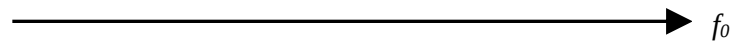


Lichttechnisches Institut
 Karlsruher Institut für Technologie
 Prof. Dr. rer. nat. Uli Lemmer
 Prof. Dr.-Ing. Ulrike Krewer (IAM-WET)
 Dr.-Ing. Stefan Wagner (IAM-WET)
 Janis Geppert, M.Sc. (IAM-WET)

Optik und Festkörperelektronik
 Lösung zum 9. Übungsblatt
 Besprechung: Übung 17. Juli 2020

1. Dielektrika

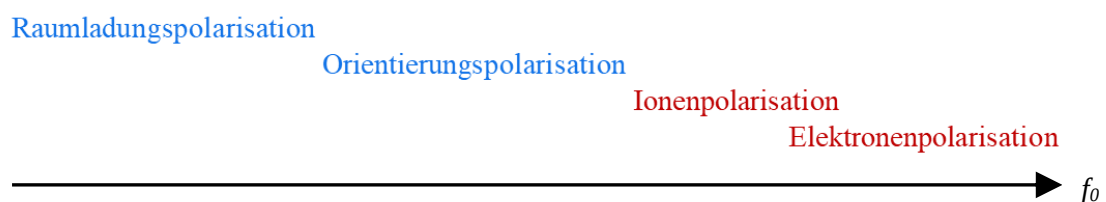
- a) Nennen Sie drei dielektrische Polarisationsmechanismen und ordnen Sie diese nach steigender Resonanz- bzw. Relaxationsfrequenz des jeweiligen Ausfallmechanismus.



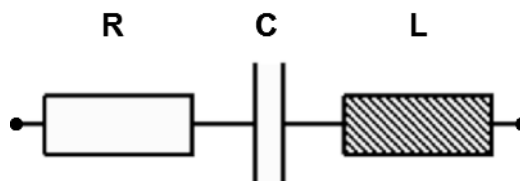
In einem polarisierbaren Medium gilt allgemein: $\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}$. Die Polarisation $\vec{P}$ hängt vom äußeren Feld $\vec{E}$ ab, die Größe χ_e nennt sich elektrische Suszeptibilität. Sie ist eine Materialeigenschaft, welche die Fähigkeit zur elektrischen Polarisierung des Materials im eingeprägten elektrischen Feld angibt. Im allgemeinen (anisotropen) Fall ist χ_e ein Tensor.

In der Vorlesung wurden vier Arten der Polarisation in dielektrischer Materie vorgestellt: (a) die Elektronenpolarisation (Auslenkung von Atomkern und -hülle gegeneinander) und (b) die Ionenpolarisation (Auslenkung von Kationen und Anionen im Festkörperverbund); in beiden Fällen werden durch ein äußeres Feld Dipole in der Materie induziert. Zusätzlich gibt es (c) die Orientierungspolarisation (die Ausrichtung permanent vorhandener Dipole) und (d) die Raumladungspolarisation (eine Ladungstrennung durch Ansammlung freier Ladungsträger, z.B. an isolierenden Korngrenzen in einem Werkstoff mit leitfähigen Körnern). In den Fällen (a) und (b) handelt es sich um schwingungsfähige Systeme (Rückstellkräfte führen im Wechselfeld zur Resonanz, vgl. mech. Oszillator). In den Fällen (c) und (d) ist dies nicht der Fall, bei zunehmender Frequenz können die Dipole dem äußeren Feld immer schlechter folgen (Relaxation).

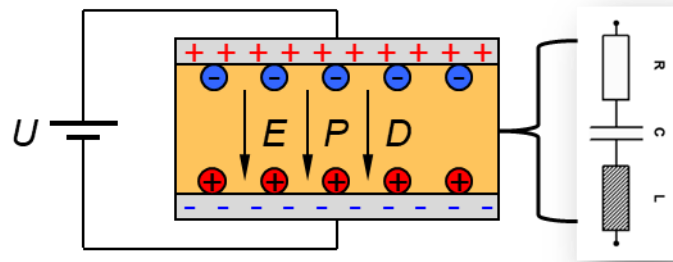
Das Anlegen einer Wechselspannung hat folglich, abhängig von der jeweiligen Polarisationsart, unterschiedlichen Einfluss auf die Polarisation P:



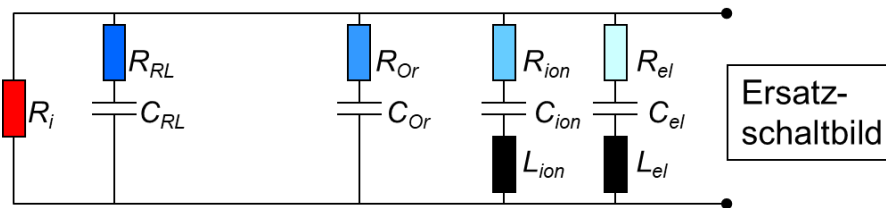
- b) Nennen Sie eine dielektrische Polarisationsart, die durch das unten gezeigte elektrische Ersatzschaltbild beschrieben werden kann.



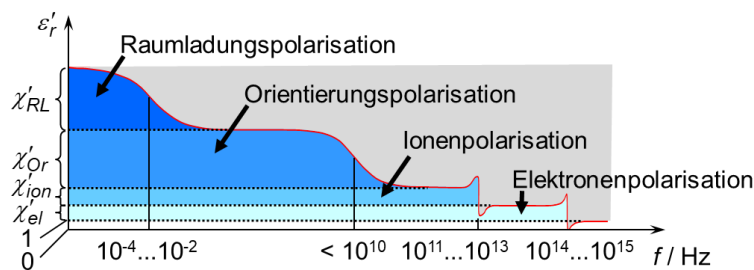
Allgemein bildet das Ersatzschaltbild modellhaft die physikalischen Vorgänge im Dielektrikum ab:



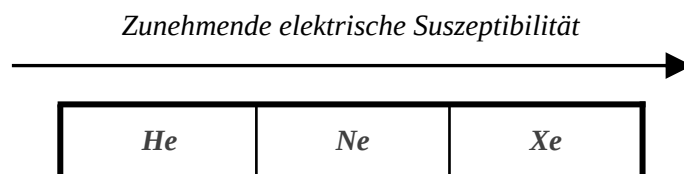
Widerstand R und Kapazität C treten bei allen Polarisationsmechanismen auf; das Vorhandensein einer Induktivität L ist aber für Resonanzphänomene charakteristisch, also nur bei Ionen- und Elektronenpolarisation. Nachsatz: Für die vier unter (a) betrachteten Polarisationsarten sind die folgenden Ersatzschaltbilder charakteristisch:



Im sogenannten Dispersionsspektrum (unten) wird erkennbar, wie die unterschiedlichen Polarisationsarten der Frequenz eines Wechselfeldes folgen können bzw. ab welchen Frequenzen sie sukzessive ausfallen, da Relaxation auftritt (vgl. Aufgabenteil (a)).



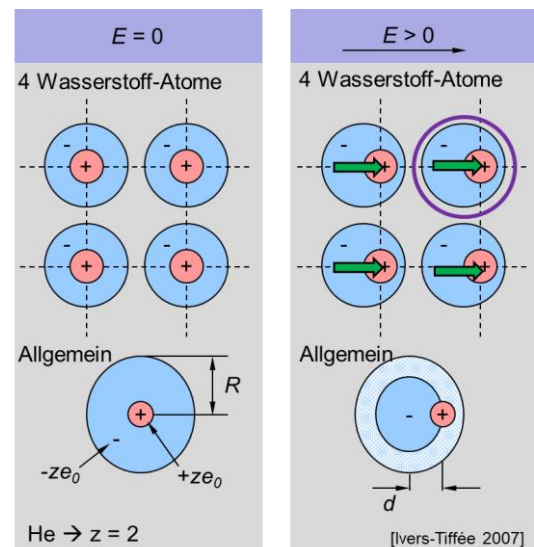
c) Ordnen Sie die Gase Neon (Ne), Helium (He) und Xenon (Xe) nach zunehmender elektrischer Suszeptibilität χ_{el} . Begründen Sie Ihre Antwort.



Atome bestehen aus einem positiv geladenen Kern, der von der negativ geladenen Elektronenwolke umgeben ist. Da der Radius der Elektronenwolke ungefähr 10^5 -mal größer als der des Kerns ist, kann dieser näherungsweise als positive Punktladung betrachtet werden. Ist die Elektronenwolke exakt kugelsymmetrisch, stimmen Schwerpunkt von positiver und negativer Ladung überein. Setzt man Atome (oder Moleküle) einem äußeren elektrischen Feld aus, findet eine Verschiebung bzw. Deformation der Elektronenhülle der Atome statt (vgl. Bild auf S. 3 am einfachsten Beispiel von Wasserstoffatomen). Die elektronische Polarisation tritt in allen Stoffen (gasförmig, flüssig, fest) auf; sie ist der alleinige Polarisationsmechanismus bei kovalent gebundenen Substanzen wie etwa Edelgasen. Infolge der geringen Masse der Elektronen ist die elektronische Polarisation auch noch bei sehr hohen Frequenzen, im Bereich der Lichtwellen, wirksam, vgl. oben.

Die elektronische Polarisierbarkeit kann wie folgt abgeschätzt werden: Man nimmt vereinfachend einen ruhenden Atomkern mit der Ladung $+z \cdot e_0$ und eine gleichmäßig über eine Kugel mit dem Radius R verteilte Elektronenladung $-z \cdot e_0$ an. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes E resultiert eine Ladungsverschiebung um die Strecke d . Der auslenkenden Kraft $z \cdot e_0 \cdot E$ wirkt die Coulombsche Anziehungskraft zwischen Kern und Elektronenhülle entgegen. Im Gleichgewicht gilt dann:

$$z \cdot e_0 \cdot E - \frac{(z \cdot e_0)^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cdot \frac{d^3}{R^3} = 0$$



Mit dem Faktor d^3/R^3 wird die Tatsache berücksichtigt, dass der jenseits des Kerns befindliche Teil der Elektronenwolke (im Bild hellblau eingefärbt) keinen Beitrag zur Rückstellkraft liefert (Prinzip des Faradayschen Käfigs). Das durch ein äußeres E -Feld induzierte Dipolmoment p , gegeben als Ladung mal dem Abstand der Schwerpunkte positiver und negativer Ladung) ist also:

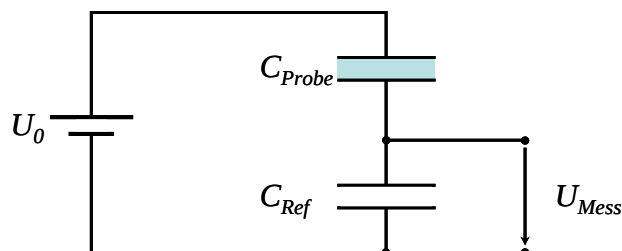
$$p = z \cdot e_0 \cdot d = 4\pi\epsilon_0 \cdot R^3 \cdot E \equiv \alpha_{el} \cdot E$$

Die Polarisierbarkeit α_{el} des Einzelatoms (und mithin die Suszeptibilität) ist also vom Atomradius R abhängig; innerhalb der Gruppe der Edelgase im PSE nimmt der Atomradius aber mit steigender Ordnungszahl zu, also ergibt sich die in der Tabelle auf S. 2 gezeigte Reihenfolge.

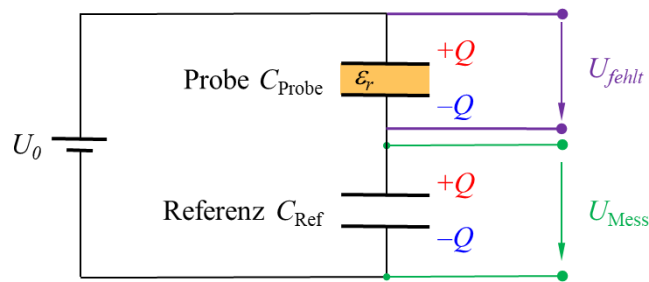
2. Messung der Dielektrizitätszahl / Sawyer-Tower-Schaltung

Zur Bestimmung der Dielektrizitätszahl ϵ_r einer Polyesterprobe wird die unten dargestellte Schaltung (Sawyer-Tower-Schaltung) realisiert: Zwei baugleiche Plattenkondensatoren werden dazu in Reihe geschaltet. In einen davon wird die Polyesterprobe eingebracht. Der zweite Kondensator dient als Referenz und ist luftleer.

Hinweis: In der umseitigen Tabelle ist die am Referenzkondensator gemessene Spannung für zwei verschiedene Temperaturen bei einer angelegten Gleichspannung von $U_0 = 10 \text{ V}$ gegeben.



- a) Berechnen Sie die Dielektrizitätszahlen ϵ_r und die Suszeptibilitäten χ_e für die angegebenen Temperaturen und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



Im Falle der gezeigten Serienschaltung ist bekannt, dass die Ladungsmengen wie skizziert gleich sein müssen, also: $Q = C_{Probe}(U_0 - U_{Mess}) = C_{Ref}U_{Mess}$. Ohne Dielektrikum im oberen Kondensator würde nach der Kondensatorformel gelten: $C_{Ref} = C_{Probe} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$, mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ϵ_r aber gilt nun: $C_{Ref} \neq C_{Probe} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$. Durch Division der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{C_{Probe}}{C_{Ref}} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}}{\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}} = \epsilon_r = \frac{U_{Mess}}{(U_0 - U_{Mess})},$$

aus den gegebenen Spannungen lässt sich die Dielektrizitätszahl ϵ_r (bzw. die Suszeptibilität $\chi_e = \epsilon_r - 1$) des Dielektrikums bestimmen, vgl. Tabelle unten.

Tabelle: U_{Mess} bei unterschiedlichen Temperaturen

$T / ^\circ C$	U_{Mess} / V	ϵ_r	χ_e
$T_1 = 25$	7,5	3,0	2,0
$T_2 = 225$	7,0	2,33	1,33

- b) Die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität χ_e lässt sich mit folgender Formel beschreiben:

$$\chi_e(T) = a + \frac{b}{T}$$

Bestimmen Sie die temperaturunabhängige Konstante a und das Maß für die Temperaturempfindlichkeit b .

Wenn man die unter (a) errechneten Werte für zwei verschiedene Messtemperaturen (Tabelle) in die Gleichung zur Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität einsetzt, erhält man zwei Gleichungen

$$2 = a + \frac{b}{(273 + 25)K} \quad (1)$$

$$1,33 = a + \frac{b}{(273 + 225)K} \quad (2),$$

aus denen man dann $a = 0,33$ und $b = 497,15 K$ erhält.

- c) Berechnen Sie die Anteile χ_{el} und χ_{or} an der Suszeptibilität χ_e bei T_1 , wenn davon ausgegangen wird, dass lediglich Elektronen- und Orientierungspolarisation auftreten. Die Konzentration n der permanenten Dipole im Dielektrikum sei unabhängig von T .

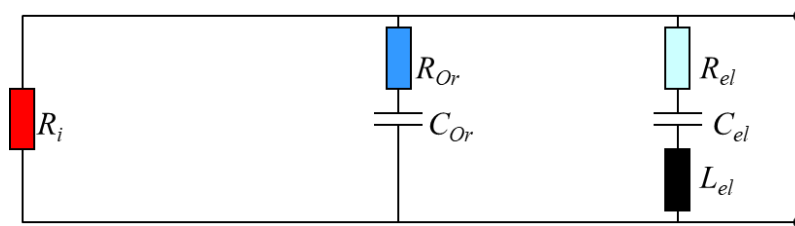
Sofern in einem Stoff mehrere Polarisationsarten existieren, überlagern sich die elektrischen Suszeptibilitäten additiv: $\chi_e = \chi_{el} + \chi_{ion} + \chi_{or} + \chi_{RL}$, im vorliegenden Fall gilt also: $\chi_e = \chi_{el} + \chi_{or}$.

Die Elektronenpolarisation ist temperaturunabhängig (die Elektronenbahnen im Atom sind durch die Temperatur kaum beeinflusst), während für die Orientierungspolarisation ein Ansatz der Art $\chi_{or} = \frac{b}{T}$ gilt, welcher der Tatsache Rechnung trägt, dass eine höhere Temperatur (die Zufuhr thermischer Energie) die statistische Unordnung im Dielektrikum begünstigt und daher mit der Ausrichtung der Dipole in einem äußeren E-Feld konkurriert (vgl. Fasching).

Aus dem Ansatz $\chi_e(T) = a + \frac{b}{T}$ geht daher hervor, dass $\chi_{el} = a = 0,33$ sein muss, während $\chi_{or} = \frac{b}{T_1} = \frac{497,15 \text{ K}}{298 \text{ K}} = 1,67$ gilt.

- d) Die Gleichspannung U_0 wird nun durch eine Wechselspannung $U_{\sim}$ ersetzt. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Probenkondensators für das gesamte Frequenzspektrum und kennzeichnen Sie die entsprechenden Bauteile.

Aufgrund der Wechselspannung wird nun die Frequenzabhängigkeit der Polarisationsprozesse relevant. Im allgemeinen Ersatzschaltbild auf Seite 2 sind nunmehr nur die Elektronen- und die Orientierungspolarisation zu betrachten, also eine Parallelschaltung aus Restwiderstand R_i und den Beiträgen aufgrund von Orientierungspolarisation bzw. Elektronenpolarisation:



3. Piezoelektrizität, Anwendung: Vielschichtaktor

- a) Geben Sie die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r für den allgemeinen Fall anisotroper Materie an.

Es gilt die vektorielle Beziehung $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ zwischen dem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$, die einer Ladung pro Fläche entspricht. Während in isotropen Medien $\vec{D}$ und $\vec{E}$ dieselbe Richtung haben (und die Dielektrizitätszahl ϵ_r ebenso wie die Permittivität des Vakuums ϵ_0 eine skalare Größe ist), ist dies in anisotroper Materie, z. B. im Falle einer Piezokeramik, bei der ein mechanischer Druck ein (von der Kristallstruktur abhängiges) gerichtetes elektrisches Feld hervorruft, nicht gegeben. ϵ_r ist in diesem allgemeinen Fall daher ein Tensor:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{r11} & \epsilon_{r12} & \epsilon_{r13} \\ \epsilon_{r21} & \epsilon_{r22} & \epsilon_{r23} \\ \epsilon_{r31} & \epsilon_{r32} & \epsilon_{r33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

- b) Welche Beziehung (welcher Unterschied) besteht zwischen ferroelektrischen und piezoelektrischen Kristallen?

Unter **Piezoelektrizität** versteht man die Erscheinung, dass sich in bestimmten dielektrischen Kristallen durch eine von außen angelegte mechanische Spannung eine elektrische Polarisation erzeugen lässt und umgekehrt. Dies ist möglich in Ionenkristallen ohne Symmetriezentrum, nur dort kann durch Deformation eine elektrische Polarisation ohne Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes entstehen. Die Piezoelektrizität ist eng mit der Ferroelektrizität verwandt: Alle ferroelektrischen Kristalle sind auch piezoelektrisch, jedoch braucht ein piezoelektrischer Kristall nicht unbedingt ferroelektrisch zu sein.

Beispiele: Das Metalloxid BaTiO_3 ist in seiner tetragonalen Modifikation piezo- und ferroelektrisch, Quarz (SiO_2) ist hingegen piezo-, aber nicht ferroelektrisch.

Piezoelektrika (z.B. SiO_2)

Ursprungszustand wird wieder erreicht wenn Druck bzw. el. Feld entfernt wird.

→ Polarisation induziert durch mechanische Dehnung

→ Nicht notwendigerweise Hystereseverhalten / remanente Polarisation

Ferroelektrika

Ferroelektrischer Effekt:

- Spontane Polarisation durch Verschiebung Ti^{4+}
- Ausrichten der Dipole durch externes el. Feld

→ kein Symmetriezentrum, polare Achse

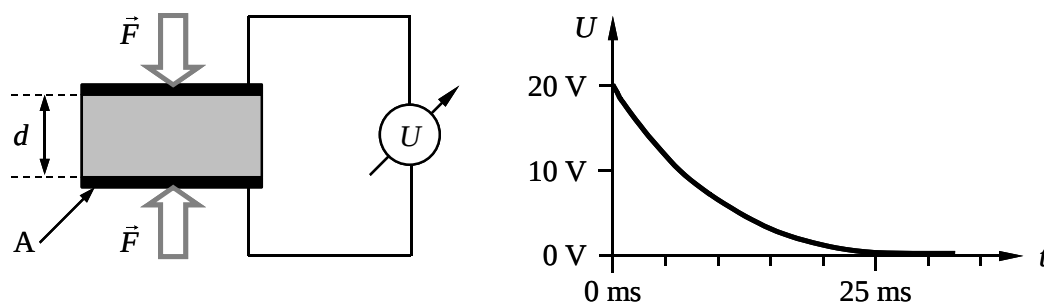
→ Dehnung ändert immer auch die (vorhandene) Polarisation → Piezoeffekt

→ Hystereseverhalten mit remanenter Polarisation

Ferroelektrika sind gekennzeichnet durch das Auftreten einer „spontanen“ Polarisation: Im Gegensatz zum normalen Dielektrikum ist hier bereits ohne polarisierendes Feld eine Polarisation vorhanden. Das zweite grundlegende Kriterium der Ferroelektrizität besteht in der Möglichkeit, durch ein äußeres Feld die Richtung der spontanen Polarisation im Kristall zu verändern. Unter der Vielzahl ferroelektrischer Werkstoffe sind bisher hauptsächlich BaTiO_3 sowie daraus abgeleitete Mischkristalle mit Perowskitstruktur zu besonderer Bedeutung gelangt.

- c) Piezokeramiken werden in Einspritzdüsen von Dieselmotoren eingesetzt, um präzise die optimale Einspritzmenge/-dauer zu gewährleisten. Zunächst soll die Funktionsweise eines einzelnen Piezo-Elements des Vielschichtaktors untersucht werden.

Eine piezoelektrische Keramik wird gemäß der skizzierten Anordnung kontaktiert und an ein Oszilloskop mit dem Innenwiderstand R angeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kraft F auf die Stirnflächen A ausgeübt. Gleichzeitig wird der Verlauf der Spannung U aufgezeichnet.

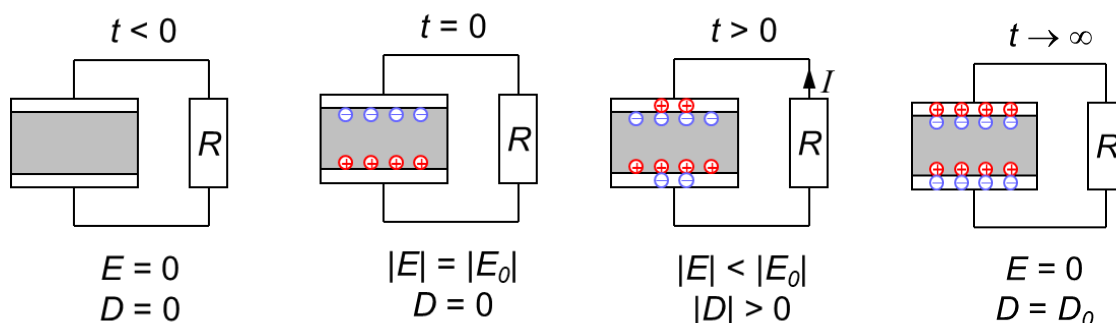


Es sind folgende Zahlenwerte gegeben:

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ M}\Omega & A &= 10 \text{ cm}^2 \\ F &= 400 \text{ N} & d &= 4,425 \text{ mm} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Kapazität C der Anordnung, die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r und die Materialkonstanten g_p und d_p der Piezokeramik.

Wie erklärt sich der oben skizzierte Spannungsverlauf? Durch Druck zum Zeitpunkt $t = 0$ entsteht eine Polarisation P und ein elektr. Feld baut sich auf: $D = \epsilon_0 \cdot E + P = 0$. Die Verschiebungsdichte D verschwindet hierbei, da bei $t = 0$ noch keine Ladung auf die Platten geflossen ist, um die Potentialdifferenz ausgleichen zu können. Erst für $t > 0$ fließt Ladung auf die Kondensatorplatten, wodurch $D = \frac{Q}{A}$ steigt und $|E| = \left| \frac{D}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0} \right|$ sinkt. Mit fortschreitender Zeit wird der Ladungsausgleich vollzogen, vgl. Bild unten.



Der Spannungsverlauf entspricht der Entladekurve eines Kondensators $U(t)$.

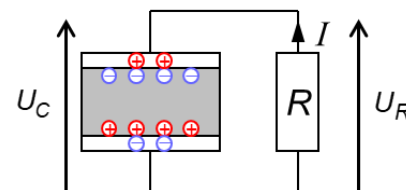
Die Entladestromstärke I ist dabei $I = \frac{U}{R} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = -C \cdot \frac{\partial U_C}{\partial t}$, mit $Q = C \cdot U$.

Mit $U = R \cdot I = -RC \cdot \frac{\partial U_C}{\partial t}$ führt dies auf die lineare homogene DGL erster

Ordnung $U + RC \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ und deren Lösung $U = U_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$.

Die Kapazität C kann nun entweder direkt graphisch oder aber rechnerisch

bestimmt werden zu: $C = -\frac{t}{R} \cdot \frac{1}{\ln(U) - \ln(U_0)} = -\frac{0,007s}{1000000\Omega} \cdot \frac{1}{\ln(10V/20V)} = 10 \text{ nF}$.



Mit der Formel $C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ für einen Plattenkondensator folgt daraus für die relative Dielektrizitätszahl:

$$\epsilon_r = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A} = 5000.$$

Aus den piezoelektrischen Gleichungen

$$(1) \epsilon_M = s^E \cdot \sigma_M + d_p \cdot E$$

$$(2) D = d_p \cdot \sigma_M + \epsilon_0 \cdot \epsilon_r^T \cdot E$$

$$(3) \epsilon_M = s^D \cdot \sigma_M + g_p \cdot D$$

$$(4) E = -g_p \cdot \sigma_M + \frac{D}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r^T}$$

e_M : mechanische Dehnung

s_M : mechanische Spannung $[\text{N/m}^2]$

s^E : Elastizitätsmodul bei konstantem E ($E = 0$, Kurzschluss)

s^D : Elastizitätsmodul bei konstantem D ($D = 0$, Leerlauf)

e_r^T : Dielektrizitätszahl bei konstantem s_M ($s_M = 0$, ungeklemmt)

d_p : piezoelektrische Ladungskonstante $[\text{m/V}]$

g_p : piezoelektrische Spannungskonstante $[\text{Vm/N}]$

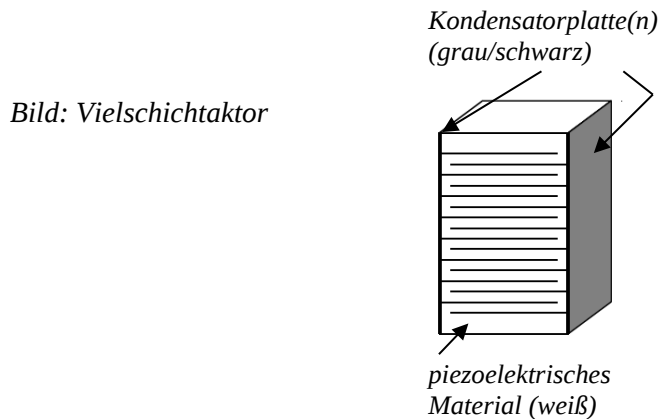
ergeben sich zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgrund von $D = 0$ die vereinfachten Gleichungen

$$(2) 0 = d_p \cdot \sigma_M + \epsilon_0 \cdot \epsilon_r^T \cdot E$$

$$(4) E = -g_p \cdot \sigma_M + 0,$$

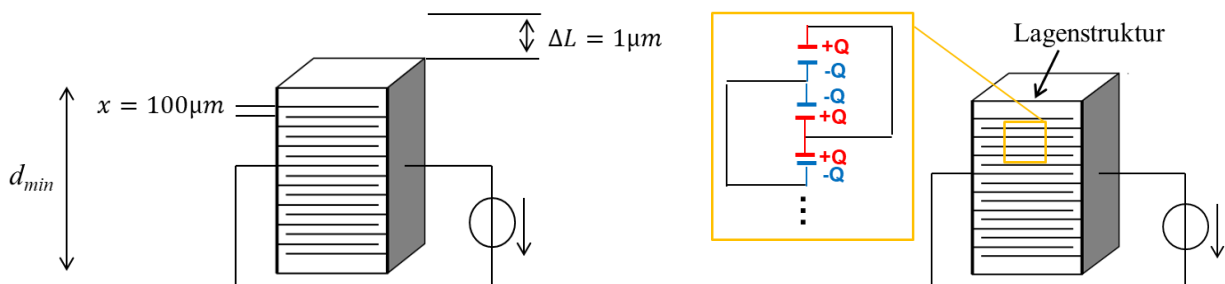
also folgt (unter Verwendung von $E_0 = \frac{U_0}{d}$ und der mechanischen Spannung $\sigma_M = \frac{F}{A}$) für die piezoelektrische Spannungskonstante $|g_p| = \left| -\frac{U_0}{d \cdot \sigma_M} \right| = \left| -\frac{U_0 \cdot A}{d \cdot F} \right| = 11,3 \cdot 10^{-3} \frac{Vm}{N}$ und für die piezoelektrische Ladungskonstante $|d_p| = \left| -\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r^T \cdot E_0}{\sigma_M} \right| = \left| -\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r^T \cdot U_0 \cdot A}{d \cdot F} \right| = 500 \cdot 10^{-12} \frac{As}{N}$.

- d) Aus dem Werkstoff wird ein Vielschichtaktor (Bild unten) hergestellt. Die technologisch bedingte minimale Dicke der einzelnen Schichten beträgt $100 \mu m$. Bestimmen Sie die minimale Gesamtdicke des Aktors, damit im unbelasteten Zustand bei einer Spannung von $U = 20 V$ eine Längenänderung von $1 \mu m$ erreicht wird?



Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Vielschichtaktors. (Die Elektroden seien vernachlässigbar dünn.)

Aus der piezoelektrischen Gleichung (1) $\varepsilon_M = s^E \cdot \sigma_M + d_p \cdot E$, die die mechanische Dehnung $\varepsilon_M = \frac{\Delta x}{x}$ mit einem äußeren E-Feld verknüpft, folgt wegen $\sigma_M = 0$ sofort $d_p \cdot \frac{U}{x} = \frac{\Delta x}{x}$. Für die Dehnung einer einzelnen Schicht bedeutet dies: $\Delta x = d_p \cdot U = 10 nm$. Um eine Gesamtdehnung von $\Delta L = 1 \mu m$ zu erreichen, muss das Bauteil demzufolge aus $n = \frac{\Delta L}{\Delta x} = 100$ Schichten aufgebaut sein. Die Gesamtdicke des Vielschichtaktors muss dann mindestens $d_{min} = n \cdot x = 1 cm$ sein.



Es handelt sich somit um eine parallele Verschaltung von identischen Kondensatoren:

