

Lichttechnisches Institut

Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer

M. Sc. Benjamin Fritz

M. Sc. Henning Mescher

Engesserstraße 13

76131 Karlsruhe

Optik und Festkörperelektronik

Lösung zum 8. Übungsblatt

Besprechung: Übung 3. Juli 2020

1. Störstellenleitung vs. intrinsische Leitung

Ein Halbleiter habe eine Bandlücke von $W_g = 1 \text{ eV}$. Elektronen und Löcher sollen eine effektive Masse gleich der freien Elektronenmasse haben. Der Halbleiter sei p-dotiert mit einer Akzeptorkonzentration von $p = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Das Akzeptorniveau liege $0,065 \text{ eV}$ über dem Valenzband.

- a) Wie groß ist die Dichte der Löcher bei $T=300 \text{ K}$ (Die Lage des Fermi-niveaus kann aus Abbildung 1 abgeschätzt werden)? Vergleichen Sie diese mit der Dichte der Löcher in einem undotierten Halbleiter mit sonst gleichen Eigenschaften.

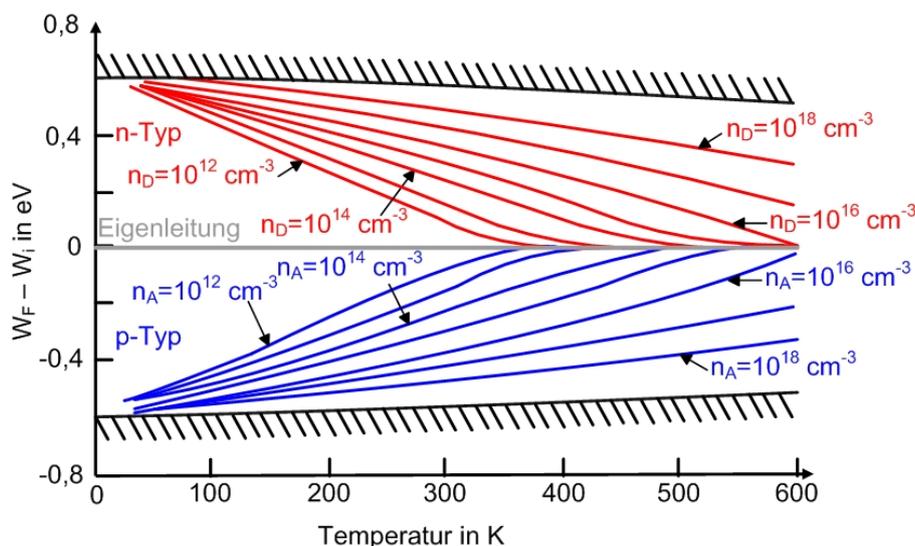


Abbildung 1: Fermienergie über Temperatur

Wir betrachten zunächst den undotierten Halbleiter. In diesem sind die Dichten der Löcher und der freien Elektronen gleich der intrinsischen Ladungsträgerdichte. Für die Löcherdichte gilt also:

$$p = n_i = \sqrt{N_V N_L} \exp\left(-\frac{W_G}{2k_B T}\right) = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (1)$$

Nun schauen wir uns den dotierten Halbleiter an. Die Dichte der ionisierten Störstellen, d.h. der mit Elektronen besetzten Akzeptorniveaus im p-dotierten Halbleiter ergibt sich zu:

$$n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{k_B T}\right)} \quad (2)$$

Zur Berechnung lesen wir aus Abbildung 1 ab, dass bei $T = 300\text{ K}$ das Fermi-niveau ungefähr $0,2\text{ eV}$ oberhalb des Valenzbandes liegt, also $W_F = W_V + 0,2\text{ eV}$. Das Akzeptorniveau liegt bei $W_A = W_V + 0,065\text{ eV}$. Somit erhalten wir:

$$W_A - W_F = W_V + 0,065\text{ eV} - W_V - 0,2\text{ eV} = -0,135\text{ eV} \quad (3)$$

Eingesetzt in unsere Gleichung folgt mit $k_B T = 0,026\text{ eV}$.

$$n_A^- = n_A \frac{1}{1 + 2 \exp\left(-\frac{0,135\text{ eV}}{0,026\text{ eV}}\right)} = 0,99 n_A = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (4)$$

Fast alle Akzeptoren sind ionisiert, die Dichte der Löcher liegt also ungefähr bei der Dotierdichte der Akzeptoren.

Vergleichen wir die Dichte der ionisierten Störstellen mit der intrinsischen Löcherdichte, so gilt $n_A^- \gg n_i = n$. Damit können wir annehmen, dass gilt

$$p \approx n_A^- = 9,9 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (5)$$

Die Anzahl der Löcher im intrinsischen Halbleiter liegt damit weit unter der Löcherdichte im dotierten. Im hinreichend dotierten Halbleiter können also die durch Band-Band-Übergänge erzeugten freien Ladungsträger bei Raumtemperatur vernachlässigt werden.

- b) Bestimmen Sie nun die Dichten der freien Elektronen für beide Fälle in a).

Im intrinsischen Halbleiter ist die Anzahl der freien Elektronen gleich der der Löcher, da freie Ladungsträger immer in Paaren erzeugt werden. Es gilt also:

$$n = p = n_i = 1 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (6)$$

Im dotierten Halbleiter nutzen wir das Massenwirkungsgesetz $np = n_i^2$ und erhalten:

$$n = \frac{n_i^2}{p} \approx 1 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (7)$$

Die Dichte der freien Elektronen bleibt also bei p-Dotierung nicht gleich, sondern wird durch die Dotierung erniedrigt!

- c) Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ bei $T=300\text{ K}$ unter der Annahme einer Locherbeweglichkeit von $100\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Die Beweglichkeit der Elektronen sei $1500\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

Die Leitfähigkeit ist:

$$\sigma = e_0(\mu_p p + \mu_n n) \quad (8)$$

Mit den Informationen aus den vorhergehenden Aufgabenteilen können wir die freien Elektronen im dotierten Halbleiter vernachlässigen. Es gilt also:

$$\sigma = e_0(\mu_p p) = 0,16\text{ AV}^{-1}\text{cm}^{-1} \quad (9)$$

2. Halbleiter unter Beleuchtung

Wir betrachten einen stark p-dotierten Halbleiter-Quader der Dicke d . An der Oberseite wird er homogen mit Licht bestrahlt. Die einfallenden Photonen werden in einer im Vergleich zur Diffusionslänge sehr dünnen Schicht absorbiert. Wir befinden uns im Bereich der Störstellenerschöpfung.

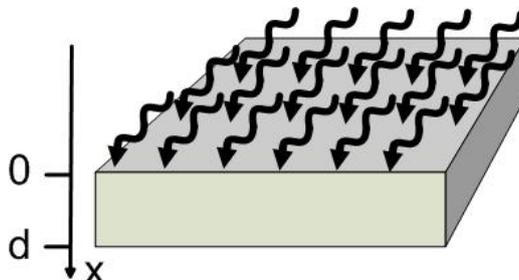


Abbildung 2: Absorption in einem Halbleiter der Dicke d

- a) Stellen Sie nun die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen für die Überschusselektronen Δn auf und erklären Sie Ihr Vorgehen. Gehen Sie davon aus, dass an der Oberfläche eine konstante Überschusssträgerdichte aufrecht erhalten wird. An der Unterseite der Probe werden alle Überschussladungsträger abgesaugt. Im Halbleiter habe sich ein stationärer Zustand eingestellt. Gehen Sie von einer Rekombinationsrate $r = \Delta n / \tau_n$ aus.

Wir können uns auf die Überschussladungsträgerdichte beschränken, stellen also die Kontinuitätsgleichung für Δn auf. Da Ladungsneutralität herrscht, betrachten wir nur einen Diffusionsstrom. Außerhalb der Randzone gibt es keine Generation, für die Rekombination verwenden wir nach Aufgabenstellung $r = \Delta n / \tau_n$. Insgesamt gilt also:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (10)$$

Da die Bestrahlung stationär ist, erwarten wir zudem keine zeitliche Änderung, d.h. $\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = 0$. Somit gilt:

$$0 = D_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \frac{\Delta n}{\tau_n} \quad (11)$$

Auf der oberen Seite des Quaders legt die Injektion der Ladungsträger durch Bestrahlung die Randbedingung fest.

$$\Delta n(x = 0) = \Delta n_0 \quad (12)$$

Alle Elektronen, die die Unterseite erreichen, werden sofort weggesaugt.

$$\Delta n(x = d) = 0 \quad (13)$$

- b) Lösen Sie allgemein die im letzten Aufgabenteil aufgestellte Gleichung und berechnen Sie nun die Überschusselektronendichte.

Wir multiplizieren mit τ_n und erhalten:

$$0 = D_n \tau_n \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial x^2} - \Delta n \quad (14)$$

Gesucht ist also eine Funktion, die gleich ihrer zweiten Ableitung multipliziert mit einer Konstanten ist. Dies trifft zum Beispiel für die Exponentialfunktion zu. Zwei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind also:

$$\Delta n(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right) \quad (15)$$

Mit den Randbedingungen folgt:

$$\Delta n_0 = C_1 + C_2 \quad (16)$$

$$0 = C_1 \exp\left(\frac{d}{L_n}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right) \quad (17)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems:

$$C_1 = -\Delta n_0 \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)} = -\Delta n_0 \frac{1}{\exp\left(+2\frac{d}{L_n}\right) - 1} \quad (18)$$

$$C_2 = \Delta n_0 \left(1 + \frac{\exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}\right) \quad (19)$$

$$= \Delta n_0 \left(\frac{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right)}{\exp\left(+\frac{d}{L_n}\right) - \exp\left(-\frac{d}{L_n}\right)}\right) = \Delta n_0 \left(\frac{1}{1 - \exp\left(-2\frac{d}{L_n}\right)}\right) \quad (20)$$

- c) Ein allgemeinerer Ausdruck für die Rekombinationsrate eines konstant beleuchteten Halbleiters habe die folgende Form:

$$r = \frac{np - n_i^2}{\tau_p n + \tau_n p}$$

Der Halbleiter sei stark n-dotiert. Weiterhin seien die Löcheranzahl und die Elektronenanzahl durch Photogeneration über die Gleichgewichtsanzahl im dotierten un- beleuchteten Halbleiter (n_{dot} und p_{dot}) auf n bzw. p erhöht, wobei $p \ll n_{dot}$ und $n \cong n_{dot}$ gelten soll. Vereinfachen Sie unter diesen Annahmen die Gleichung so weit wie möglich.

Wir schreiben für die Anzahl der Ladungsträger $n = n_{dot} + \Delta n$ und $p = p_{dot} + \Delta p$.

Für die Störstellen-Rekombinationsrate gilt dann:

$$r = \frac{(n_{dot} + \Delta n)(p_{dot} + \Delta p) - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (21)$$

$$= \frac{\overbrace{n_{dot}p_{dot}}^{=n_i^2} + \Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p - n_i^2}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (22)$$

$$= \frac{\Delta n p_{dot} + \Delta p n_{dot} + \Delta n \Delta p}{\tau_p(n_{dot} + \Delta n) + \tau_n(p_{dot} + \Delta p)} \quad (23)$$

Aus den Informationen der Aufgabenstellung lässt sich schließen, dass durch die Ladungsträgerinjektion die Anzahl der Majoritäten fast unverändert bleibt, die der Minoritäten aber stark steigt. Daher können wir im Nenner alle Größen bis auf n_{dot} vernachlässigen. Im Zähler sind aus dem gleichen Grund gegenüber $\Delta p n_{dot}$ die anderen Terme klein. Es folgt somit, dass die Rekombinationsrate hauptsächlich durch die Lebensdauer der Minoritäten bestimmt wird:

$$r = \frac{\Delta p n_{dot}}{\tau_p n_{dot}} = \frac{\Delta p}{\tau_p} \quad (24)$$

3. pn-Übergang

Wir betrachten n- und p-dotiertes Silizium bei Raumtemperatur. Skizzieren Sie das Banddiagramm einschließlich Fermienergie, wenn beide dotierten Halbleiter in Kontakt gebracht werden...

a) ...ohne äußere Vorspannung.

Solange kein äußeres elektrisches Feld am pn-Übergang anliegt, befindet er sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Das elektrochemische Potential (gleichbedeutend mit dem Fermienergie, siehe Skript Kapitel 9.1) ist im gesamten Halbleiter identisch. Weiterhin sind die Energieniveaus weit entfernt von der Raumladungszone unverändert, da hier noch die gleichen Ladungsträgerdichten vorherrschen wie vor dem Kontakt. Als letztes müssen nur noch die Valenz- und Leitungsbandkanten in den unterschiedlich dotierten Bereichen des Siliziums über die Raumladungszone hinweg verbunden werden. Dazu wird ein quadratischer Verlauf angenommen, der sich aus der Poisson-Gleichung unter Annahme der Schottky-Näherung für die Raumladungen ergibt. Man erhält das in Abbildung 3 gezeigte Banddiagramm für den pn-Übergang ohne Vorspannung.

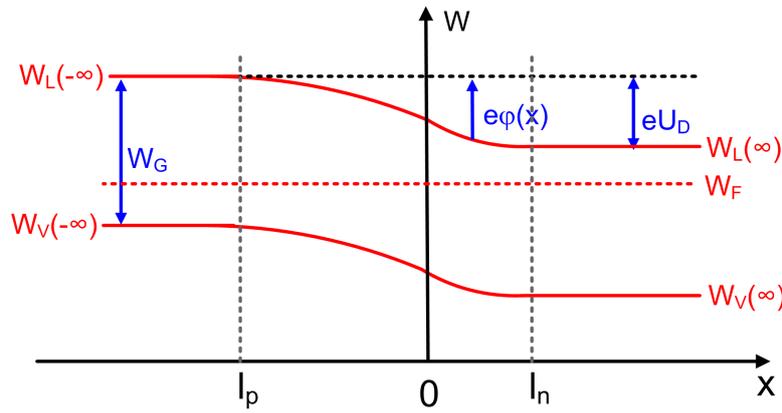


Abbildung 3: Banddiagramm pn-Übergang ohne Vorspannung.

b) ...mit äußerer Vorspannung $+U_D$ (Diffusionsspannung) in Durchlassrichtung.

Sobald ein äußeres elektrisches Feld angelegt wird, befindet sich der pn-Übergang nicht mehr im Gleichgewicht. Ein einheitliches Fermi-niveau für Löcher und Elektronen kann nicht mehr angegeben werden. Das Massenwirkungsgesetz gilt in der Raumladungszone nicht. Da die Raumladungszone in erster Näherung als frei von beweglichen Ladungsträgern angenommen wird, ist ihr ohmscher Widerstand im Vergleich zum Rest des Halbleiters sehr hoch. Deshalb fällt die gesamte angelegte äußere Spannung U über der Raumladungszone ab. Die Ladungsträgerdichten für Löcher und Elektronen werden getrennt voneinander über sogenannte Quasi-Fermi-niveaus beschrieben. Die energetische Aufspaltung der Quasi-Fermi-niveaus entspricht dabei genau der angelegten äußeren Spannung multipliziert mit der Elementarladung e (siehe Abbildung 4). In Durchlassrichtung ($U > 0$) führt dies zu einer Verringerung der Potentialbarriere $e(U_D - U)$ und einer Verkleinerung der Raumladungszone. In Sperrrichtung ($U < 0$) verhält es sich genau umgekehrt.

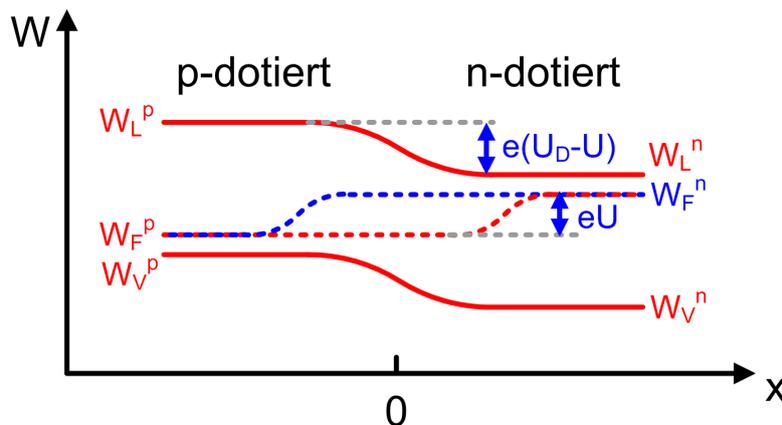


Abbildung 4: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung.

Entspricht die äußere Spannung genau der Diffusionsspannung U_D wird die Bandkrümmung genau ausgeglichen und man erhält den sogenannten Flachbandfall (Abbildung 5).

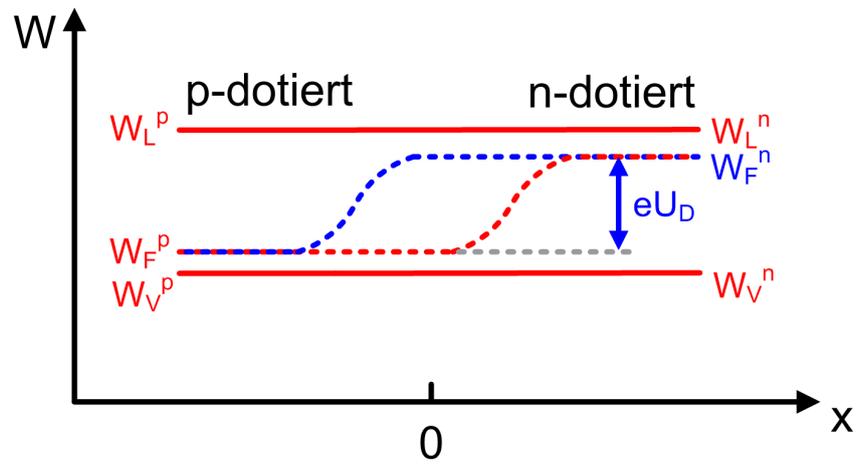


Abbildung 5: Banddiagramm pn-Übergang mit Vorspannung U_D (Flachbandfall) in Durchlassrichtung.