

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M. Sc. Benjamin Fritz

M. Sc. Henning Mescher

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

Lösung zum 7. Übungsblatt

Besprechung: Übung 26. Juni 2020

1. Zustandsdichte

- a) Beschreiben Sie, was man unter dem Begriff „Zustandsdichte“ versteht!

Der Begriff Zustandsdichte bezieht sich auf eine Dichte pro Energieintervall. Das heißt, die Zustandsdichte gibt an, wie viele erlaubte Zustände in einem System in einem infinitesimalen Gebiet zwischen W und $W + dW$ auftreten. Meist wird die Zustandsdichte auf das Volumen des Systems normiert, d.h. wir haben es mit einer Größe der Einheit «Zustände pro Energie und pro Volumen» zu tun. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung stets von der Zustandsdichte für Elektronen sprechen, man kann aber auch für andere (Quasi-)Teilchen Zustandsdichten bestimmen, z.B. für die Quanten der Gitterschwingungen, die sogenannten Phononen.

- b) Skizzieren Sie den Verlauf der elektronischen Zustandsdichte $g_L(W)$ im Leitungsband eines Halbleiters. Welche Annahmen wurden gemacht, um diesen Ausdruck zu erhalten?

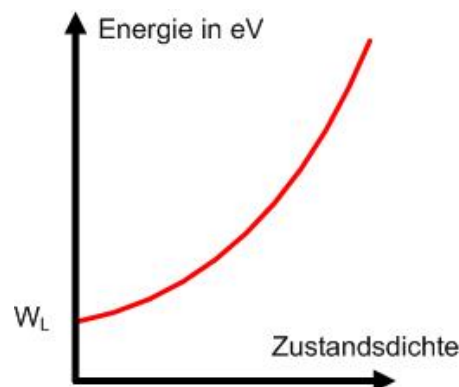


Abbildung 1: 3D Zustandsdichte

Die Zustandsdichte im Leitungsband eines Halbleiters wurde im Skript hergeleitet als

$$g_{3D}(W) = \frac{4\pi(2m_{\text{eff}})^{3/2}}{h^3} \sqrt{W - W_L}. \quad (1)$$

Sie ist in Abbildung 1 skizziert. Beachten Sie die Proportionalität zu $\sqrt{W}$! Die wichtigste Näherung ist die der parabolischen Bänder, woraus die Dispersionsrelation

$$W = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m} \quad (2)$$

sowie eine konstante effektive Masse folgt.

- c) Berechnen Sie die Zustandsdichte $g(W)$ für eine zweidimensionale Struktur. Gehen Sie dazu von einem zweidimensionalen k -Raum aus und benutzen Sie die gleiche Strategie wie in der Vorlesung für drei Dimensionen gezeigt.

Wie in drei Dimensionen betrachten wir die Zustände im k -Raum. Periodische Randbedingungen liefern erlaubte Wellenzahlen der Art $k_i = 2n_i\pi/L$, wobei L die Länge und Breite des Kristalls ist. Der Abstand zwischen zwei Punkten im k -Raum ist also $2\pi/L$. In Abbildung 2 sind die Zustände im zweidimensionalen k -Raum durch Kreuze markiert, exemplarisch ist ein erlaubter Gitterpunkt herausgegriffen. Nun

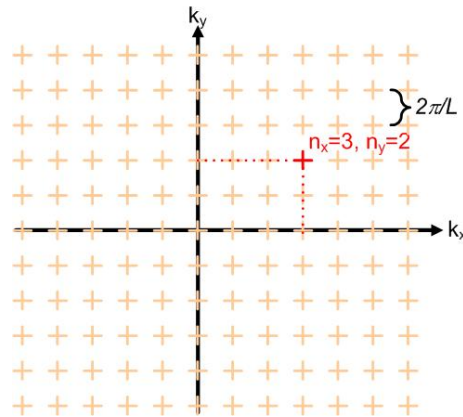


Abbildung 2: Karte möglicher Zustände eines 2D-Systems im k -Raum

betrachten wir die Dispersionsrelation. In Parabelnäherung gilt erneut:

$$W = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m} \quad (3)$$

Durch Umstellen erhalten wir daraus:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mW}{\hbar^2} \quad (4)$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis im k -Raum, der den Radius $k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$ hat. Wir können diesen Kreis also in unseren k -Raum einzeichnen. Alle Punkte, die auf seinem Umfang liegen, bezeichnen Zustände mit gleicher Energie, somit haben alle Zustände innerhalb des Kreises eine kleinere Energie als diese.

Um zur gesuchten Zustandsdichte zu kommen, zählen wir nun die Zustände mit einer Energie kleiner W . Das kann man tun, indem man die Fläche des Kreises zur Energie W im k -Raum mit der Fläche eines Zustands vergleicht. Da zwischen zwei Zuständen immer der gleiche Abstand liegt, beträgt die k -Fläche eines Zustands

$$F_{\text{Zustand}} = \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad (5)$$

wobei L die Länge des quadratischen Kristalls ist. Nun schauen wir, wie in Abbildung 3 gezeigt, wie viele Zustände N in den Kreis zur Energie W passen.

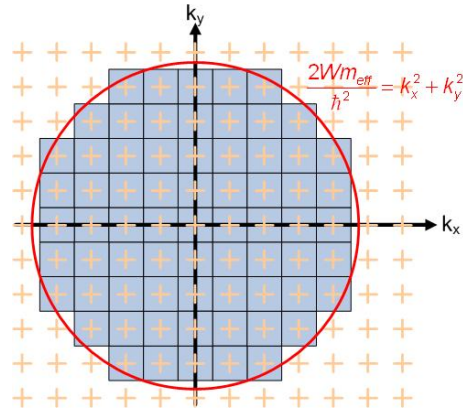


Abbildung 3: Karte möglicher Zustände eines 2D-Systems im k -Raum: Zustände mit einer Energie $W_k < W$ sind durch blaue Quadrate markiert und befinden sich innerhalb eines Kreises mit dem Radius $k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$.

$$N(W) = \frac{F_{\text{Kreis}}}{F_{\text{Zustand}}} = \frac{\pi k_R^2}{\frac{4\pi^2}{L^2}} = \frac{\pi 2mWL^2}{4\hbar^2\pi^2} = \frac{mWL^2}{2\hbar^2\pi} \quad (6)$$

Wir haben nun einen Ausdruck für die Anzahl der Zustände bis zu einer Energie W gefunden. Der gesuchte Ausdruck soll jedoch die Anzahl der Zustände in einem Energieintervall, nicht die Zustände mit einer Energie kleiner als W angeben. Diese Information können wir erhalten, indem wir den Zuwachs des Ausdrucks für N mit der Energie betrachten. Mathematisch erhalten wir diesen als Ableitung von N nach W :

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{mL^2}{2\hbar^2\pi} \quad (7)$$

$D(W)$ beschreibt die Anzahl an Zuständen pro Energieintervall. Zu guter Letzt müssen wir diese nun noch auf die Fläche des Kristalls (L^2) normieren. Außerdem sollten wir beachten, dass wir bisher den Spin nicht in die Überlegungen einbezogen haben. Somit kann jeder Zustand von zwei Elektronen besetzt werden. Letztlich kommen wir zu:

$$g(W)_{2D} = 2 \frac{1}{F} D(W) = \frac{m}{\hbar^2\pi} \quad (8)$$

Die Zustandsdichte ist also **konstant**.

- d) Nun betrachten wir die Zustandsdichte in einem «Quantendraht». Das sind Gebilde, die in erster Näherung als eindimensional angenommen werden können. Führen Sie im eindimensionalen k -Raum die Ableitung der Zustandsdichte durch!

In einer Dimension verläuft die Ableitung analog zur Herleitung in zwei Dimensionen. Unsere Darstellung im k -Raum reduziert sich auf eine Gerade. Die Länge eines Zustands ist

$$L_{\text{Zustand}} = \frac{2\pi}{L}. \quad (9)$$

Alle Zustände mit einer Energie kleiner W liegen maximal $k_R = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$ vom Ursprung entfernt. So erhalten wir für die Zahl der Zustände:

$$N(W) = \frac{L_{\text{Strecke}}}{L_{\text{Zustand}}} = \frac{2k_R}{\frac{2\pi}{L}} = \frac{\sqrt{2mWL}}{\pi\hbar} \quad (10)$$

Der Zuwachs wird

$$D(W) = \frac{dN(W)}{dW} = \frac{\sqrt{mL}}{\pi\hbar\sqrt{2W}} \quad (11)$$

und für die Zustandsdichte folgt

$$g(W)_{1D} = 2 \frac{1}{L} D(W) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{W}} \quad (12)$$

mit einer Abhängigkeit von der Energie gemäß $1/\sqrt{(W)}$.

2. Intrinsische Halbleiter

Germanium hat eine Bandlücke von 0,69 eV. Die effektive Masse der Elektronen und der Löcher entspreche der Masse des freien Elektrons.

- a) Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichten von Elektronen und Löchern bei 0 K und bei Raumtemperatur.

Das Massenwirkungsgesetz lautet:

$$n \cdot p = N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{k_B T}} \quad (13)$$

Für einen intrinsischen Halbleiter wie Germanium mit $n=p$ gilt bei $T=300\text{ K}$:

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} \quad (14)$$

$$= (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} \quad (15)$$

$$= 4,03 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \quad (16)$$

$$= 4,03 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (17)$$

- b) Bestimmen Sie die Stromdichte durch einen 1 mm langen Germanium-Kristall, bei einer angelegten Spannung von 2 V. Recherchieren Sie dazu die Beweglichkeiten der Elektronen und Löcher!

Die Stromdichte berechnet sich aus:

$$j = (ne\mu_e + pe\mu_h)E = e(n\mu_e + p\mu_h)\frac{U}{d} \quad (18)$$

Mit $\mu_e = 3900 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ und $\mu_h = 1900 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ (siehe Internet oder einschlägige Literatur) folgt:

$$j = 7500 \text{ Acm}^{-2} = 0,75 \text{ Acm}^{-2}. \quad (19)$$

Entsprechend den Erwartungen gilt für einen intrinsischen Halbleiter: Bei $T=0\text{K}$ sind $n_i = 0$ und $j = 0$, da $e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} = 0$.

3. Fermi-Energie im intrinsischen Halbleiter

In einem intrinsischen Halbleiter betrage die effektive Masse von Elektronen im Minimum des Leitungsbandes ein Drittel der effektiven Masse von Löchern im Maximum des Valenzbandes. Wo liegt das Fermi-Niveau im Falle der Eigenleitung bei Raumtemperatur? Die Boltzmann-Näherung sei gültig.

Aus $n_i = n = p$ folgt:

$$N_{\text{eff}}^L \cdot e^{\frac{E_F - E_L}{k_B T}} = N_{\text{eff}}^V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{k_B T}} \quad (20)$$

$$e^{\frac{2E_F}{k_B T}} = \frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{\frac{E_V + E_L}{k_B T}} \quad (21)$$

Logarithmieren und Auflösen nach E_F liefert:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_{\text{eff}}^V}{N_{\text{eff}}^L} \right) \quad (22)$$

Einsetzen von $N_{\text{eff}} \propto (m^*)^{3/2}$ liefert:

$$E_F = \frac{E_L + E_V}{2} + \underbrace{\frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)}_{\approx 1} \quad (23)$$

Für $T=0\text{K}$ liegt die Fermi-Energie genau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband. Mit steigenden Temperaturen verschiebt sich die Fermi-Energie zu höheren Energien.