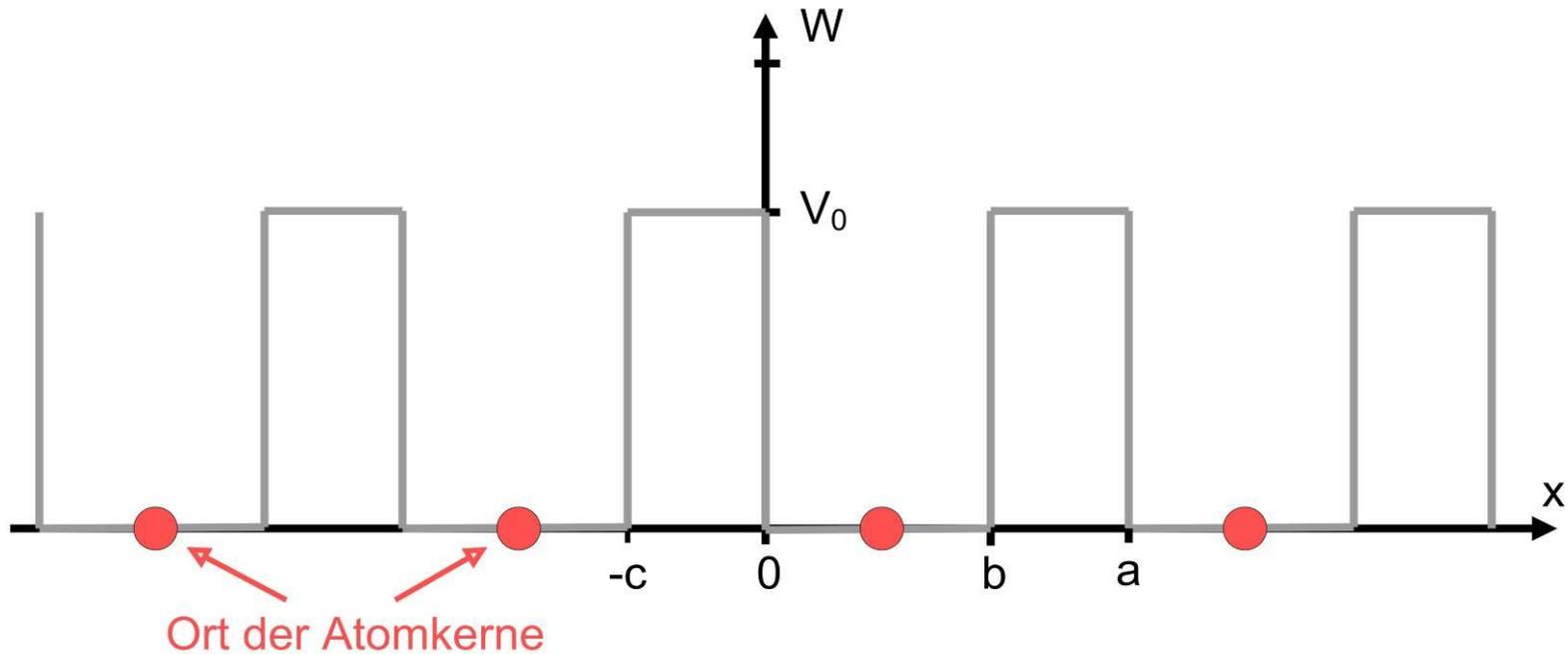
Vergleich mit phasenverschobenen Cosinus: $\cos(\omega t + \phi)$

$$\rightarrow \omega = \frac{aF}{\hbar} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi\hbar}{aF} = \frac{2\pi\hbar}{ae_0E} = 7.6 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

- Kaum Bloch-Oszillationen wegen deutlich kürzerer Streuzeit
- gerichteter Stromfluss möglich

A2 Kronig-Penney-Modell



- Rechteckförmige Potentiale
- Näherungsmethode zur Berechnung der Bandstruktur mit Bloch-Ansatz

A2 a) Kronig-Penney-Modell

Geben Sie den Ansatz für ein Elektron als Blochwelle im Kristall an.
Welche Eigenschaften haben die Bestandteile des Bloch-Ansatzes?

■ Wellenfunktion:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

mit

$$u(x + a) = u(x)$$

→ Ebene Welle moduliert mit einem Term, der die Periode des Gitters hat

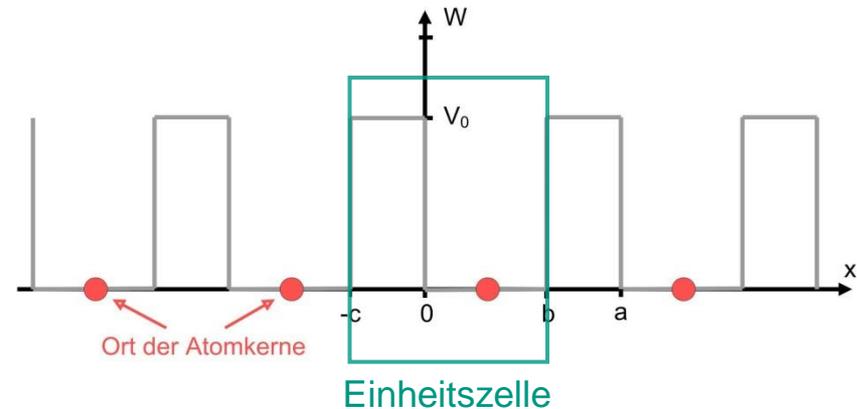
A2 b) Kronig-Penney-Modell

Nun betrachten Sie eine Einheitszelle des Kristalls ($-c \leq x \leq b$). Setzen Sie den Ansatz aus a) für die beiden Bereiche konstanten Potentials in die Schrödingergleichung ein.

■ Abkürzungen:

$$\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$$

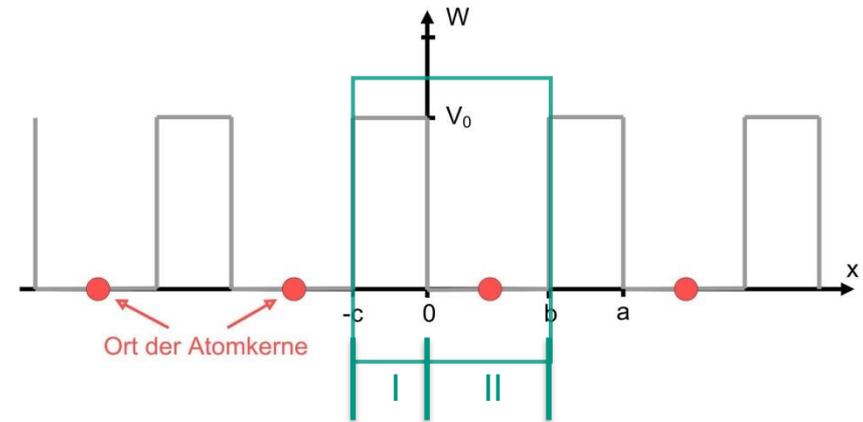


■ Ansatz: Ableiten & Vereinfachen

A2 b) Kronig-Penney-Modell

■ Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = W\psi(x)$$



■ Zwei Gebiete mit konstantem Potential:

$$-c \leq x < 0 \rightarrow V(x) = V_0$$

$$0 \leq x < b \rightarrow V(x) = 0$$

A2 b) Kronig-Penney-Modell

- Wellenfunktion & Schrödingergleichung Bereich I:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V_0 \psi(x) = W \psi(x)$$

$$u(x+a) = u(x)$$

- Einsetzen, Ableiten & Vereinfachen:

$$\Psi'(x) = u'(x)e^{jkx} + u(x)jke^{jkx}$$

$$\Psi''(x) = u''(x)e^{jkx} + 2u'(x)jke^{jkx} - u(x)k^2e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (u''(x)e^{jkx} + 2jku'(x)e^{jkx} - k^2u(x)e^{jkx}) = (W - V_0)u(x)e^{jkx}$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - W))u(x) = 0$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \kappa_2^2)u(x) = 0$$

A2 b) Kronig-Penney-Modell

- Wellenfunktion & Schrödingergleichung Bereich II:

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = W\psi(x)$$

$$u(x+a) = u(x)$$

- Einsetzen, Ableiten & Vereinfachen:

$$u''(x) + 2jku'(x) - \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}W\right)u(x) = 0$$

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

A2 c) Kronig-Penney-Modell

Finden Sie in den beiden Gebieten Lösungsansätze für die Differentialgleichungen.

■ Gebiet I:

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 + \kappa_2^2)u(x) = 0$$

■ Gebiet II:

$$u''(x) + 2jku'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

■ Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

→ Ansatz:

charakteristische Polynome aufstellen und Lösungsansatz mit Hilfe des passenden Fundamentalsystems aufstellen

A2 c) Kronig-Penney-Modell

- Ansatz: i-te Ableitung von $u(x)$ durch i-te Potenz von λ ersetzen

- Einsetzen ergibt charakteristisches Polynom für Gebiet I:

$$u''(x) + 2jk u'(x) - (k^2 + \kappa_2^2)u(x) = 0$$

$$\lambda^2 + 2jk\lambda - \kappa_2^2 - k^2 = 0$$

- Mit den Nullstellen:

$$\lambda_{1,2} = -jk \pm \sqrt{-k^2 + k^2 + \kappa_2^2} = -jk \pm \kappa_2$$

- Fundamentalsystem:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$$

- Daraus folgt der Lösungsansatz:

$$u_I(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

A2 c) Kronig-Penney-Modell

- In gleicher Weise bestimmen wir für Gebiet II:

$$u''(x) + 2jk u'(x) - (k^2 - \kappa_1^2)u(x) = 0$$

$$\lambda^2 + 2jk\lambda + \kappa_1^2 - k^2 = 0$$

- Mit den Nullstellen:

$$\rightarrow \lambda_{3,4} = -jk \pm \sqrt{-k^2 + k^2 - \kappa_1^2} = -jk \pm j\kappa_1$$

- Daraus folgt der Lösungsansatz:

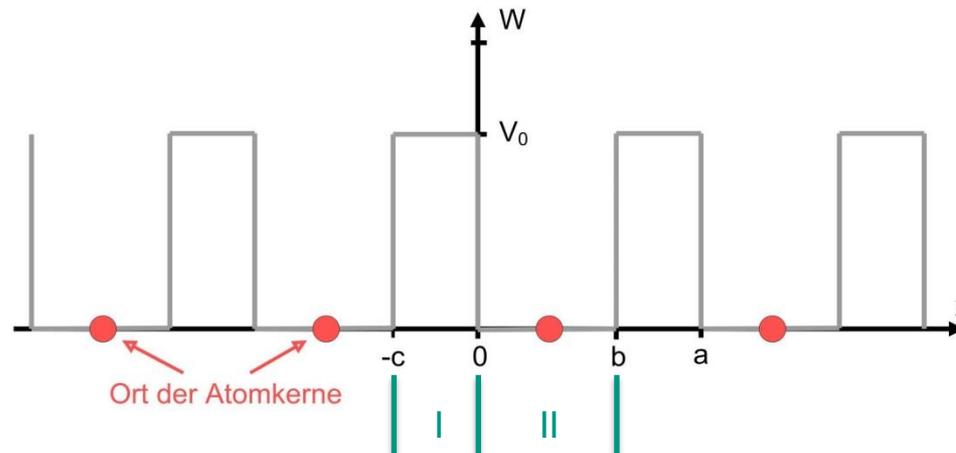
$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{\lambda_3 x} + De^{\lambda_4 x} = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$

A2 d) Kronig-Penney-Modell

Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der in den im letzten Aufgabenteil gefundenen Lösungen auftretenden Konstanten mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen und der Periodizität der Bloch-Funktionen auf.

$$u_{\text{I}}(x) = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$



A2 d) Kronig-Penney-Modell

$$u_{\text{I}}(x) = Ae^{(\kappa_2 - jk)x} + Be^{-(\kappa_2 + jk)x}$$

$$u_{\text{II}}(x) = Ce^{j(\kappa_1 - k)x} + De^{-j(\kappa_1 + k)x}$$

- Stetigkeitsbedingungen:

$$u_{\text{I}}(0) = u_{\text{II}}(0)$$

und

$$u'_{\text{I}}(0) = u'_{\text{II}}(0)$$

$$A + B = C + D$$

$$(\kappa_2 - jk)A - (\kappa_2 + jk)B = j(\kappa_1 - k)C - j(\kappa_1 + k)D$$

- Periodizität der Bloch-Funktionen: $u_{\text{I}}(-c) = u_{\text{II}}(b)$ und $u'_{\text{I}}(-c) = u'_{\text{II}}(b)$

$$Ae^{-(\kappa_2 - jk)c} + Be^{(\kappa_2 + jk)c} = Ce^{j(\kappa_1 - k)b} + De^{-j(\kappa_1 + k)b}$$

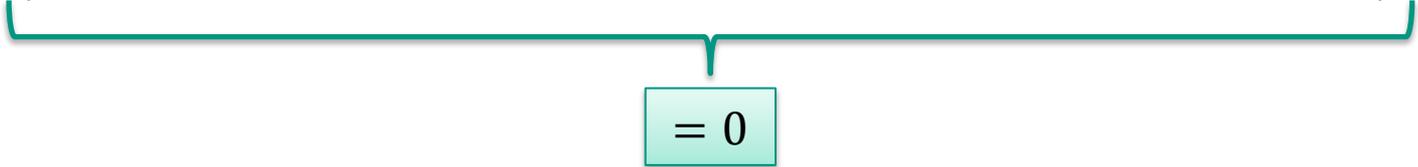
$$\begin{aligned}
 (\kappa_2 - jk)Ae^{-(\kappa_2 - jk)c} - (\kappa_2 + jk)Be^{(\kappa_2 + jk)c} &= j(\kappa_1 - k)Ce^{j(\kappa_1 - k)b} - j(\kappa_1 + k)De^{-j(\kappa_1 + k)b} \\
 &= j(\kappa_1 - k)Ce^{j(\kappa_1 - k)b} - j(\kappa_1 + k)De^{-j(\kappa_1 + k)b}
 \end{aligned}$$

A2 e) Kronig-Penney-Modell

Das aus den Randbedingungen folgende Gleichungssystem ist wie üblich nur lösbar, falls seine Determinante Δ verschwindet.

■ Determinante:

$$\Delta = j8\kappa_1\kappa_2 e^{jk} \left(\cos(ka) - \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{2\kappa_1\kappa_2} \sinh(\kappa_2 c) \sin(\kappa_1 b) - \cosh(\kappa_2 c) \cos(\kappa_1 b) \right)$$



■ Mit

$$\kappa_1 = \sqrt{(2mW/\hbar^2)} \quad \text{und} \quad \kappa_2 = \sqrt{(2m(V_0 - W)/\hbar^2)}$$

■ Ziel:

$$k = \frac{1}{a} \arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)$$

A2 e) Kronig-Penney-Modell

■ Einsetzen liefert:

$$\cos(ka) - \frac{1 - 2W/V_0}{2\sqrt{(W/V_0) - (W/V_0)^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{W}{V_0}b}\right) - \cosh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{W}{V_0}b}\right) = 0$$

■ Auflösen nach k:

$$k = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{1 - 2W/V_0}{2\sqrt{(W/V_0) - (W/V_0)^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{W}{V_0}b}\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(1 - \frac{W}{V_0}\right)c}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{W}{V_0}b}\right)\right)$$

$$L\left(\frac{W}{V_0}\right)$$

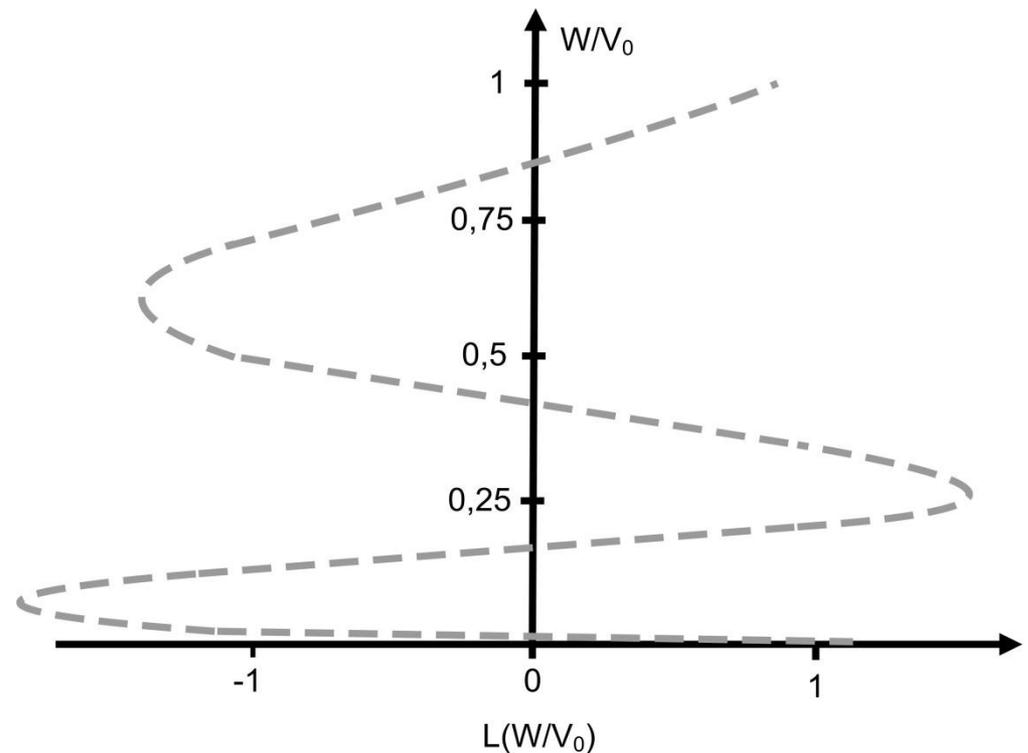
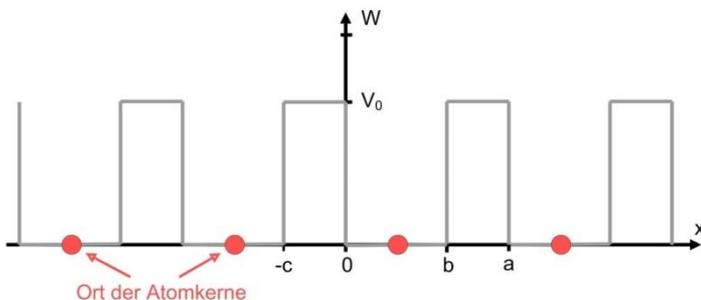
A2 f) Kronig-Penney-Modell

Visualisieren Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus dem letzten Aufgabenteil nun in der Abbildung die Bildung von Bändern und Bandlücken.

■ $k = \frac{1}{a} \arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)$

■ $L \left(\frac{W}{V_0} \right)$ mit:

$c/b = 0.1$ und $\frac{2mV_0b^2}{4\hbar^2} = 36$

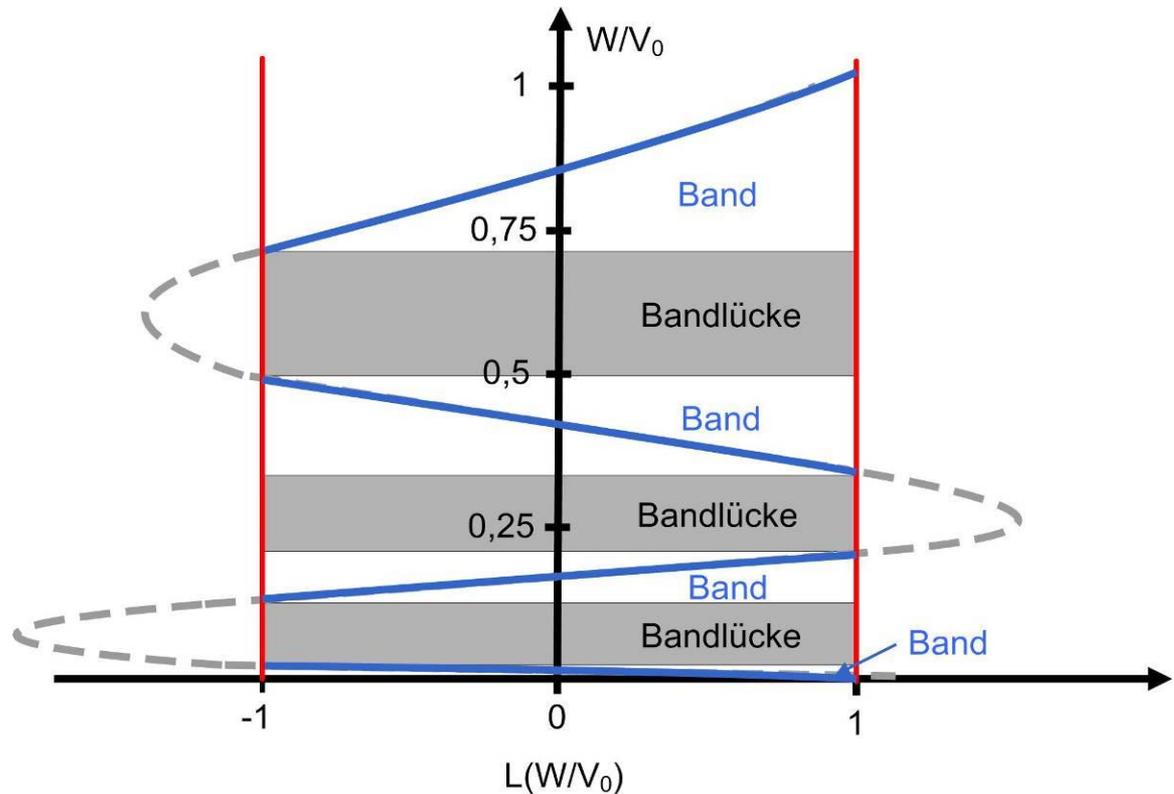


A2 f) Kronig-Penney-Modell

- Näherungsmethode zur Berechnung der Bandstruktur:

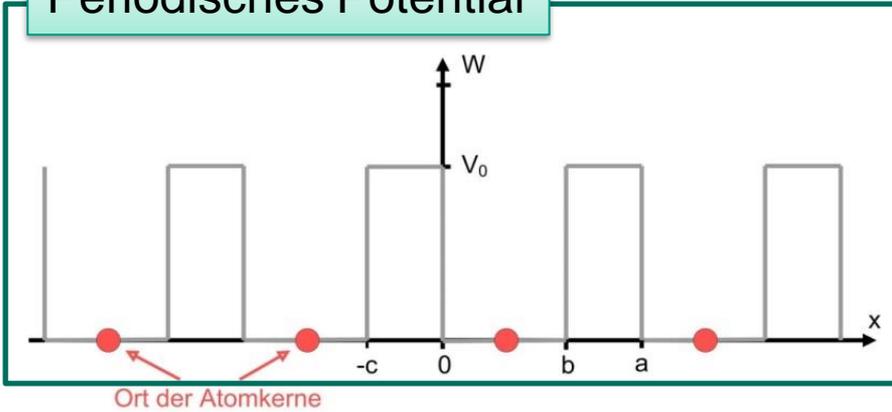
$$k = \frac{1}{a} \arccos \left(L \left(\frac{W}{V_0} \right) \right)$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$



A2 Kronig-Penney-Modell: Zusammenfassung

Periodisches Potential



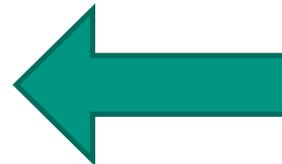
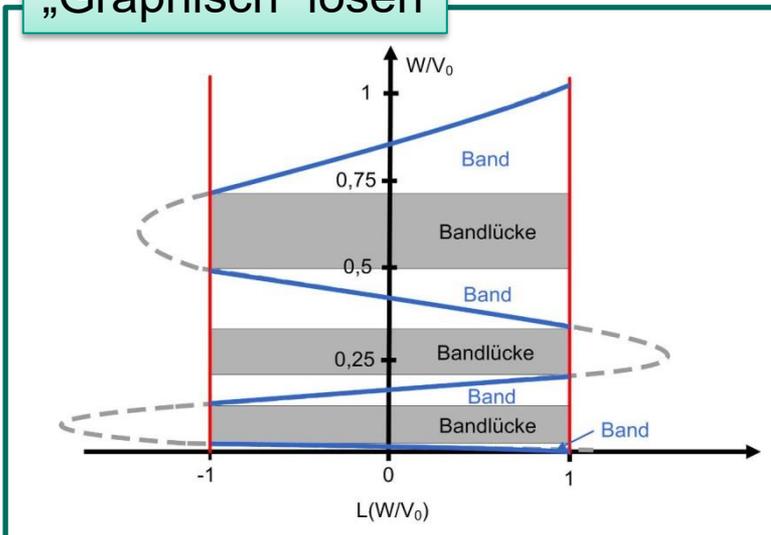
Bloch-Ansatz

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$u(x + a) = u(x)$$



„Graphisch“ lösen



Stetigkeitsbedingungen
& Periodizität
→ Gleichungssystem

Zusammenfassende Fragen

- Wie wirken sich Gitterstrukturen auf die Wellenfunktionen von Elektronen aus?
- Was ist ein indirekter Halbleiter?
- Was bedeutet eine negative effektive Masse?
- Wie sehen Blochwellen aus?

Ankündigungen

- 4. Tutorium: 22. Juni – 26. Juni 2020
-

- Nächste Übung (Ü7): 26. Juni 2020