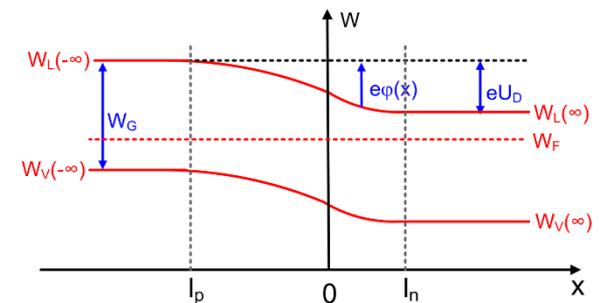
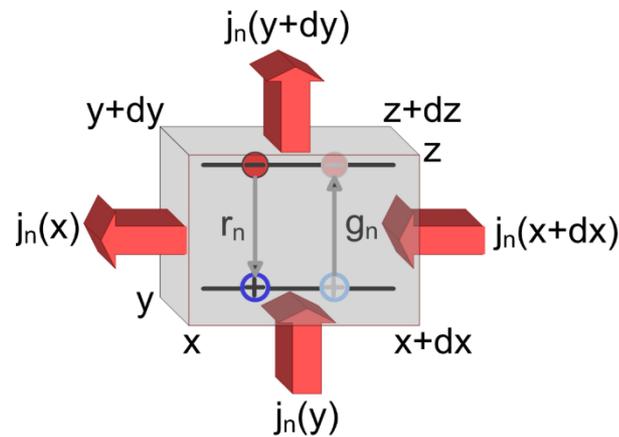
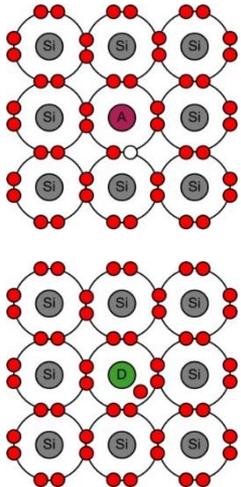


Von der Dotierung zum pn-Übergang

8. Übung Optik und Festkörperelektronik



Terminplanung

| Tag/Monat | April | Mai | Juni | Juli |
|-----------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 1 | | 1. Mai Feiertag | Pfingstmontag | |
| 2 | | | V11 FE (8) | V17 FE (14) |
| 3 | | | | Ü8 FE (7), Ausgabe T7 |
| 4 | | | V12 FE (9) | |
| 5 | | V4 FE (1) | U5 FE (4), Ausgabe T3 | |
| 6 | | | | Tut 6 |
| 7 | | V5 FE (2), Ausgabe Ü2 | | V18 FE (15) |
| 8 | | | | |
| 9 | | | V13 FE (10) | V19 FE (16), (Institutsführung) |
| 10 | | | Ausgabe Ü6/T4 | Ausgabe Ü9/T8 |
| 11 | | Tut 1 | Fronleichnam | |
| 12 | | V6 FE (3), Ausgabe Ü3 | Brückentag | |
| 13 | | | | Tut 7 |
| 14 | | U2 FE (1) | | V20 FE (17) |
| 15 | | V7 FE (4), Ausgabe T2 | Tut 3 | |
| 16 | | | | |
| 17 | | | | U9 FE (8), Ausgabe Ü10 |
| 18 | | | V14 FE (11) | |
| 19 | | U3 FE (2) | U6 FE (5), Ausgabe Ü7/T5 | |
| 20 | VL-Beginn | Ausgabe Ü4 | | Tut 8 |
| 21 | V1 Optik (1), Ausgabe Ü1 | Christi Himmelfahrt | | V21 FE (18) |
| 22 | | V8 FE (5) | Tut 4 | |
| 23 | V2 Optik (2) | | V15 FE (12) | V22 FE (19) |
| 24 | | | | U10 FE (9), VL-Ende |
| 25 | | Tut 2 | | |
| 26 | | V9 FE (6) | Ü7 FE (6), Ausgabe Ü8/T6 | |
| 27 | | | | |
| 28 | V3 Optik (3) | V10 FE (7) | | |
| 29 | Deadline Tut.-Anmeldung | U4 FE (3), Ausgabe Ü5 | Tut 5 | |
| 30 | U1 Optik, Ausgabe T1 | | V16 FE (13) | |
| 31 | | Pfingsten | | |

| |
|------------|
| Wochenende |
| Feiertag |
| Vorlesung |
| Übung |
| Tutorium |
| Brückentag |

Ausgabe:
Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht

Stand:10.06.2020

Dienstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Donnerstagstermine: 11:30 - 13:00, 30.46 Chemie, Neuer Hörsaal
 Freitagstermine: 11:30 - 13:00, 11.40 Johann-Gottfried-Tulla-Hörsaal

Infos zur Klausur

- Klausurtermin: ??.??..2020, ??:?? Uhr bis ??:?? Uhr
- Anmeldebeginn: ??.??..2020
- Anmeldeschluss: ??.??..2020
- Abmeldeschluss: ??.??..2020
- 1 Klausur:
„Optik und Festkörperelektronik“
reine „Festkörperelektronik“ wird nicht mehr angeboten!

Anmeldung

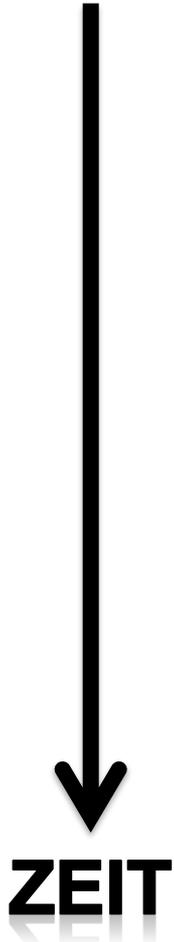
- Für ETEC PO2007: über QISPOS
- Für ETEC PO2015: über CAS-Campus

Klausurvorbereitung

- Relevant sind: Übungen, Tutorien, Vorlesung, Skript
- Fragestunde
 - ???.???.2020, ??:?? -??:??
 - Wird als online Veranstaltung stattfinden
- Danach werden keine Fragen mehr per Mail beantwortet.

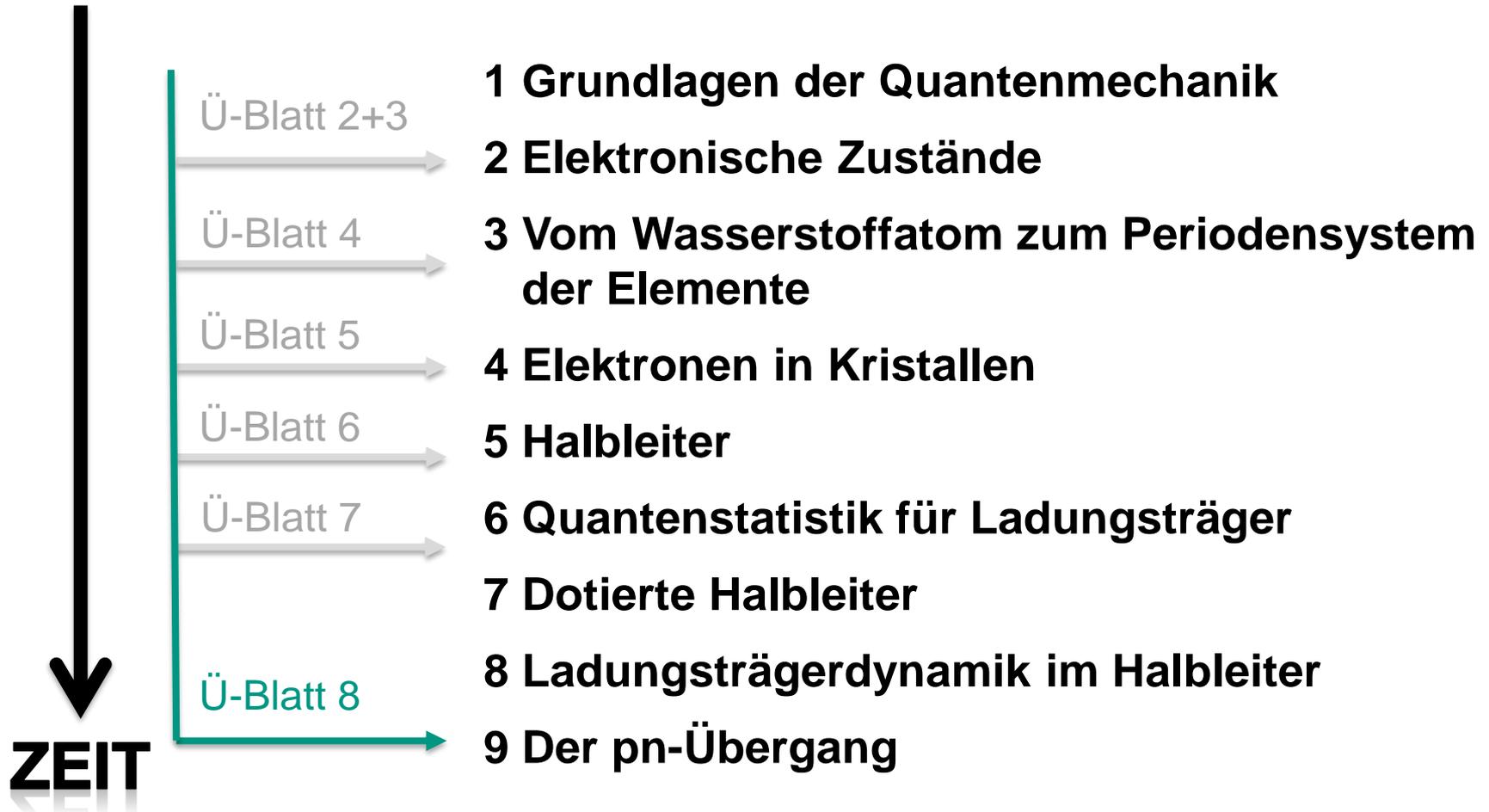


Stand der Dinge



1. Grundlagen der Quantenphysik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen im Kristall
5. Halbleiter
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Ladungsträgerdynamik im Halbleiter
9. Der pn-Übergang

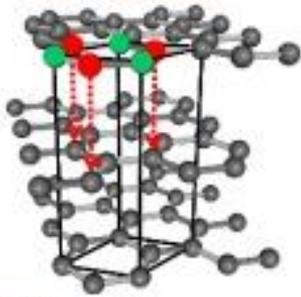
Stand der Dinge



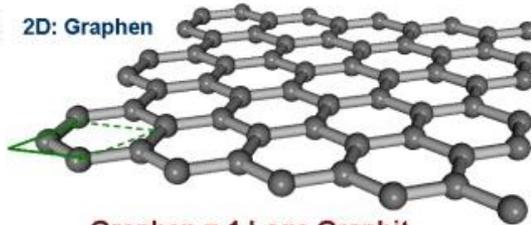
Wiederholung

■ Zustandsdichte in Halbleitern

3D: Graphit



2D: Graphen



Graphen = 1 Lage Graphit

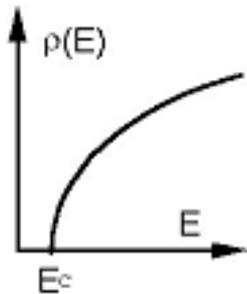
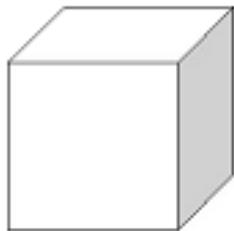


Quasi-1D: Kohlenstoffnanoröhren

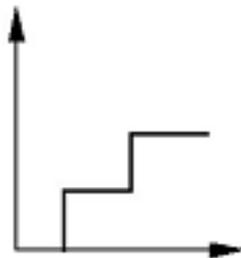
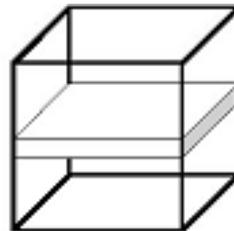
Quasi-0D: Fullerene



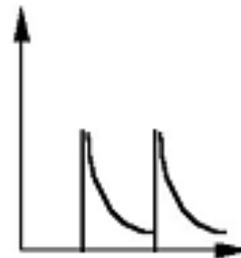
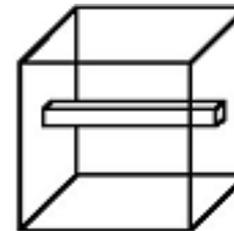
3D



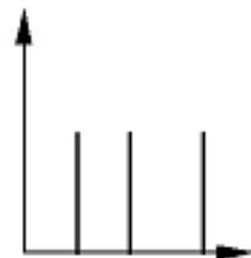
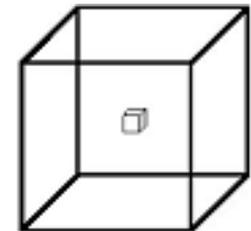
2D



1D

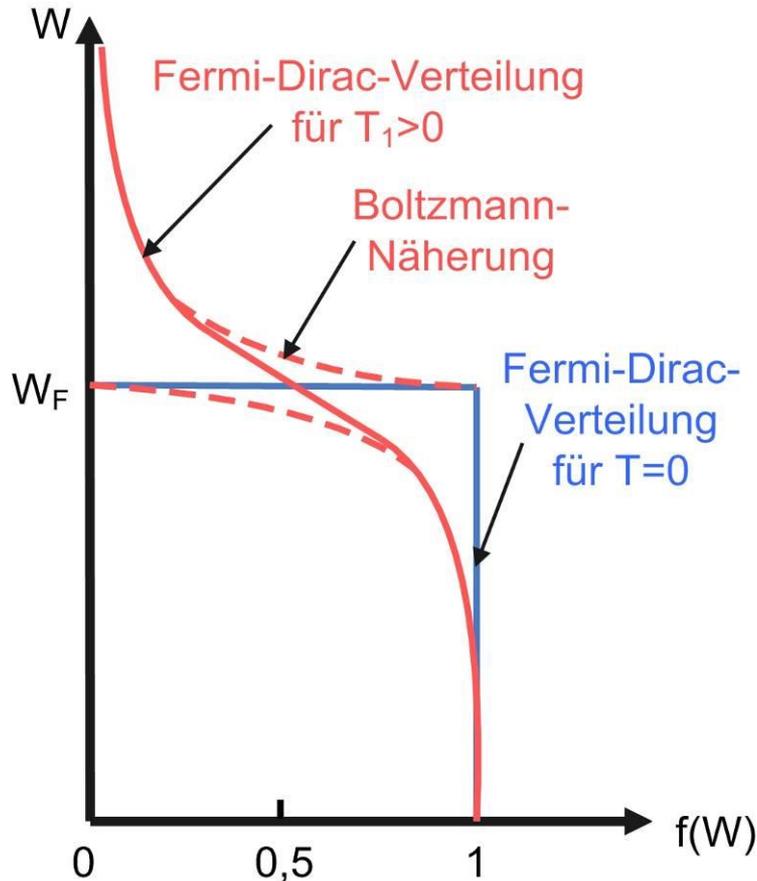


0D



Wiederholung

■ Fermi-Dirac-Verteilung

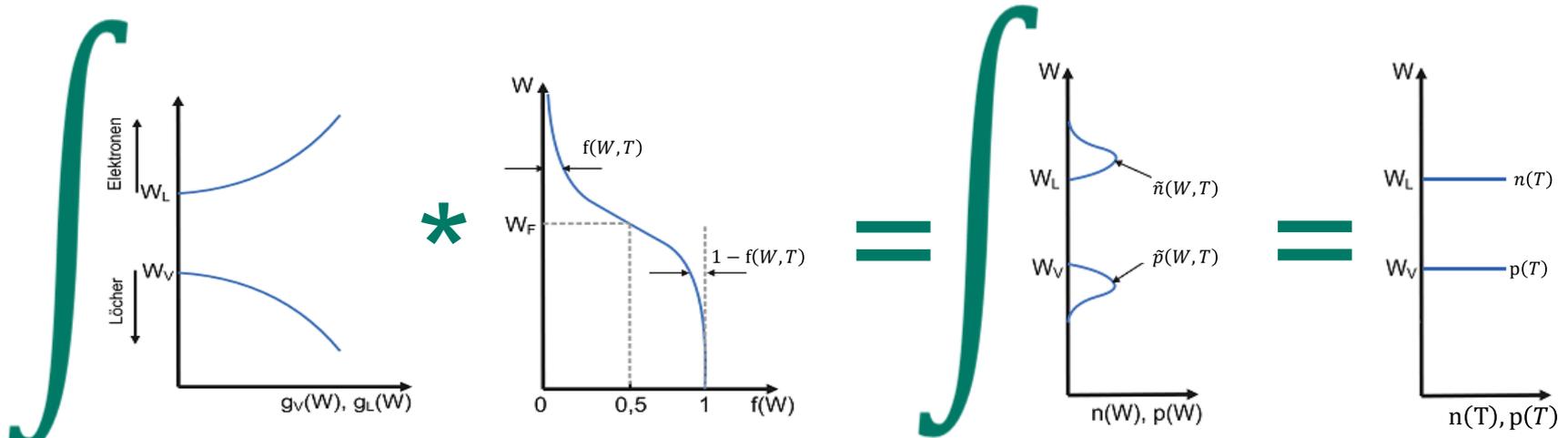


$$f_{\text{FD}} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{W - W_{\text{F}}}{k_{\text{B}}T}\right)}$$

■ Boltzmann-Näherung:

$$f_{\text{B}} = \exp\left(-\frac{W - W_{\text{F}}}{k_{\text{B}}T}\right)$$

Wiederholung



Achtung: hier intrinsischer Fall, da $n = p$

Ladungsträgerdichten

$$n(T) = \int_{W_L}^{\infty} \tilde{n}(W, T) dW = \int_{W_L}^{\infty} g_L(W) \cdot f(W, T) dW$$

$$p(T) = \int_{-\infty}^{W_V} \tilde{p}(W, T) dW = \int_{-\infty}^{W_V} g_V(W) \cdot (1 - f(W, T)) dW$$



Makroskopische
Eigenschaften des HL

z.B. elektrische
Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot (n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)$$

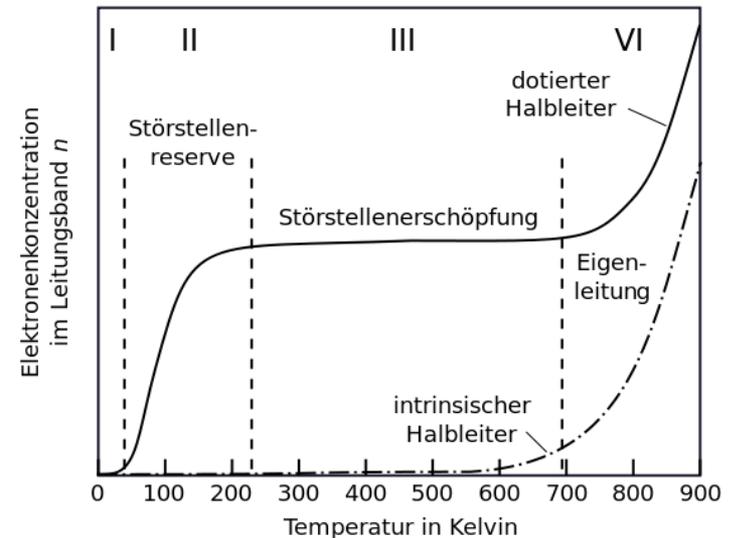
Wiederholung – intrinsischer Halbleiter

- Eigenleitung eines intrinsischen HL: Ladungsträger entstehen nur durch thermische Anregung von Elektronen aus dem Valenzband:

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} \cdot e^{-\frac{W_L - W_V}{2k_B T}} = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}}$$

- Temperaturabhängige Fermi-Energie im intrinsischen HL:

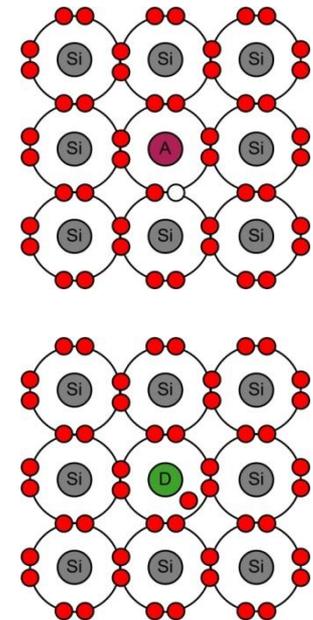
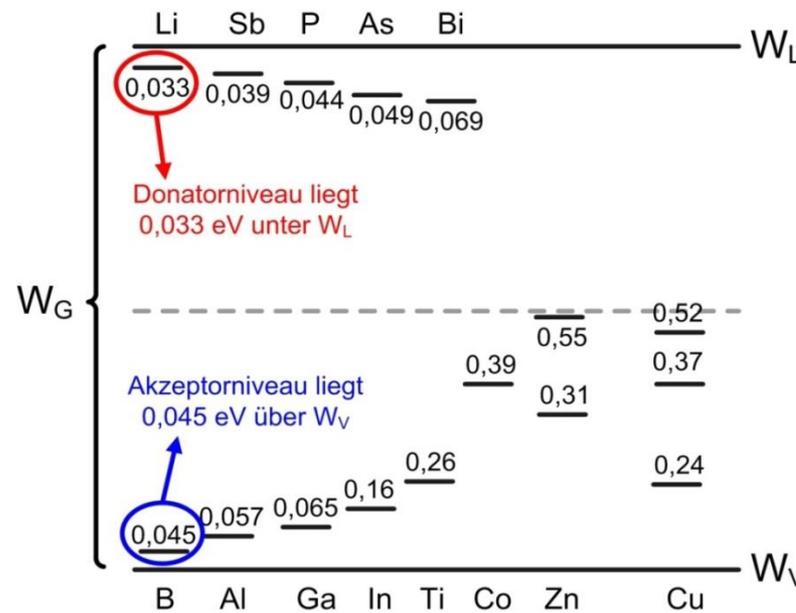
$$W_F = \frac{W_L + W_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \cdot \ln\left(\frac{m_{V,h}^*}{m_{L,e}^*}\right)$$



A1 Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

- p-dotierter Halbleiter mit Bandlücke $W_G = 1\text{eV}$
- Akzeptorkonzentration sei $n_A = 10^{16}\text{ cm}^{-3}$
- Akzeptorniveau liege $0,065\text{eV}$ oberhalb der Valenzbandkante
- Effektive Masse der Elektronen und Löcher sei gleich der freien Elektronenmasse

Dotierstoffe in Si



A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Wie gross ist die Dichte der Loecher bei $T=300\text{ K}$? Vergleichen Sie diese mit der Dichte der Loecher in einem undotierten Halbleiter mit sonst gleichen Eigenschaften.

■ Intrinsischer Fall:

$$p = n_i = (m_e^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{W_g}{2k_B T}} = 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

Beachte: laut Aufgabenstellung mit $m_e^* = m_p^* = m_e$

■ Dotierter Fall: $p = n_i + n_A^-$

→ Besetzungsstatistik der Dotieratome ist zu beachten!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Donatoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

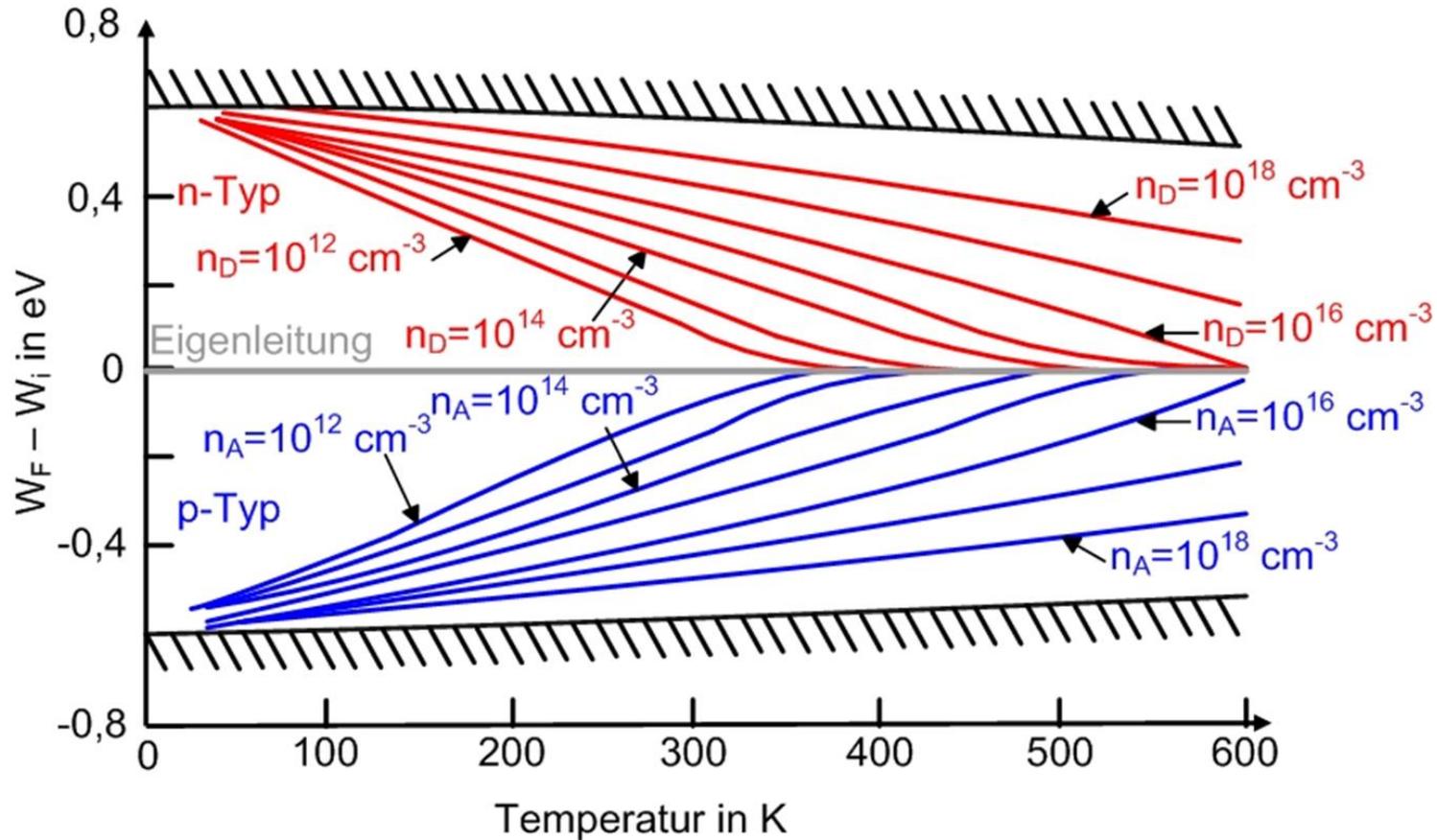
■ Akzeptoren:

$$f(W) = \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right)}$$

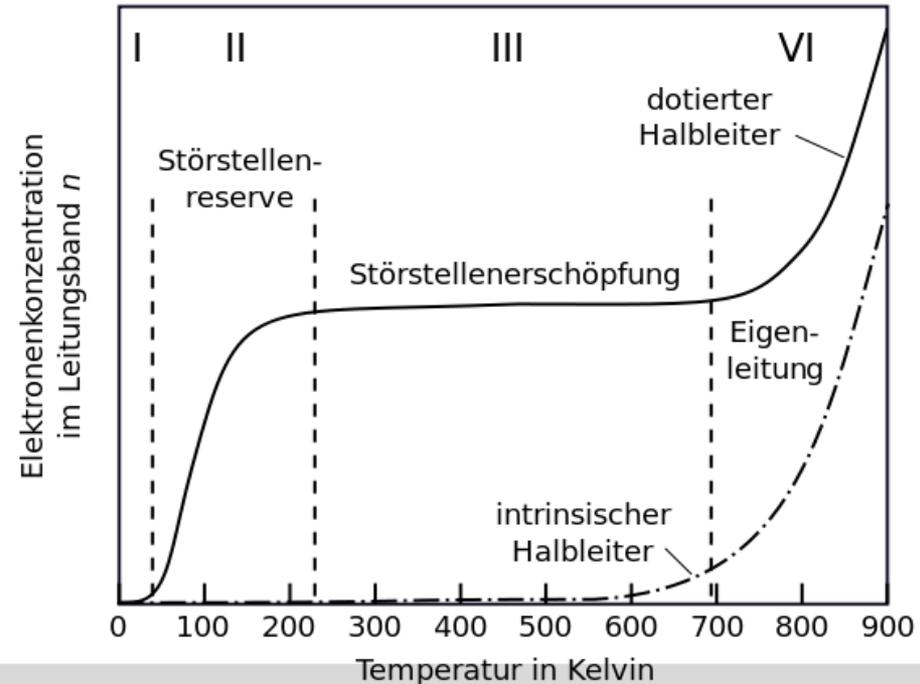
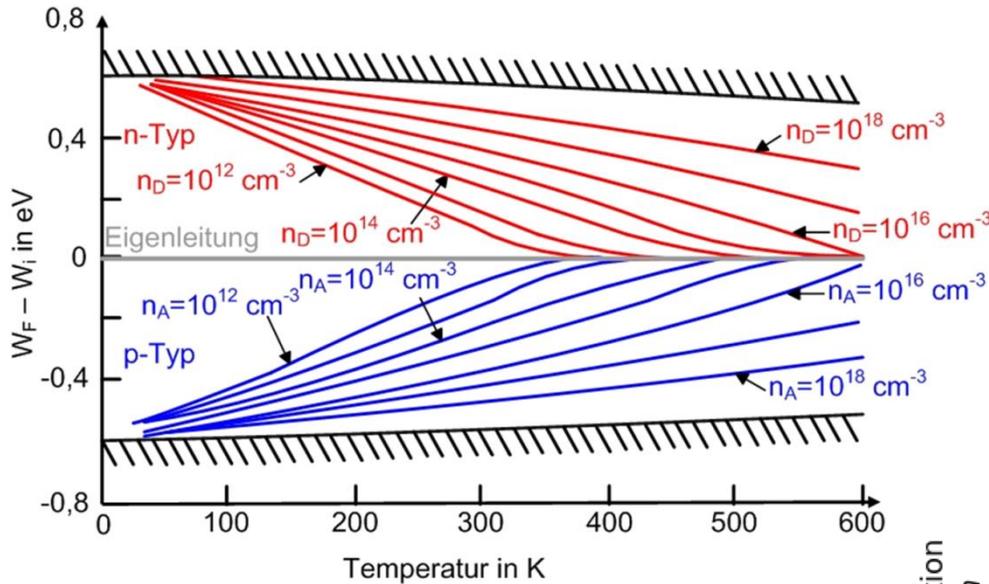
Entartungsfaktoren
 auf Grund veränderter
 Besetzungsstatistik i. Vgl.
 zu Bandzuständen

■ Damit folgt für die ionisierten Akzeptoren: $n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)}$

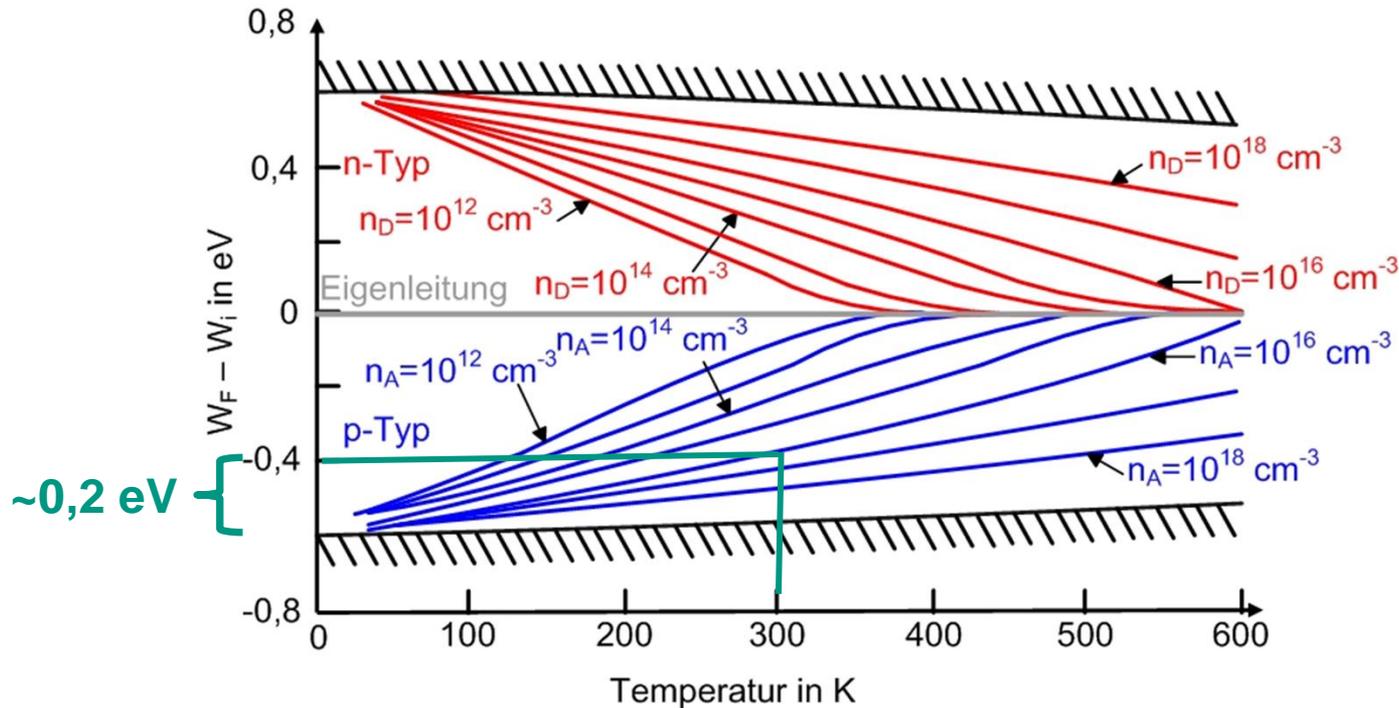
A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung



A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung



A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung



$$W_A - W_F = W_V + 0,065 \text{ eV} - W_V - 0,2 \text{ eV} = -0,135 \text{ eV}$$

$$n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{0,135 \text{ eV}}{0,026 \text{ eV}}\right)} = 0,99 n_A = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

→ Fast alle Akzeptoren sind ionisiert!

A1 a) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

■ Mit $n_A^- \gg n_i = n$ folgt $p \approx n_A^- = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Durch Dotierung lässt sich die Dichte der freien Ladungsträger stark erhöhen. Thermisch angeregte freie Ladungsträger sind dann bei Raumtemperatur vernachlässigbar.

A1 b) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Bestimmen Sie fuer beide Faelle die Dichten der freien Elektronen.

- Intrinsischer Fall: freie Ladungsträger werden in Paaren erzeugt

$$n = p = n_i = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

- Dotierter Fall:

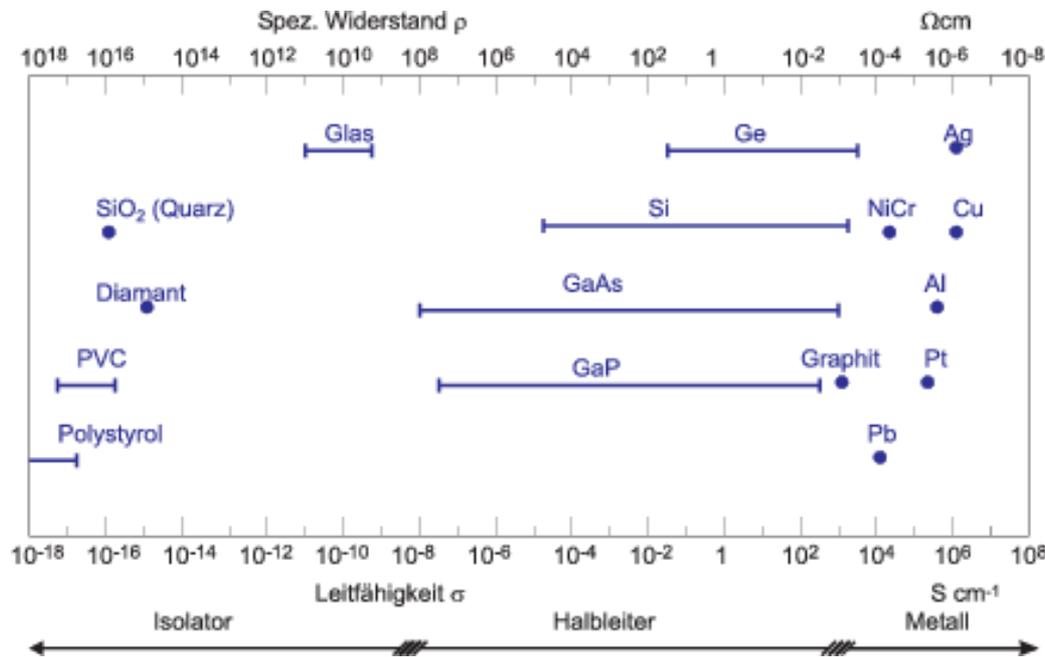
Mit *Massenwirkungsgesetz* $np = n_i^2$ folgt: $n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{cm}^3}$

→ Dichte der freien Elektronen wird durch die p-Dotierung verringert!

A1 c) Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

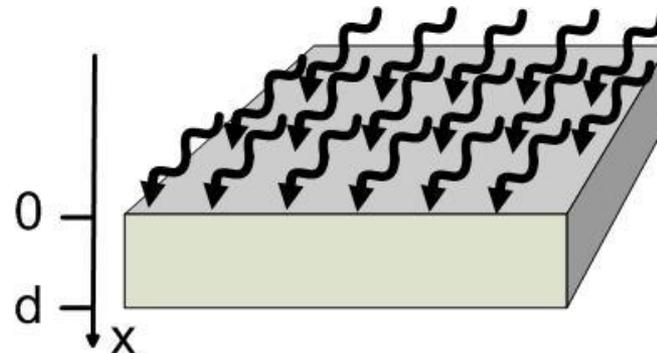
Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ bei $T=300\text{ K}$ unter der Annahme einer Loecherbeweglichkeit von $100\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $1500\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

■ Leitfähigkeit: $\sigma = e_0(\mu_p p + \mu_n n) \quad \rightarrow \quad \sigma = e_0(\mu_p p) = 16 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{V}\cdot\text{cm}}$



A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Wir betrachten einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d , der an der Oberseite homogen mit Licht bestrahlt wird. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

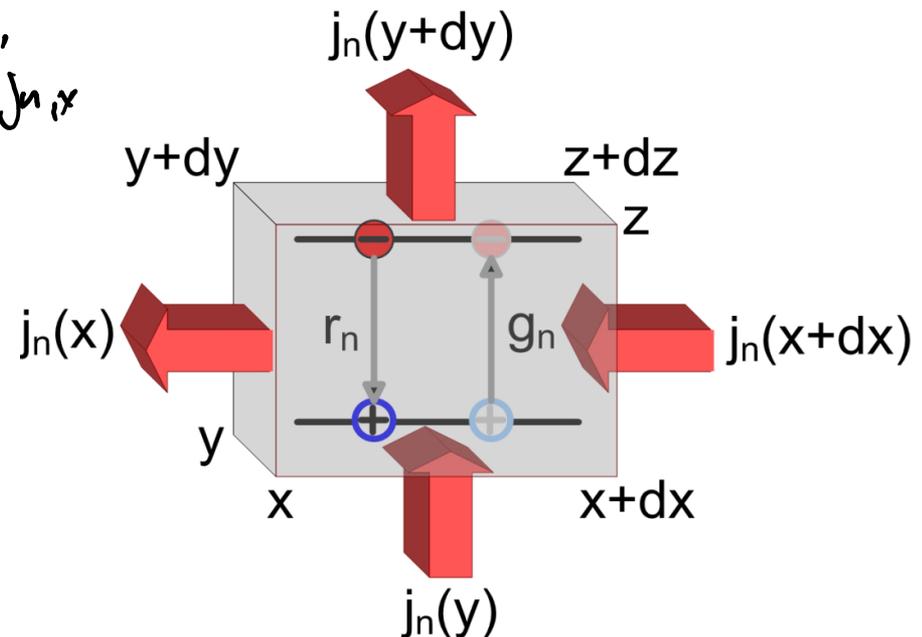


A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

$$\frac{j_{n,x}(x+dx) - j_{n,x}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} j_{n,x}$$

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n + e(g_n - r_n)$$

A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschussdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

- Hinweise aus Aufgabenstellung nutzen:
 - nur Δn betrachten
 - Koordinatensystem nur in x-Richtung angegeben \rightarrow 1D-Betrachtung
 - offenbar kein E-Feld angelegt \rightarrow kein Driftstrom \rightarrow nur Diffusionsstrom
 - Δn ist konstant auf Oberfläche: $\Delta n(0) = \Delta n_0$
 - Absaugung an Unterseite: $\Delta n(d) = 0$
 - stationärer Zustand: $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$
 - keine Generation außerhalb Randzone, Rekombinationsrate: $r = \frac{\Delta n}{\tau_n}$

A2 a) Halbleiter unter Beleuchtung

- Kontinuitätsgleichung (allgemein):

$$e \frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} \vec{J} + e(g_n - r_n) = e \vec{\nabla} (n \mu \vec{E} + D \vec{\nabla} n) + e(g_n - r_n)$$

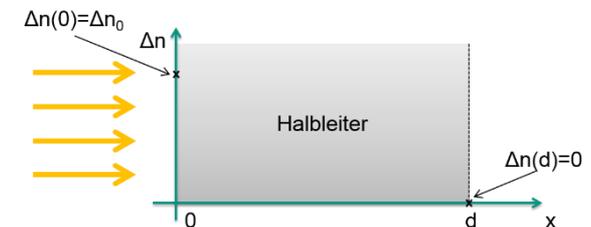
- Kontinuitätsgleichung (mit Hinweisen)

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} = 0$$

- Randbedingungen:

$$\Delta n(x = 0) = \Delta n_0$$

$$\Delta n(x = d) = 0$$



A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte.

- Kontinuitätsgleichung aus a): $0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n$
- 2 linear unabhängige Lösungen: $\Delta n \approx C_1 e^{x/L_n} + C_2 e^{-x/L_n}$

$$\Delta n(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right)$$

mit Diffusionslänge $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

$\lambda^2 \Delta n = \left(\frac{1}{L_n}\right)^2 C_1 e^{x/L_n} + \left(-\frac{1}{L_n}\right)^2 C_2 e^{-x/L_n} = \frac{1}{L_n^2} \Delta n$
 $\Rightarrow 0 = D_n \tau_n \frac{1}{L_n^2} \Delta n - \Delta n$
 $\Rightarrow L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

- Mit den Randbedingungen: $\Delta n_0 = C_1 + C_2$
- $0 = C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)$

A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Lösen der beiden Gleichungen:

$$\rightarrow C_1 = \Delta n_0 - C_2$$

$$\rightarrow 0 = (\Delta n_0 - C_2) \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)$$

$$\rightarrow \Delta n_0 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) = C_2 \left(\exp\left(\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \right)$$

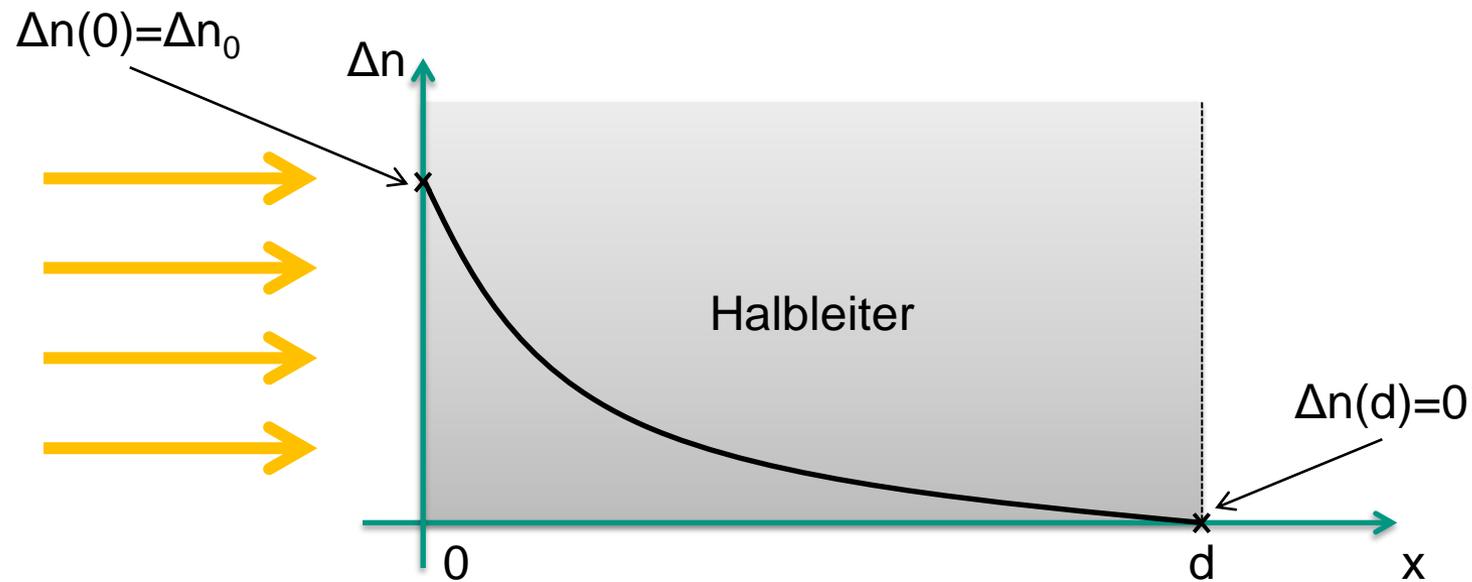
$$C_2 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{-\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} + \frac{\Delta n_0 \left(1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} = -\frac{\Delta n_0 \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}$$

$$C_1 = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)}$$

A2 b) Halbleiter unter Beleuchtung

$$\Delta n(x) = \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(\frac{x}{L_n}\right) + \frac{\Delta n_0}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)} \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right)$$

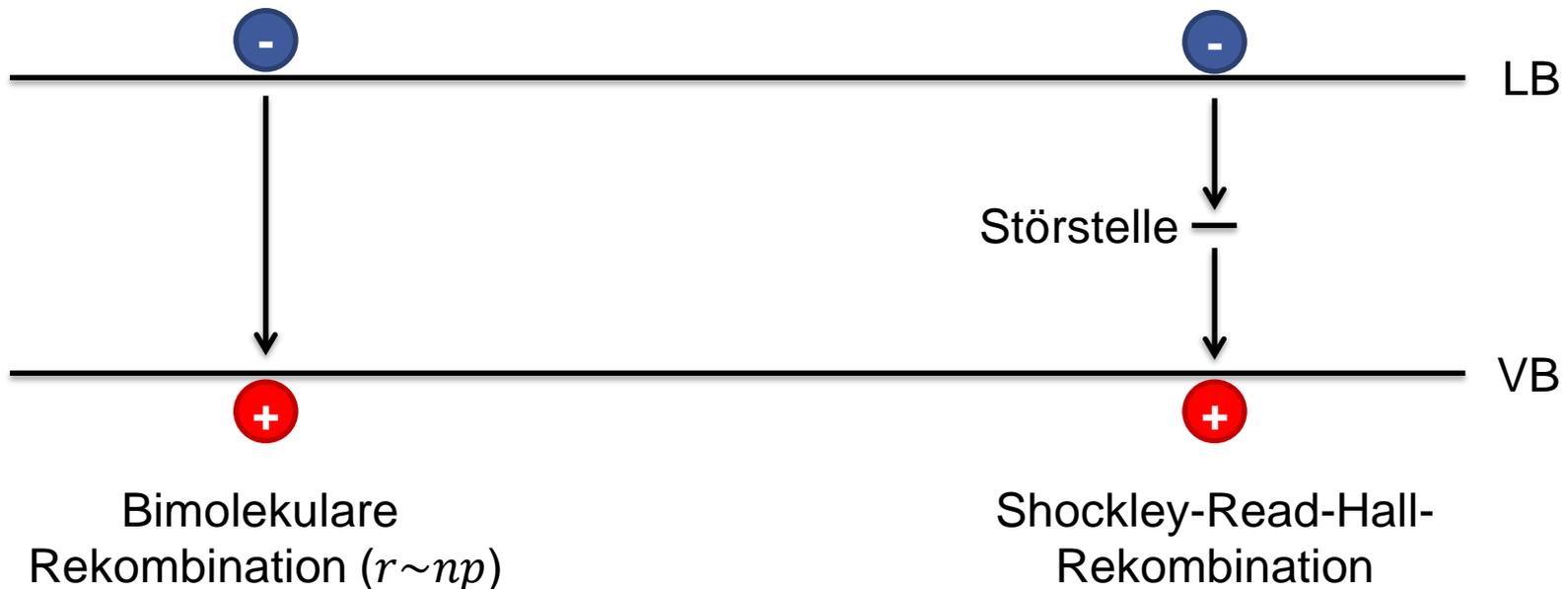


A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Ein allgemeinerer Ausdruck für die Rekombinationsrate eines konstant beleuchteten Halbleiters habe die folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

(Shockley-Read-Hall-Rekombination)



A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

Der Halbleiter sei stark n-dotiert. Die Löcheranzahl und die Elektronenanzahl seien durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im dotierten unbeleuchteten Halbleiter (n_{dot} und p_{dot}) auf n bzw. p erhöht, wobei $p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ gelten soll. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen die Gleichung so weit wie möglich.

■ Mit $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

■ Mit $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$:

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

Massenwirkungsgesetz

$$= \frac{\overbrace{n_{dot} p_{dot}}^{=n_i^2} + \Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

$$= \frac{\Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)}$$

A2 c) Halbleiter unter Beleuchtung

$p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ impliziert:

$$r = \frac{\Delta n \cancel{p}_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \cancel{\Delta p}}{\tau_p (n_{dot} + \cancel{\Delta n}) + \tau_n (\cancel{p}_{dot} + \cancel{\Delta p})}$$

p_{dot} , Δn und Δp sind vernachlässigbar gegenüber n_{dot}

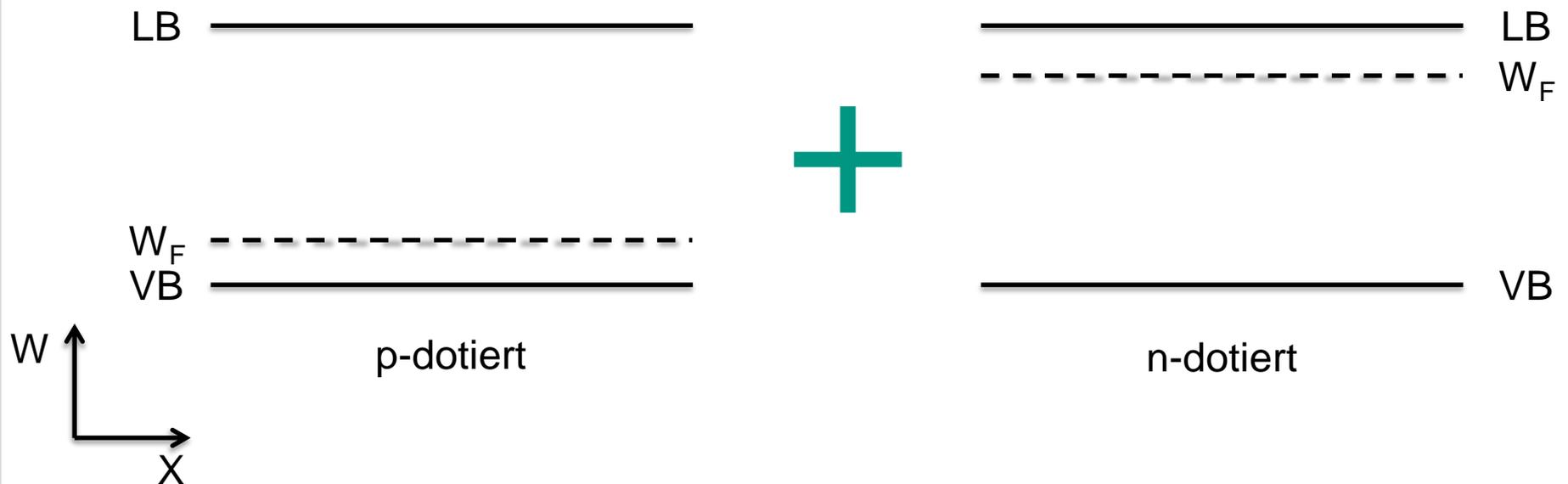
- Majoritäten (n) bleiben durch die Photogeneration fast unverändert, Minoritäten (p) steigen dagegen an
- Rekombinationsrate ist hauptsächlich durch Minoritäten bestimmt!

$$r = \frac{\Delta p n_{dot}}{\tau_p n_{dot}} = \frac{\Delta p}{\tau_p}$$

A3 pn-Übergang

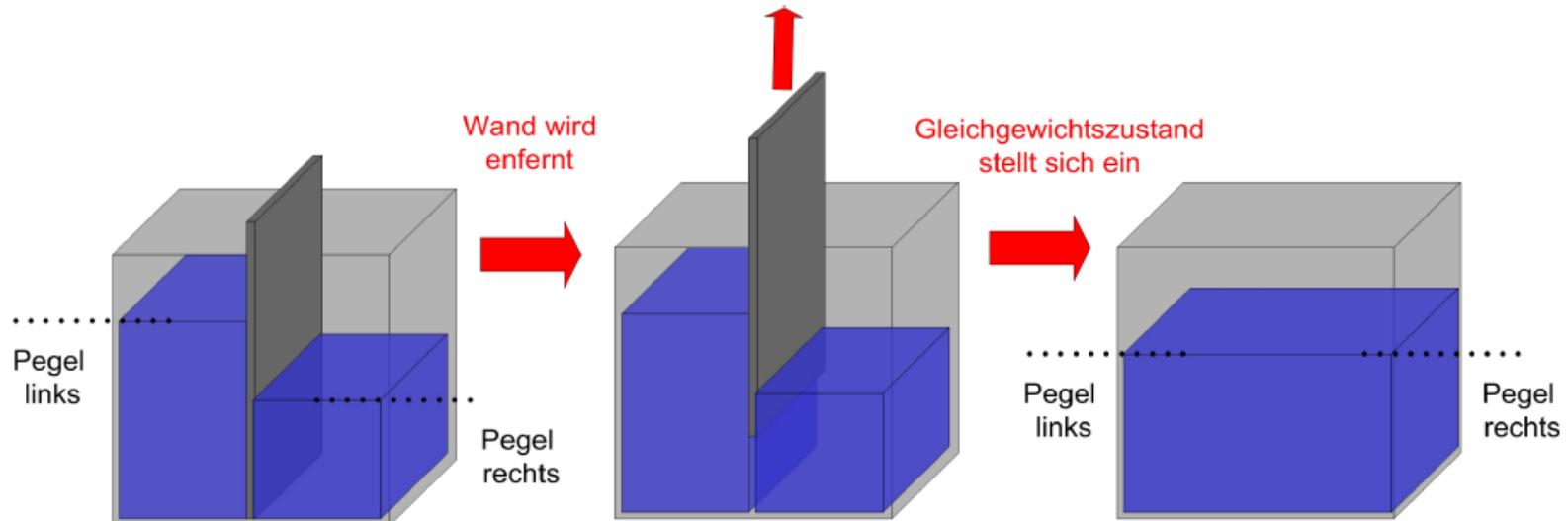
Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

■ ...ohne äußere Vorspannung:



A3 pn-Übergang

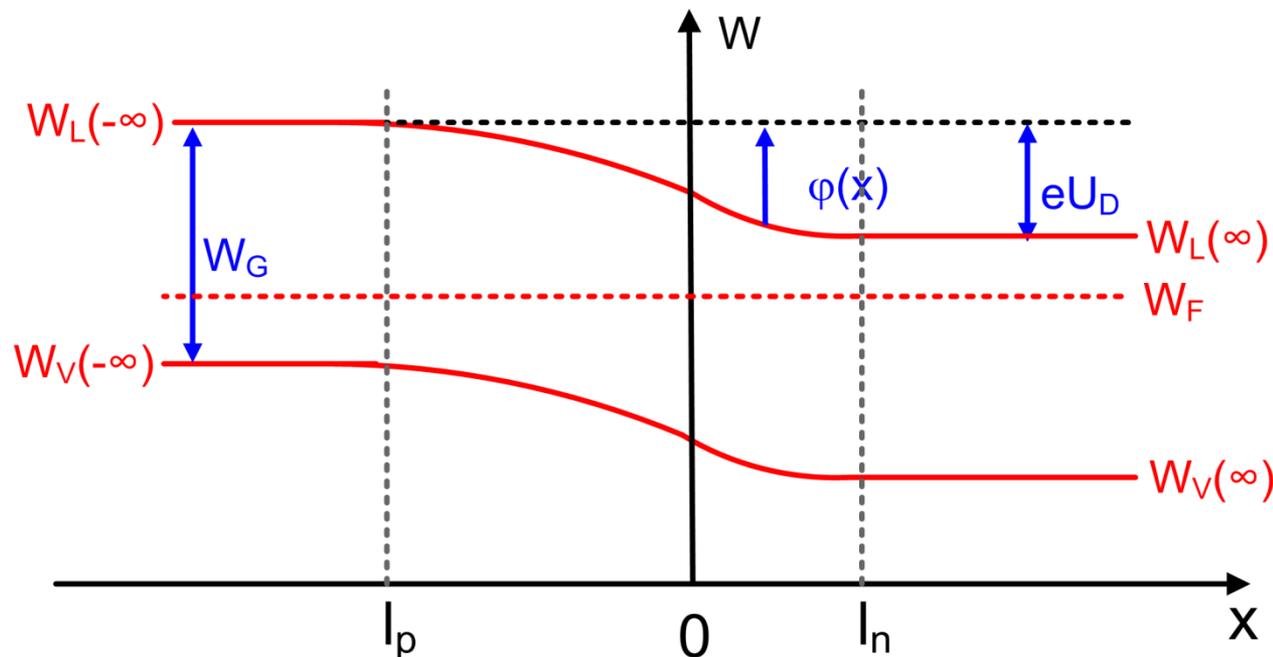
- ABER: unterschiedliche Fermi-niveaus für p- und n-Seite
- Einstellung eines Gleichgewichts beim Zusammenbringen
- Analogie mit Wasserpegeln



A3 pn-Übergang

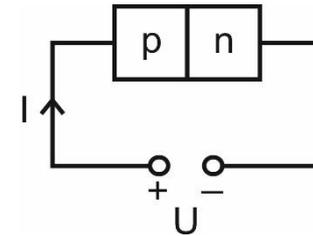
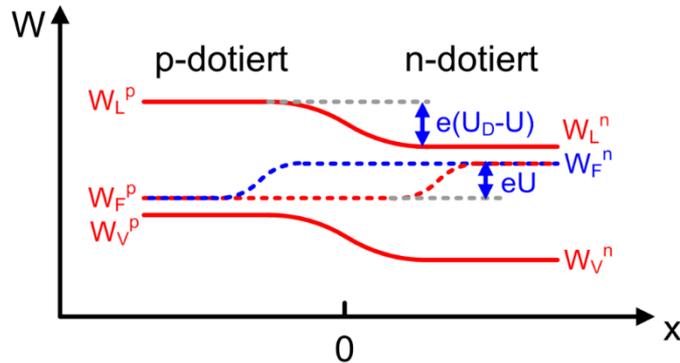
Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermi-niveaus, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden ...

- ...ohne äußere Vorspannung:

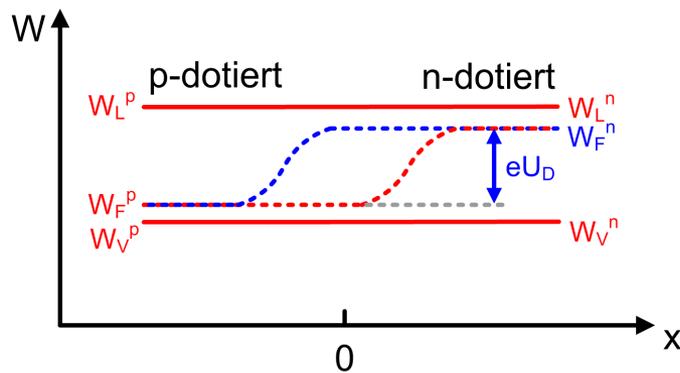


A3 pn-Übergang

- ...mit äußerer Vorspannung $+U$ in Durchlassrichtung:



- Flachbandfall: $U = U_D$



Zusammenfassende Fragen

- Was wird als Dotierung von Halbleitern bezeichnet, wie lässt diese sich realisieren und wozu dient sie?
- Wodurch lässt sich das Gleichgewicht eines Halbleiters stören?
- Wie lassen sich Ladungsträgerdichten im Nicht-Gleichgewicht beschreiben?
- Wie ändern sich Bandstruktur und Fermi-Energie eines pn-Übergangs bei angelegter Spannung?

Zusammenfassung der Übungen

- **Welle-Teilchen-Dualismus** (Photoeffekt, de-Broglie-Wellenlänge, ...)
- **Wellenpakete** (Dispersion, Fourier-Transformation, freies Elektron, ...)
- **Schrödinger-Gleichung** (verschiedene Potentiale, Stetigkeitsbedingungen, Reflexion, Transmission, Tunneleffekt, gekoppelte Potentialtöpfe, 3D, ...)
- **Wasserstoffatom** (Orbitale, Quantenzahlen, ...)
- **Atombindungen**
- **Kristallstrukturen** (Gittervektoren, Bravais-Gitter, Bloch-Oszillation, ...)
- **Bandstrukturen** (Bandlücke, effektive Masse, (in)direkter Halbleiter, ...)
- **Ladungsträgerdichten** (Zustandsdichte, Fermi-Funktion, Leitfähigkeit, ...)
- **Dotierung**
- **Halbleiter im Nichtgleichgewicht** (Kontinuitätsgleichung, Drift & Diffusion, Beleuchtung, ...)
- **pn-Übergang**