

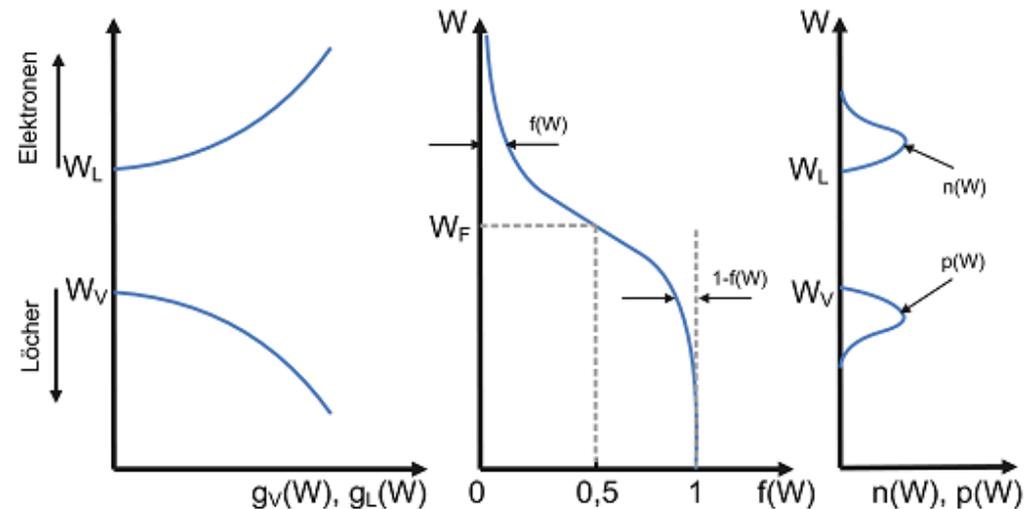
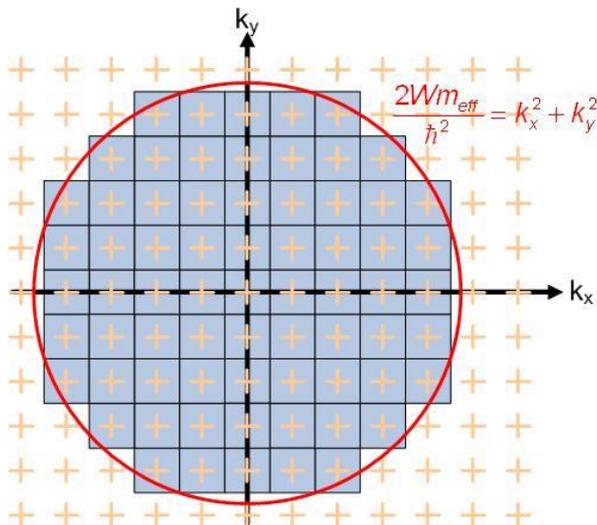
Zustandsdichte, Besetzungswahrscheinlichkeit & Ladungsträgerdichte

7. Übung Optik und Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Sommersemester 2020

Benjamin Fritz, Henning Mescher



Terminplanung

Tag/Monat	April	Mai	Juni	Juli
1		1. Mai Feiertag	Pfingstmontag	
2			V11 FE (8)	V17 FE (14)
3				U8 FE (7), Ausgabe T7
4			V12 FE (9)	
5		V4 FE (1)	U5 FE (4), Ausgabe T3	
6				Tut 6
7		V5 FE (2), Ausgabe Ü2		V18 FE (15)
8				
9			V13 FE (10)	V19 FE (16), (Institutsführung)
10			Ausgabe Ü6/T4	Ausgabe Ü9/T8
11		Tut 1	Fronleichnam	
12		V6 FE (3), Ausgabe Ü3	Brückentag	
13				Tut 7
14		Ü2 FE (1)		V20 FE (17)
15		V7 FE (4), Ausgabe T2	Tut 3	
16				
17				Ü9 FE (8), Ausgabe Ü10
18			V14 FE (11)	
19		Ü3 FE (2)	Ü6 FE (5), Ausgabe Ü7/T5	
20	VL-Beginn	Ausgabe Ü4		Tut 8
21	V1 Optik (1), Ausgabe Ü1	Christi Himmelfahrt		V21 FE (18)
22		V8 FE (5)	Tut 4	
23	V2 Optik (2)		V15 FE (12)	V22 FE (19)
24				Ü10 FE (9), VL-Ende
25		Tut 2		
26		V9 FE (6)	Ü7 FE (6), Ausgabe Ü8/T6	
27				
28	V3 Optik (3)	V10 FE (7)		
29	Deadline Tut.-Anmeldung	Ü4 FE (3), Ausgabe Ü5	Tut 5	
30	U1 Optik, Ausgabe T1		V16 FE (13)	
31		Pfingsten		

Wochenende
Feiertag
Vorlesung
Übung
Tutorium
Brückentag

Ausgabe:
Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand: 10.06.2020

Dienstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Donnerstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Freitagstermine: 11:30 - 13:00, 11.40 Johann-Gottfried-Tulla-Hörsaal

Infos zur Klausur

■ Klausurtermin: XX.XX.2020, XX:00 Uhr bis XX:00 Uhr

**Prüfungsplanung wird
derzeit überarbeitet!**

■ Anmeldebeginn: XX.XX.2020

■ Anmeldeschluss: XX.XX.2020

■ Abmeldeschluss: XX.XX.2020

■ 1 Klausur:

„Optik und Festkörperelektronik“

reine „Festkörperelektronik“ wird nicht mehr angeboten!

Anmeldung

■ Für ETEC PO2007: über QISPOS

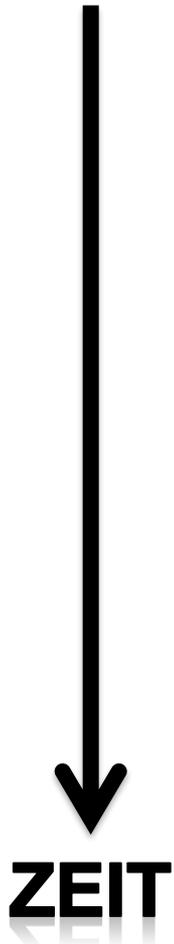
■ Für ETEC PO2015: über CAS-Campus

Klausurvorbereitung

- Relevant sind: Übungen, Tutorien, Vorlesung, Skript
- Fragestunde
 - XX.XX.2020, XX:00 -XX:00
- Danach werden keine Fragen mehr per Mail beantwortet.

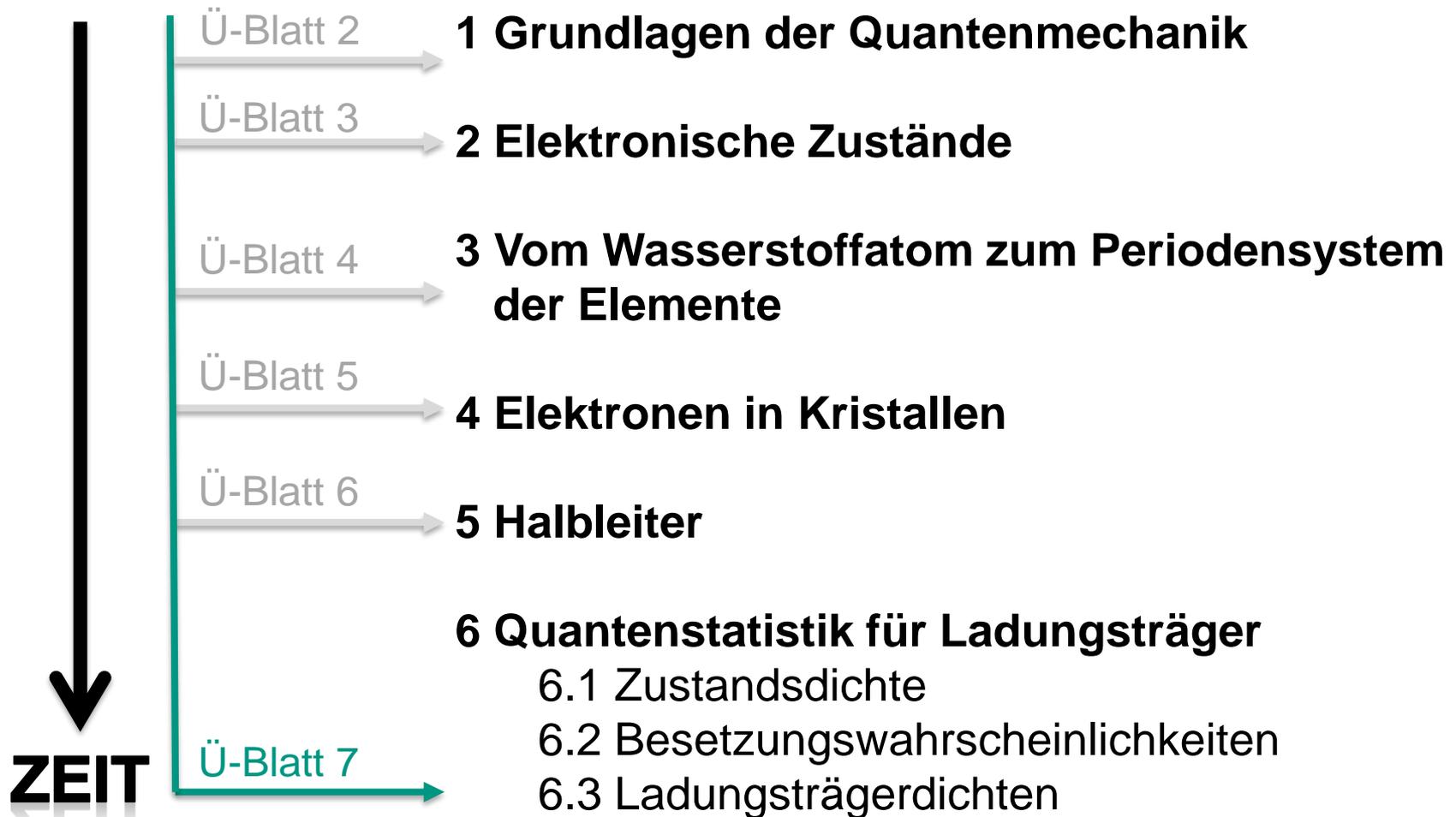


Stand der Dinge



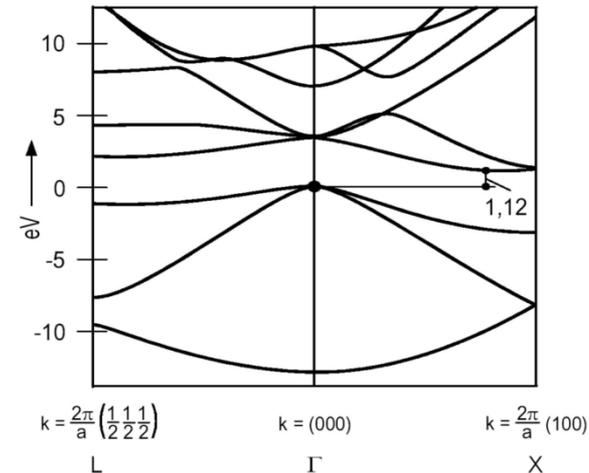
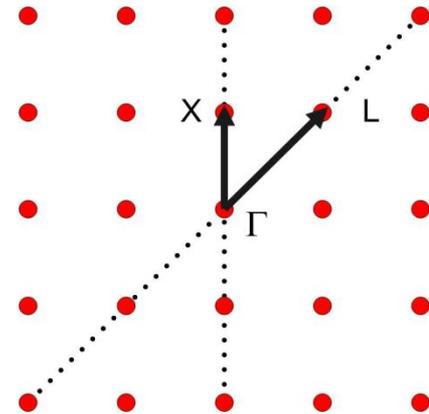
1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

Stand der Dinge

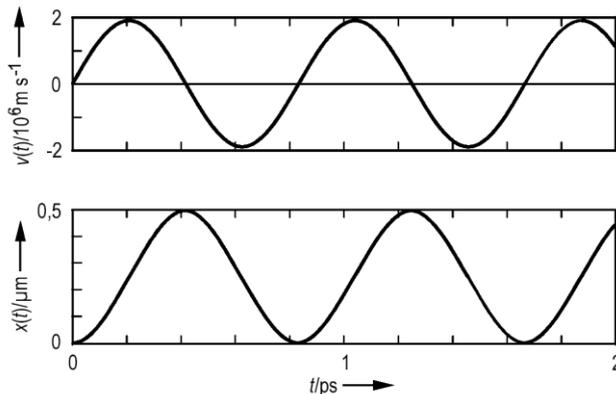


Wiederholung

Richtungsabhängige Bandstruktur



Bloch-Oszillationen

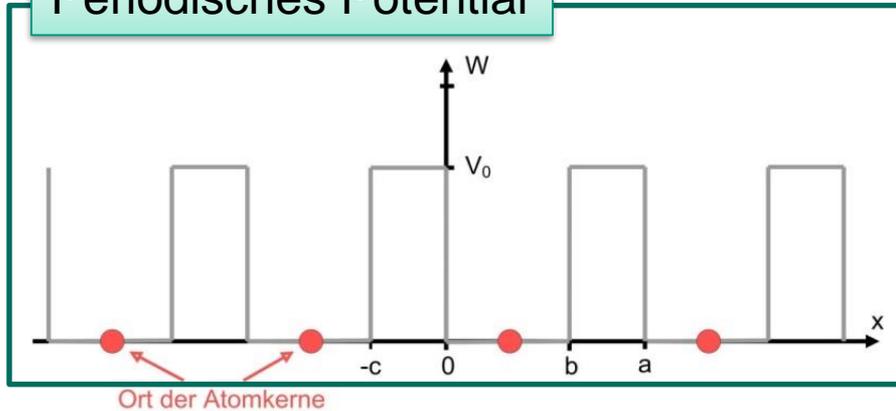


Effektive Masse

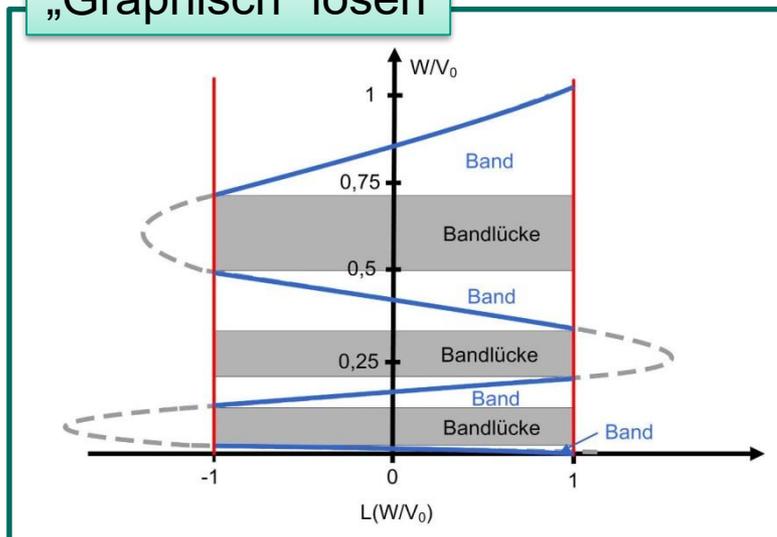
Die effektive Masse bezeichnet die scheinbare Masse eines Teilchens in einem Kristall im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Elektronen und Löcher verhalten sich in einem Kristall im Einfluss elektrischer bzw. magnetischer Felder ähnlich wie freie Elektronen mit einer entsprechend modifizierten Masse.

Wiederholung

Periodisches Potential



„Graphisch“ lösen



Bloch-Ansatz

$$\psi(x) = u(x)e^{jkx}$$

$$u(x + a) = u(x)$$

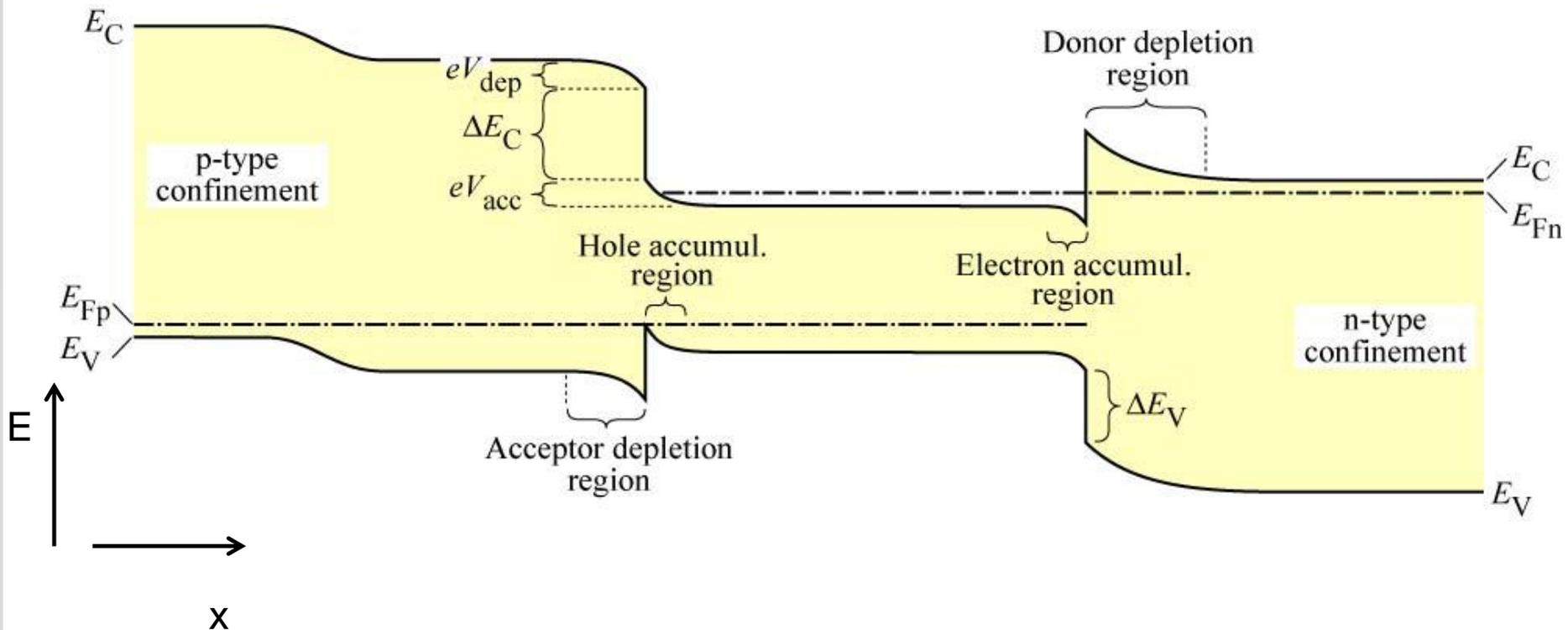
Stetigkeitsbedingungen
& Periodizität
→ Gleichungssystem

A1 a) Zustandsdichte

Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff "Zustandsdichte" versteht!

Einschub: Wozu das Ganze?

- Wo sitzen welche Ladungsträger und vor allem: Wie viele?



Quelle: www.lightemittingdiodes.org

Einschub: Wozu das Ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

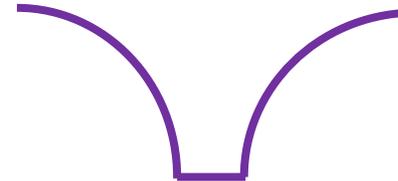
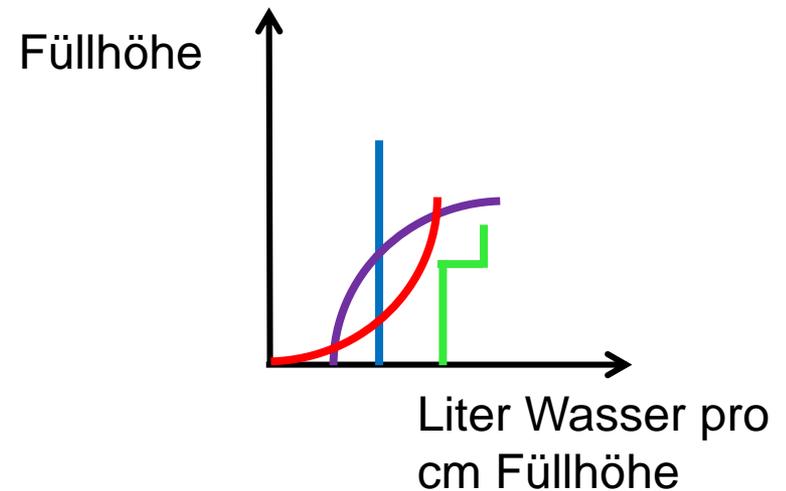
$$\int \text{Sitzplätze}(d) \quad \times \quad \text{Besetzungswahrsch.}(d) \quad = \quad \text{Personenanzahl}$$

↓
↓
↓

$$\text{Zustandsdichte} \quad \text{Fermi-Dirac-Verteilung} \quad \text{Ladungsträgerdichte}$$

A1 a) Zustandsdichte

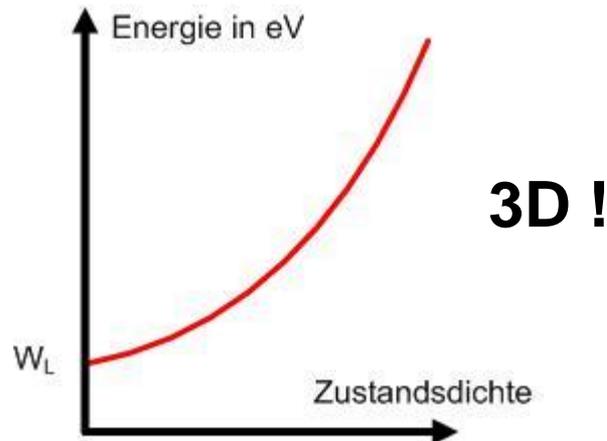
Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff "Zustandsdichte" versteht!



- Vergleich: Anzahl der Zustände pro Energieintervall im Halbleiter

A1 b) Zustandsdichte

Skizzieren Sie den Verlauf der elektronischen Zustandsdichte $g_L(W)$ im Leitungsband eines Halbleiters. Welche Annahmen wurden gemacht, um diesen Ausdruck zu erhalten?



■ Annahmen:

- Parabolische Bänder:

$$W = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m}$$

- Konstante effektive Masse

$$g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \underbrace{\sqrt{W - W_L}}_{\text{Proportional zu } \sqrt{W}}$$

Proportional zu \sqrt{W}

$$[g_{3D}] = \frac{1}{J m^3}$$

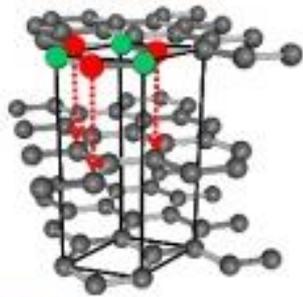
A1 c) Zustandsdichte

Berechnen Sie die Zustandsdichte $g_L(W)$ für eine zweidimensionale Struktur. Gehen Sie dazu von einem zweidimensionalen k -Raum aus und benutzen Sie die gleiche Strategie wie in der Vorlesung für drei Dimensionen gezeigt.

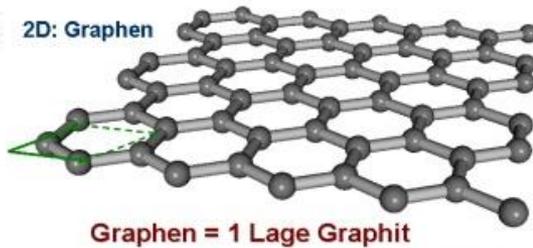
A1 c) Zustandsdichte

■ Zustandsdichte in Halbleitern:

3D: Graphit



2D: Graphen



Graphen = 1 Lage Graphit

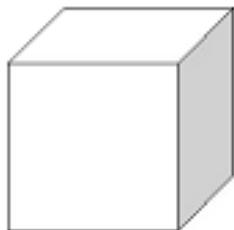


Quasi-1D: Kohlenstoffnanoröhren

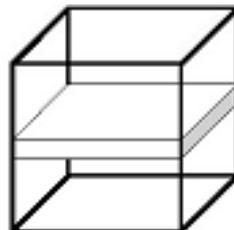
Quasi-0D: Fullerene



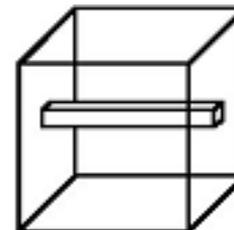
3D



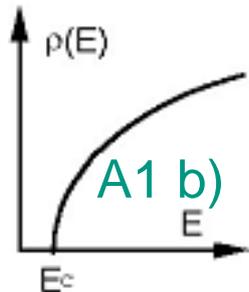
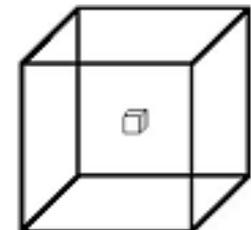
2D



1D

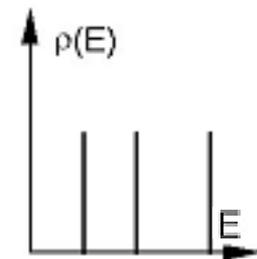


0D



?
A1 c)

?
A1 d)



A1 c) Zustandsdichte

■ Lösungsansatz:

1. „Volumen“ eines Zustandes und „Gesamtvolumen“ der Zustände bestimmen (im k -Raum)
2. Anzahl der Zustände bestimmen als „Gesamtvolumen/Zustandsvolumen“
3. Zuwachs/Rückgang pro Energie-Intervall bestimmen, d.h. nach der Energie ableiten
4. Auf „Volumen“ normieren
5. Spin beachten!

Rückblick: Potentialtopf

- Periodische Randbedingung:

$$\Psi(0) = \Psi(L)$$

- Führt zu folgenden Einschränkung:

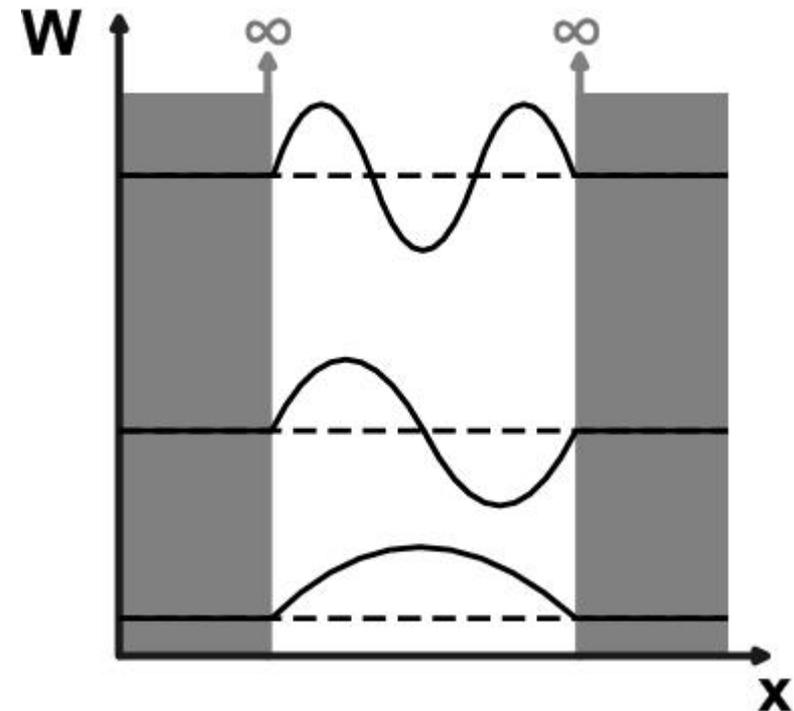
$$k = \frac{2\pi}{L}n$$

- In mehreren Dimensionen:

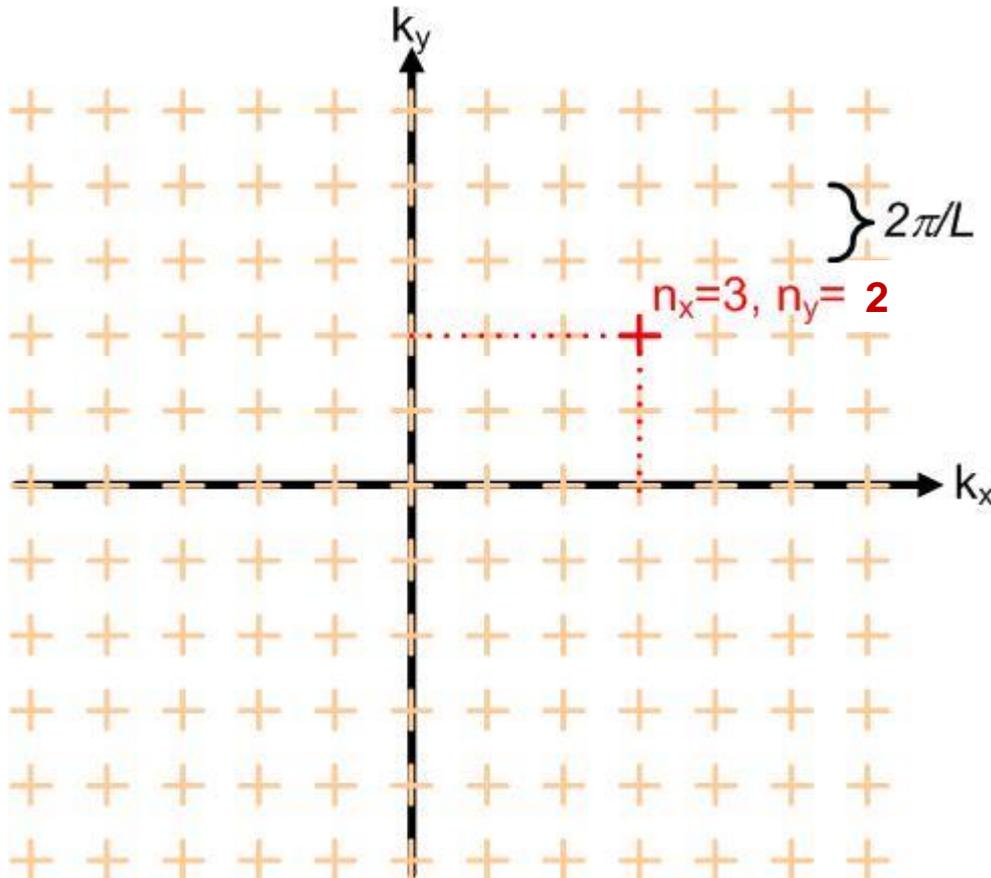
$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L}n_y$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$



A1 c) Zustandsdichte

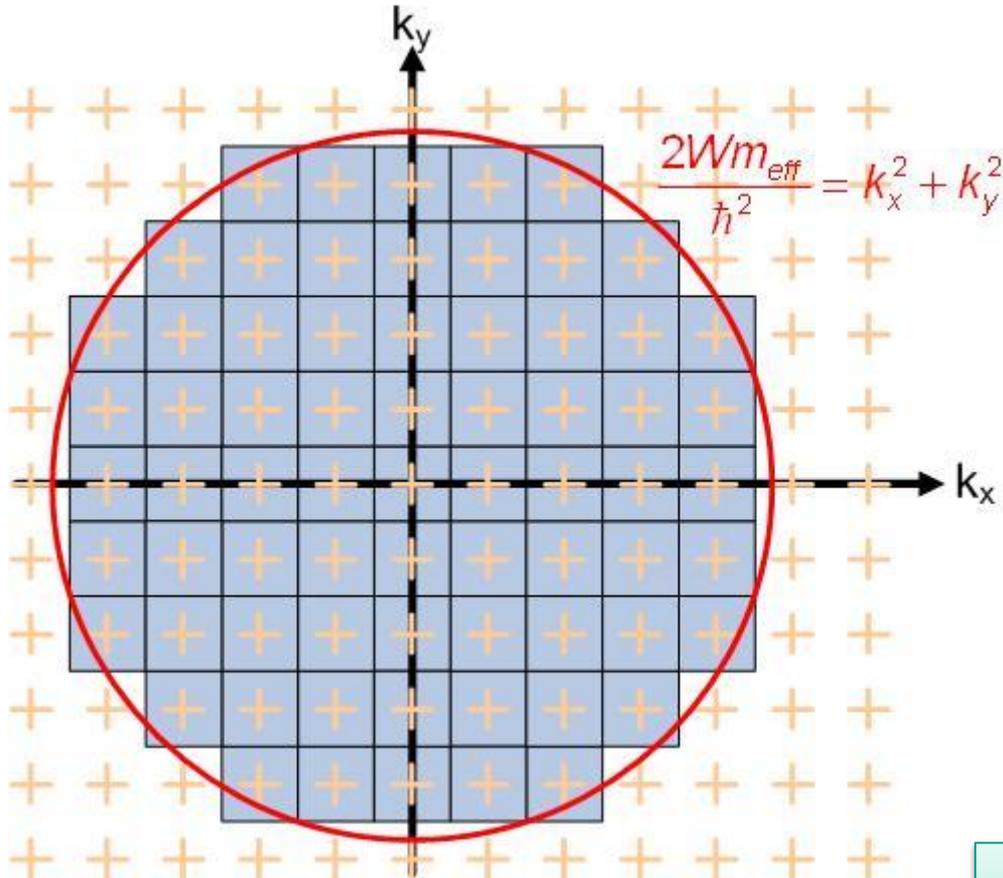


■ Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$$

$$\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

A1 c) Zustandsdichte



- Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$$

$$\Rightarrow k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$

- Kreis im k-Raum mit Radius:

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

Alle Zustände innerhalb des Kreises
Haben eine Energie $< W$

A1 c) Zustandsdichte

- Fläche eines Zustands:

$$F_{\text{Zustand}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{L^2}$$

- Zahl der Zustände:

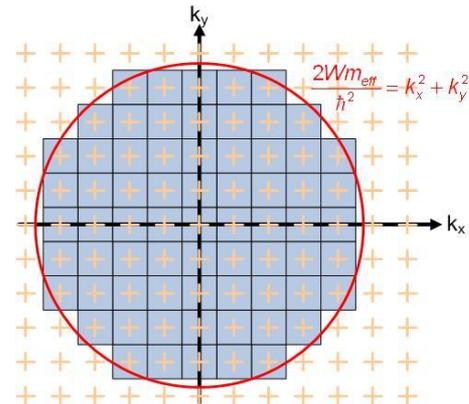
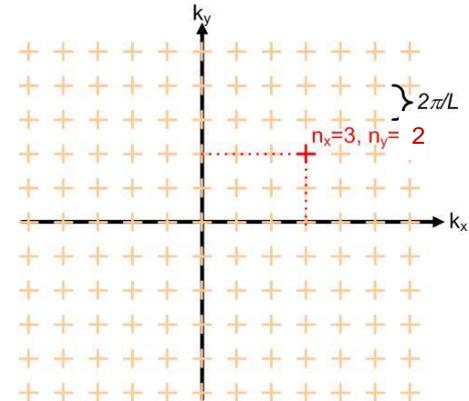
$$N(\omega) = \frac{F_{\text{Kreis}}}{F_{\text{Zustand}}} = \frac{\pi k_e^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{\pi \cdot 2m\omega L^2}{4\pi^2 \hbar^2} = \frac{m \omega L^2}{2\hbar^2 \pi}$$

- Anzahl der Zustände pro Energieintervall:

$$D(\omega) = \frac{N(\omega + \Delta\omega) - N(\omega)}{\Delta\omega} \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{mL^2}{2\hbar^2 \pi}$$

- Normierung & Spin:

$$g(\omega)_{20} \approx 2 \frac{1}{F} D(\omega) \approx \frac{m}{\hbar^2 \pi}$$



A1 c) Zustandsdichte

- Fläche eines Zustands:

$$F_{\text{Zustand}} = \frac{4\pi^2}{L^2}$$

- Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{F_{\text{Kreis}}}{F_{\text{Zustand}}} = \frac{\pi k_R^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{\pi 2mWL^2}{4\hbar^2 \pi^2} = \frac{mWL^2}{2\hbar^2 \pi}$$

- Anzahl der Zustände pro Energieintervall:

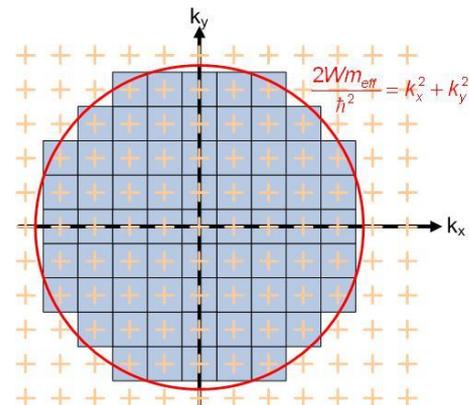
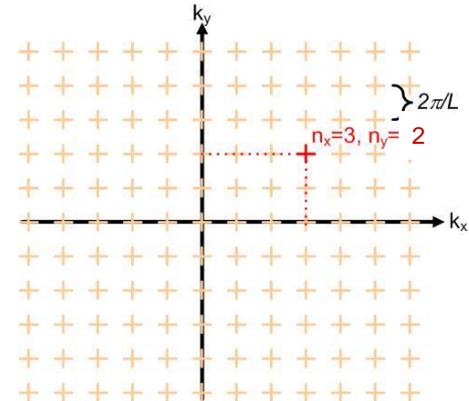
$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{mL^2}{2\hbar^2 \pi}$$

- Normierung & Spin:

$$g(W)_{2D} = 2 \frac{1}{F} D(W) = \frac{m}{\hbar^2 \pi}$$

$$[g_{2D}] = \frac{1}{J m^2}$$

→ konstant



A1 d) Zustandsdichte

Nun betrachten wir die Zustandsdichte in einem "Quantendraht". Das sind Gebilde, die in erster Näherung als eindimensional angenommen werden können. Führen Sie im eindimensionalen k -Raum die Ableitung der Zustandsdichte durch!

A1 d) Zustandsdichte

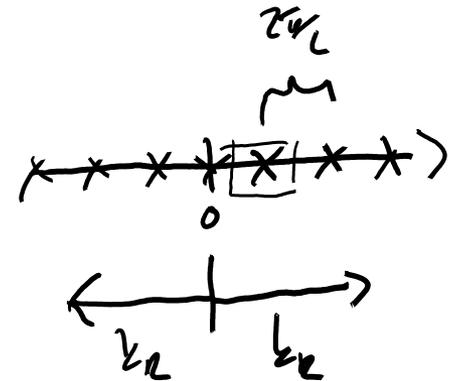
- Länge eines Zustands:

$$L_{\text{Zustand}} = \frac{2\pi}{L}$$

- Dispersionsrelation:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}$$



- Alle Zustände mit Energie $< W$ liegen innerhalb:

$$k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

- Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2mWL}}{\pi\hbar}$$

A1 d) Zustandsdichte

- Anzahl der Zustände pro Energieintervall:

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{m}L}{\pi\hbar\sqrt{2W}}$$

- Normierung & Spin:

$$g(W)_{1D} = 2\frac{1}{L}D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{W}}$$

$$\begin{aligned}
 N(W) &= \frac{\sqrt{2m}WL}{\pi\hbar} \\
 \Rightarrow \frac{dN(W)}{dW} &= \frac{\sqrt{2m}L}{\pi\hbar} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{W}} \\
 &= \frac{\sqrt{m}L}{\pi\hbar\sqrt{2W}}
 \end{aligned}$$

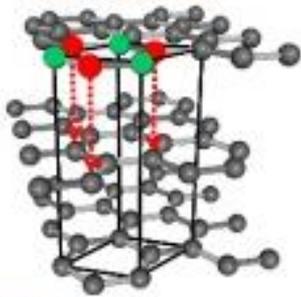
→ Proportional zu $\frac{1}{\sqrt{W}}$

$$[g_{1D}] = \frac{1}{J m}$$

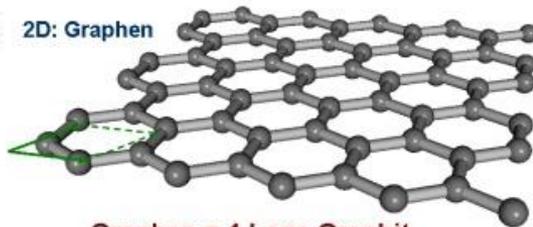
Zustandsdichte

Zustandsdichte in Halbleitern

3D: Graphit



2D: Graphen



Graphen = 1 Lage Graphit

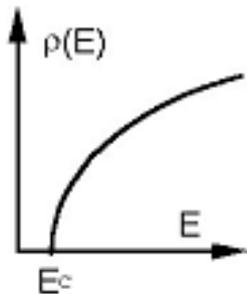
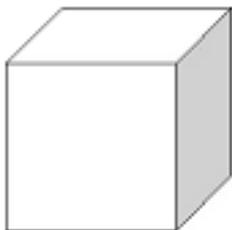


Quasi-1D: Kohlenstoffnanoröhren

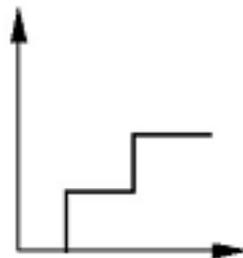
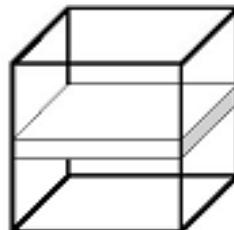
Quasi-0D: Fullerene



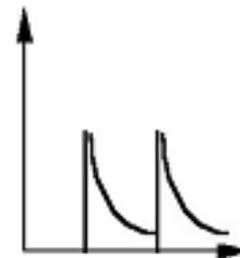
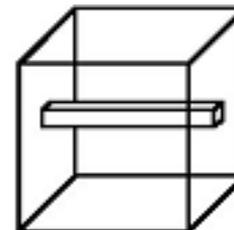
3D



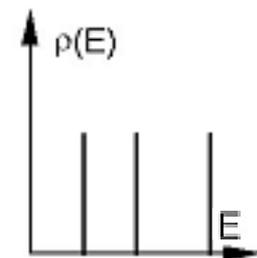
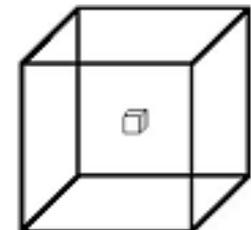
2D



1D

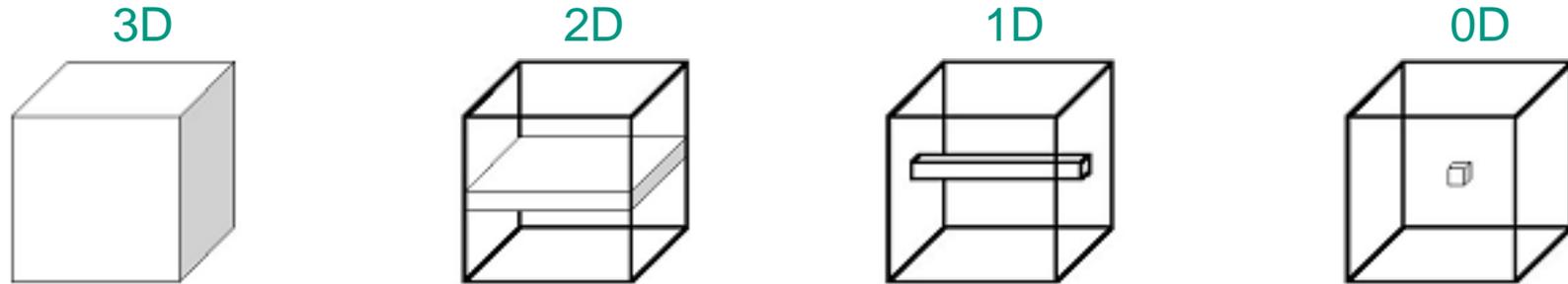


0D



Zustandsdichte

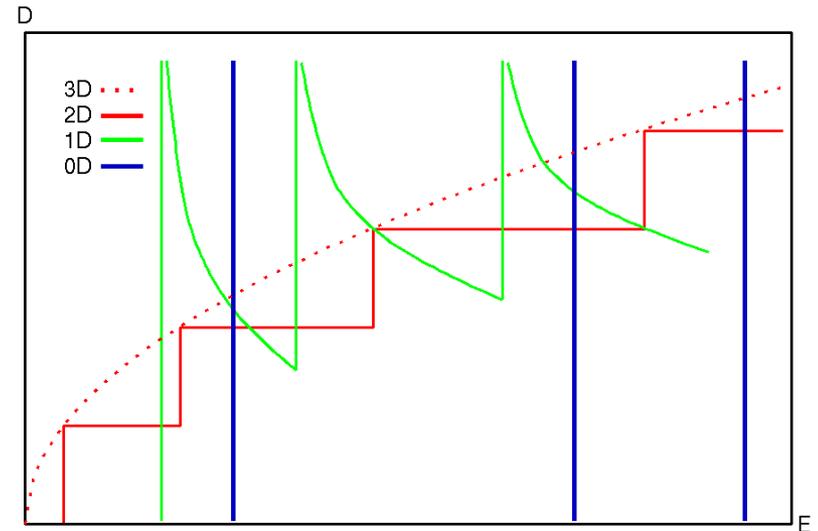
■ Zustandsdichte in Halbleitern



Bei 1D und 2D wird zur Berücksichtigung höherer Energieniveaus die Heaviside-Funktion („Einheitssprung“) herangezogen:

$$g(W)_{2D} \rightarrow g(W)_{2D} \sum_l \theta(W - W_l)$$

$$g(W)_{1D} \rightarrow \sum_l g(W - W_l)_{1D} \theta(W - W_l)$$



Einschub: Wozu das ganze?



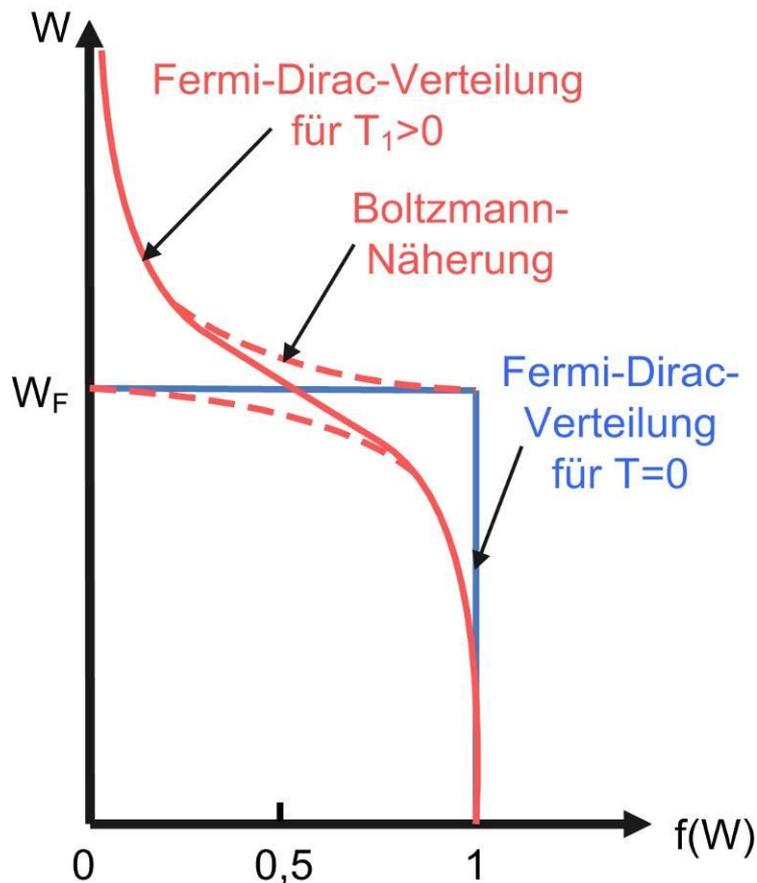
Wie viele Besucher sind im Zelt?

$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

↓ ✓
 Zustandsdichte Fermi-Dirac-Verteilung Ladungsträgerdichte

Fermi-Verteilung für Elektronen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein elektronischer Zustand bei einer Energie W besetzt ist?

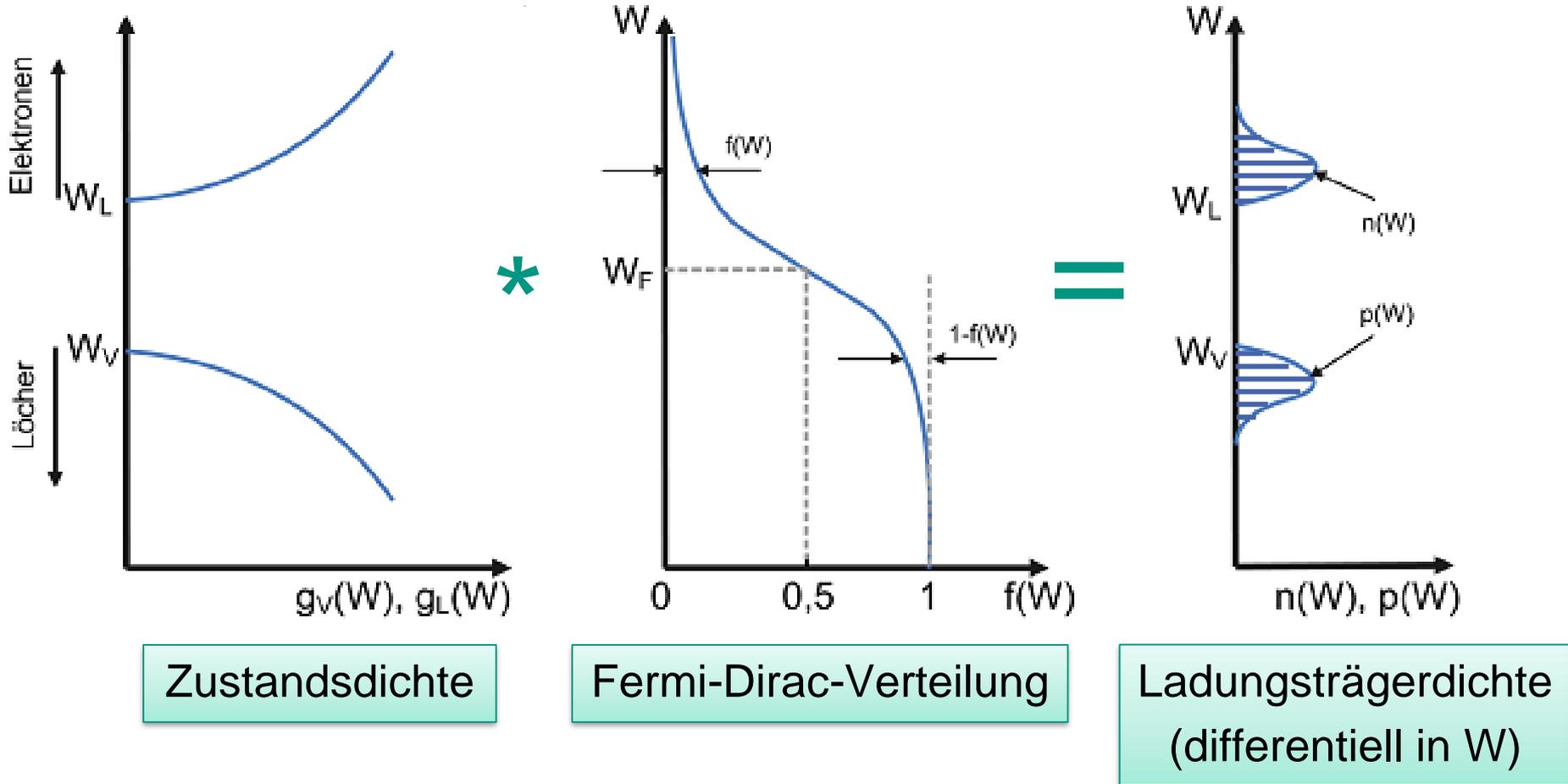


$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{\text{F}}}{k_{\text{B}}T}\right)}$$

- abhängig von Temperatur
- abhängig vom Abstand $(W - W_{\text{F}})$ von der Fermienergie W_{F}
- in Bändern Boltzmann-Approximation sinnvoll:

$$f_{\text{B}} = \exp\left(-\frac{W - W_{\text{F}}}{k_{\text{B}}T}\right)$$

Von der Fermi-Verteilung und der Zustandsdichte zu wahrscheinlichen Ladungsträgerdichten

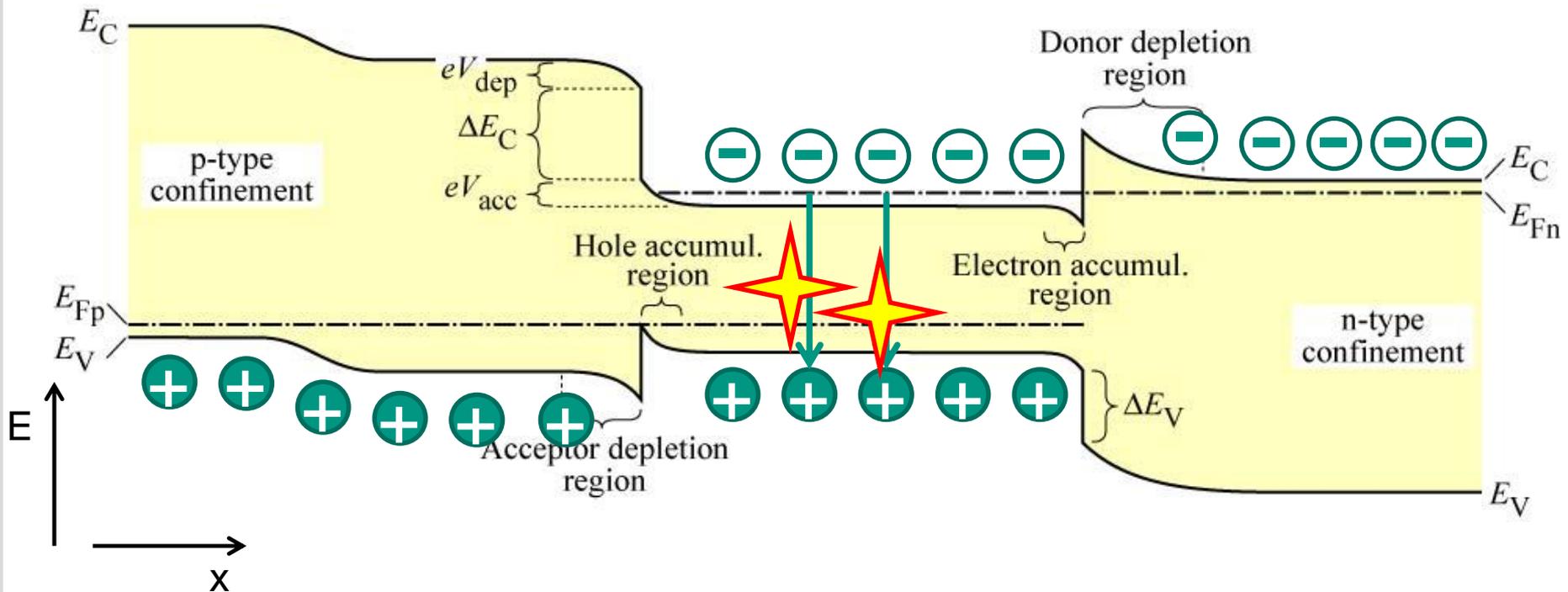


Leitungsband: $n = \int_{W_l}^{\infty} n(W) dW$

Valenzband: $p = \int_{-\infty}^{W_V} p(W) dW$

Ausgangsfrage

- Wo sitzen welche Ladungsträger?



Quelle: www.lightemittingdiodes.org

Einschub: Wozu das ganze?



Wie viele Besucher sind im Zelt?

$$\int \text{Sitzplätze}(d) \times \text{Besetzungswahrsch.}(d) = \text{Personenanzahl}$$

\downarrow ✓ \downarrow ✓ \downarrow ✓
 Zustandsdichte Fermi-Dirac-Verteilung Ladungsträgerdichte

A2 a) Intrinsische Halbleiter

Germanium hat eine Bandlücke von 0,69 eV. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche der Masse des freien Elektrons. Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichten von Elektronen und Löchern bei 0 K und bei Raumtemperatur.

■ Ansatz:

$$n \cdot p = N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{k_B T}} \left[\frac{1}{m^6} \right] \quad N_{\text{eff}}^{V,L} = 2 \left(\frac{m_{p,e}^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{m^3} \right]$$

■ Im intrinsischen Halbleiter gilt $n = p$ und

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} \left[\frac{1}{m^3} \right]$$

$$n_i(T = 300 \text{ K}) = 4,03 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$n_i(T = 0 \text{ K}) = 0$$

A2 b) Intrinsische Halbleiter

Bestimmen Sie die Stromdichte durch einen 1 mm langen Germanium-Kristall, bei einer angelegten Spannung von 2 V. Recherchieren Sie dazu die Beweglichkeiten der Elektronen und Löcher!

■ Ansatz: Driftstrom

$$j = (ne\mu_e + pe\mu_h)E = e(n\mu_e + p\mu_h)\frac{U}{d}$$

■ Mit $n = p = n_i$ ergibt sich:

$$j = en_i(\mu_e + \mu_h)\frac{U}{d}$$

Recherche:

$$\mu_e = 3900 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\mu_h = 1900 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$j(T = 300 \text{ K}) = 7500 \text{ Am}^{-2} = 0,75 \text{ Acm}^{-2}$$

$$j(T = 0 \text{ K}) = 0$$

A3 Fermi-Energie im intrinsische Halbleiter

In einem intrinsischen Halbleiter betrage die effektive Masse von Elektronen im Minimum des Leitungsbandes ein Drittel der effektiven Masse von Löchern im Maximum des Valenzbandes. Wo liegt das Fermi-Niveau im Falle der Eigenleitung bei Raumtemperatur? Die Boltzmann-Näherung sei gültig.

■ Ansatz:

$$n = p = n_i \quad n = N_{\text{eff}}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} \quad p = N_{\text{eff}}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

■ Daraus folgt:

$$N_{\text{eff}}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} = N_{\text{eff}}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}}$$

$$e^{\frac{2E_F}{k_B T}} = \frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{\frac{E_V + E_L}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \frac{2E_F}{k_B T} = \frac{E_V + E_L}{k_B T} + \ln\left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L}\right)$$
$$\Rightarrow E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L}\right)$$

■ Logarithmieren und nach E_F auflösen:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L}\right)$$

A3 Fermi-Energie im intrinsische Halbleiter

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \right) \quad N_{\text{eff}}^{V,L} = 2 \left(\frac{m_{p,e}^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

- Daraus folgt:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)$$

$m_e^* = \frac{1}{3} m_h^*$
 $\Rightarrow \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right) = \ln \left(\frac{m_h^*}{\frac{1}{3} m_h^*} \right) = \ln(3) \approx 1$

- Für $T = 0$ K liegt die Fermi-Energie genau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband.
- Mit steigenden Temperaturen verschiebt sich die Fermi-Energie zu höheren Energien.

Zusammenfassende Fragen

- Warum interessiert uns die elektronische Zustandsdichte?
- Welche Verteilung bestimmt die energetische Verteilung für Elektronen? Welches sind die enthaltenen Parameter?
- Wie berechnet man die Ladungsträgerdichte im Halbleiter?
- Wie ist das Verhältnis von Elektronen- und Löcherdichte im intrinsischen Halbleiter? Wo liegt das Fermi-Niveau?

Von der Fermi-Verteilung und der Zustandsdichte zu Ladungsträgerdichten

- Wir wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zustand einer bestimmten Energie bei einer bestimmten Temperatur mit einem Elektron besetzt ist:
→ Fermi-Verteilung $f(W, T)$
- Wir können die Dichte der möglichen elektronischen Zustände einer bestimmten Energie in einem System berechnen:
→ Zustandsdichte $g_L(W)$ (Löcher/Valenzband: $g_V(W)$)
- Wie groß ist nun die Elektronen- und Löcherdichte bei einer bestimmten Energie?
→ $n(W, T) = g_L(W) \cdot f(W, T)$
→ $p(W, T) = g_V(W) \cdot (1 - f(W, T))$
- Wie groß sind die Ladungsträgerdichten im Leitungs- und Valenzband?

$$n = \int_{W_l}^{\infty} n(W) dW \quad p = \int_{-\infty}^{W_v} p(W) dW$$

Termine

- Nächste und letzte Übung: Freitag, 03.07.2020
- Tutorium 5: 29.06. – 03.07.2020
- Fragestunde: XX.XX.2020, XX:00 -XX:00
- Klausur: XX.XX.2020, XX:00 Uhr (Anmeldeschluss XX.XX.2020!)
- Sitzverteilung in den Hörsälen wird spätestens ein Tag vor der Klausur in ILIAS veröffentlicht und im Schaukasten des LTI ausgehängt